

de M. Poinsoy facilite beaucoup la conception générale de leur mécanisme. Il suffit, en effet, de transporter au centre de la terre, d'après cette méthode, les gravitations de toutes les parties de cette protubérance vers un astre quelconque, pour que de tous ces couples élémentaires il résulte immédiatement un couple général, susceptible de modifier la direction absolue de la rotation principale, en se composant avec le couple primitif qui lui correspond. Le pouvoir de chaque astre à cet égard est naturellement, comme pour les marées, en raison directe de sa masse et inverse du cube de sa distance; en sorte que le soleil et la lune sont encore les seuls dont l'influence y doive être considérée, en la ré-

quatre ans, cette lumineuse conception comme essentiellement destinée, par sa nature, à simplifier extrêmement la théorie fondamentale des rotations, au lieu d'être bornée à son usage statique immédiat. Cette espérance vient d'être heureusement réalisée, de la manière la plus complète, par le beau travail tout récent de M. Poinsoy sur ce grand sujet, qui rend désormais presque élémentaire la partie la plus transcendante de la dynamique, en même temps qu'il dévoile entièrement une solution jusque alors vainement enveloppée dans des équations inextricables, où la marche générale du phénomène était profondément cachée. Si ma *Philosophie mathématique* n'était depuis longtemps publiée, j'y aurais soigneusement caractérisé l'esprit de cet important mémoire, fondé sur la notion nouvelle des *couples de rotation*, entièrement analogues, par l'ensemble de leurs propriétés fondamentales, aux couples de translation, quoique étant de nature inverse, et dont l'emploi réduit l'analyse exacte de toutes les circonstances que peut présenter la rotation d'un corps quelconque à la simple considération uniforme de son *ellipsoïde central*.

partissant d'ailleurs entre eux de la même manière: en outre, l'étendue effective de la déviation dépend de la masse et de la grandeur de la terre, de la durée de sa rotation, de son degré d'aplatissement, et enfin de l'obliquité de l'écliptique. Si la lune circulait dans le plan de l'écliptique, ou si les nœuds de son orbite étaient fixes, le phénomène se réduirait à la précession proprement dite, l'axe du couple perturbateur étant alors exactement perpendiculaire à ce plan. Mais, la légère inclinaison de l'orbite lunaire détermine, à raison du mouvement rétrograde de ses nœuds, une modification secondaire de même vitesse, qui produit la nutation. La quantité du phénomène est réglée en chaque cas par le rapport entre le moment du couple principal et celui du couple modificateur. Or, comme celui-ci dépend, entre autres éléments, de la masse de l'astre qui le produit, on conçoit comment l'observation du phénomène peut offrir un moyen de la déterminer. C'est ainsi que la mesure précise de la nutation a spécialement perfectionné l'évaluation de la masse lunaire. La théorie de ces phénomènes montre d'ailleurs que, comme dans les marées, leur intensité doit changer d'après les distances variables du soleil et surtout de la lune à la terre. Mais les effets sont eux-mêmes trop peu prononcés pour

que ce défaut d'uniformité puisse jamais devenir bien sensible dans les observations directes. Telles sont, en aperçu, les causes générales qui déterminent les petites altérations qu'éprouve la rotation de notre sphéroïde, quant à la direction de son axe dans l'espace. On voit combien ce serait étrangement abuser de l'analyse mathématique que de s'exercer puérilement, comme on n'a pas craint de le faire tout récemment, à chercher quelle devrait être la précession en supposant que la terre ne tournât pas, puisque la question cesserait même, dans cette absurde hypothèse, d'avoir aucun sens réel et intelligible.

S'il convenait de poursuivre, envers tous les autres astres de notre monde, la théorie des perturbations relatives à leurs rotations, il faudrait distinguer, comme au sujet des translations, entre les planètes, les satellites et les comètes; puisque, par suite des mêmes motifs, cette analyse offrirait encore les mêmes gradations de difficulté. Le cas des comètes ne saurait être mentionné que pour mémoire, par l'impossibilité où nous serons toujours d'observer leur rotation. Quant aux planètes, elles doivent naturellement présenter des phénomènes semblables à ceux de notre précession, et qui peuvent être plus ou moins prononcés, suivant l'inclinaison de leurs axes à

leurs orbites, leur position, leur masse, leur grandeur, la durée de leur rotation, et enfin leur degré d'aplatissement. Par l'ensemble de ces motifs, les perturbations de Mars, sous ce rapport, tiendraient le premier rang.

A l'égard des satellites, leur rotation nous présente, sous un autre point de vue, un phénomène du plus haut intérêt, l'égalité remarquable entre la durée de cette rotation et celle de leur circulation autour de la planète correspondante, à laquelle, par suite, ils présentent continuellement le même hémisphère, sauf les oscillations très petites connues sous le nom de *libration*, dont la règle est d'ailleurs bien déterminée. Cette égalité fondamentale n'est encore sans doute réellement constatée que pour la lune; mais son explication mécanique, indépendamment de la simple analogie, tend à l'ériger en loi générale de tous les satellites. Car, elle résulte, suivant le beau mémoire de Lagrange, de la simple prépondérance qu'a dû nécessairement acquérir, par l'action de la planète, l'hémisphère tourné vers elle dans l'origine, ce qui a produit une tendance naturelle du satellite à retomber sans cesse sur cette face. Un tel effet ayant certainement lieu pour la lune, on ne saurait comprendre comment il pourrait ne pas exister aussi envers les autres satellites, ap-

partenant tous à des planètes plus pesantes, dont ils sont même en général proportionnellement bien plus voisins.

Telle est l'indication générale extrêmement imparfaite à laquelle je suis forcé de me réduire, par la nature de cet ouvrage, relativement à l'étude des diverses sortes de perturbations que l'action mutuelle de tous les astres de notre monde produit nécessairement dans leurs mouvemens. Pour compléter cet aperçu, il me reste encore à signaler une considération essentielle, susceptible, dans la suite, de simplifier cette étude et de la rendre plus précise, en permettant de rapporter tous ces mouvemens à un plan dont la position soit nécessairement indépendante de leurs dérangemens quelconques.

En imaginant, pour plus de facilité, l'ensemble de nos astres décomposé en particules de même poids, l'action mutuelle de ces différens corps peut bien changer la grandeur de l'aire décrite séparément, autour du centre de gravité général, par la projection de chaque rayon vecteur correspondant, sur un plan commun arbitrairement choisi; mais, il résulte des lois fondamentales de la dynamique, comme nous l'avons déjà remarqué dans cette leçon, que, quelque énergie qu'on suppose à cette action, les altérations individuelles

qu'elle produit à cet égard se compensent nécessairement, en sorte que la somme totale de ces aires demeure toujours invariable en un temps donné. Il en doit donc être ainsi de tout plan dont la position dépendrait uniquement de semblables sommes relatives à divers plans quelconques. Or, parmi l'infinité de plans qui pourraient présenter ce caractère, il en est un qu'on a dû naturellement choisir de préférence, comme se distinguant de tout autre par la propriété remarquable que la somme des aires y est la plus grande possible, et que d'ailleurs elle est nulle sur ceux qui lui sont perpendiculaires. La situation de ce plan se détermine aisément, en général, par des formules très simples, d'après les valeurs de la somme des aires pour trois plans rectangulaires quelconques, valeurs qu'on déduit d'ailleurs sans peine des positions et des vitesses de toutes les particules du système rapportées à ces trois plans. On doit la première notion de ce plan à Daniel Bernouilli et à Euler, qui l'avaient remarqué sous le seul point de vue analytique, comme servant à simplifier, par l'annulation de deux constantes, les équations relatives à la rotation d'un corps solide. Cette idée fut immédiatement étendue, sans aucune difficulté, à la considération d'un système variable par Laplace, qui ajouta la propriété géo-

métrique, et qui eut surtout l'heureuse pensée de l'appliquer à la mécanique céleste. Enfin, la vraie conception dynamique du plan invariable a été présentée, depuis quelques années, par M. Poinso, qui l'a montré directement, abstraction faite de tout caractère analytique ou géométrique, comme étant simplement le plan du couple général qui résulte du transport de toutes les vitesses individuelles au centre de gravité du système.

Quant à la détermination effective de ce plan, elle exige, pour qu'il soit réellement invariable, que l'on prenne en considération toutes les aires que peuvent décrire, en vertu de leurs divers mouvemens, les différens points du système. Or, dans l'impossibilité évidente de décomposer le système en particules égales, ainsi que l'exige le strict énoncé de la propriété fondamentale, Laplace avait cru devoir traiter chaque corps céleste comme condensé à son centre, en réunissant aussi les satellites à leurs planètes, afin de ne plus avoir à considérer que de simples points. La lumineuse théorie de M. Poinso lui a fait immédiatement apercevoir le vice radical d'un tel procédé, où l'on fait nécessairement abstraction, non-seulement des aires relatives décrites simultanément par les satellites, mais aussi de celles que les diverses molécules de chaque corps tracent

autour de son centre de gravité, en vertu des rotations correspondantes; et il a ensuite rendu sensible d'ailleurs, d'après les formules analytiques habituellement employées, la nécessité d'ajouter ces diverses aires à celles considérées jusque alors. Une simple décomposition d'intégrale montre, en effet, que la somme des aires décrites par toutes les molécules d'un même corps équivaut au produit de sa masse par l'aire que trace son centre de gravité, plus l'ensemble des aires qu'engendrent les molécules autour de ce centre. Ces aires dues aux rotations ne seraient réellement négligeables vis-à-vis des autres que si le corps était fort petit, ou s'il tournait avec une lenteur extrême. Celle qui résulte de la rotation du soleil est, d'après les hypothèses même les plus défavorables, beaucoup plus grande que celle tracée par la terre dans son mouvement annuel. Aussi, le plan déterminé par les calculs de Laplace serait-il loin, en réalité, d'une invariabilité rigoureuse. C'est néanmoins la parfaite constance qui ferait le seul mérite véritable d'un tel terme de comparaison, pour manifester immédiatement les variations survenues dans l'intérieur de notre monde, et même les déplacemens de son ensemble. Si l'on voulait se borner à un plan peu mobile, il n'y aurait aucun besoin de pénibles calculs fondés sur une

théorie spéciale, et l'on pourrait prendre, presque au hasard, parmi les divers plans astronomiques, tels que celui de l'équateur terrestre ou surtout solaire, ou le plan de l'écliptique, dont les changemens seraient, en réalité, beaucoup moins considérables que ceux du plan proposé par Laplace. Malheureusement, le vrai plan invariable, découvert par M. Poinsoot, est d'une détermination bien plus difficile, puisqu'il exige inévitablement, non-seulement, comme l'autre, l'évaluation des masses célestes, mais aussi celles des momens d'inertie correspondans. Cette dernière estimation ne saurait être faite, *à priori*, qu'en adoptant des hypothèses nécessairement très hasardées sur la loi mathématique relative à la densité dans l'intérieur des astres. J'ai déjà indiqué dans la leçon précédente, au sujet des masses, l'ingénieuse manière dont M. Poinsoot a heureusement éludé cette difficulté fondamentale, en imaginant un moyen rationnel, aussi général que direct, pour obtenir exactement, *à posteriori*, cette mesure indispensable. Cette importante théorie est donc aujourd'hui évidemment complète. Mais son application immédiate ne saurait avoir lieu, comme je l'ai expliqué, avec toute la précision qu'exige, par sa nature, une semblable détermination, pour correspondre

convenablement à sa destination essentielle. Quoi qu'il en soit, on n'en doit pas moins, sous le rapport philosophique, voir avec un profond intérêt comment la mécanique céleste a pu enfin assigner un plan nécessairement immobile au milieu de toutes les perturbations intérieures de notre système, comme Newton avait d'abord reconnu une vitesse nécessairement inaltérable, celle du centre de gravité général. Ce sont les deux seuls élémens rigoureusement indépendans de tous les événemens qui peuvent survenir dans l'intérieur de notre monde, même des bouleversemens les plus complets que notre imagination puisse supposer; leurs variations se rapporteraient seulement aux phénomènes les plus généraux de l'univers, produits par l'action mutuelle des divers soleils, dont elles nous fourniraient naturellement la plus claire manifestation, si une telle connaissance nous était réellement permise.

Le résultat général de l'étude des perturbations a été d'établir, de la manière la plus irrécusable, la stabilité fondamentale de notre monde, relativement à tous les astres de quelque importance, considérés sous tous les rapports essentiels. En faisant abstraction des comètes, toutes les variations de diverses sortes, à l'exception de quelques-

unes presque imperceptibles, sont nécessairement périodiques, et leur période est le plus souvent extrêmement longue, tandis que leur étendue est au contraire fort courte : en sorte que l'ensemble de nos astres ne peut qu'osciller lentement autour d'un état moyen, dont il s'écarte toujours très peu. Quoique tous les élémens astronomiques de chacun d'eux participent réellement à ces oscillations, il faut cependant faire entre eux une distinction importante, en séparant ceux qui se rapportent à la situation des orbites et à la direction des rotations, de ceux qui concernent les positions et les vitesses moyennes relatives au double mouvement d'un astre quelconque. Toutes les grandes perturbations portent uniquement sur les premiers ; les seconds ne peuvent éprouver que des oscillations presque insensibles, dont la précision extrême de nos tables astronomiques actuelles n'exige pas même encore la considération effective. Au milieu de toutes les variations célestes, la translation de nos astres nous présente l'invariabilité presque rigoureuse des grands axes de leurs orbites elliptiques, et de la durée de leurs révolutions sidérales : leur rotation nous montre une constance encore plus parfaite dans sa durée, dans ses pôles, et même, quoiqu'à un degré un peu moindre, dans l'inclinaison de son axe à l'orbite

correspondante. On est certain, par exemple, que, depuis Hipparque, la durée du jour n'a pas varié d'un centième de seconde. Ainsi, dans la stabilité générale de notre monde, nous découvrons encore une stabilité spéciale et plus prononcée à l'égard des élémens dont la fixité importe le plus à la perpétuité des espèces vivantes. Tels sont les sublimes théorèmes fondamentaux de philosophie naturelle, dont l'humanité est redevable à l'ensemble des grands travaux exécutés dans le siècle dernier par les illustres successeurs de Newton.

La cause générale de ces importans résultats réside essentiellement dans la faible excentricité de toutes les orbites principales et dans le peu de divergence de leurs plans. Si les astres de quelque importance avaient décrit, comme les comètes, des ellipses très allongées, contenues dans des plans dirigés en tous sens, leurs relations dynamiques auraient été toujours extrêmement variables, et leurs perturbations auraient dès lors cessé d'être périodiques, pour devenir presque indéfinies, ainsi que celles des comètes. Au contraire, en vertu de l'extrême rondeur des véritables orbites et de l'identité presque entière de leurs plans, l'intensité des diverses actions mutuelles, ne pouvant qu'osciller entre des limites très rapprochées, doit tendre sans cesse à rétablir l'état moyen du