

rallèles, respectivement rectangulaires, où les températures changent d'un point à un autre à raison de chacune de ses trois coordonnées. On prouve encore, dans un tel parallélépipède, que la température d'une molécule quelconque est exprimée par une fonction complète du premier degré relative aux trois coordonnées simultanément, pourvu qu'on suppose les six faces extérieures constamment entretenues aux diverses températures qu'une telle formule assignerait à chacun de leurs points. Il est aisé de reconnaître en effet, comme précédemment, que toutes les actions thermologiques élémentaires se détruisent deux à deux, en vertu de cette répartition des températures.

Ce cas donne lieu à une nouvelle remarque fondamentale sur l'interprétation thermologique des trois coefficients propres aux diverses coordonnées contenues dans cette équation. Les échanges de chaleur s'effectuant ici en tous sens, chaque coefficient sert à mesurer le flux parallèle à l'ordonnée correspondante. Chacun de ces trois flux principaux se trouve avoir nécessairement la même valeur que si les deux autres n'existaient pas; comme en mécanique, les divers mouvemens élémentaires s'accomplissent simultanément, sans aucune altération mutuelle. En estimant ce flux

suivant une nouvelle direction quelconque, on voit aussi qu'il se déduit des premiers d'après les mêmes lois mathématiques qui président, en mécanique, à la composition des forces, et, en géométrie, à la théorie des projections.

On aperçoit ici un nouvel et mémorable exemple de cette admirable propriété radicalement inhérente à l'analyse mathématique de dévoiler, quand elle est judicieusement appliquée, des analogies réelles entre les phénomènes les plus divers, en permettant de saisir dans chacun ce qu'il présente d'abstrait, et par suite, de commun. Le premier et le plus fondamental des deux cas thermologiques élémentaires que nous venons de considérer, correspond exactement, en géométrie, à la marche des ordonnées d'une ligne droite, et, en mécanique, à la loi du mouvement uniforme. Les mêmes coefficients dont la destination thermologique est de mesurer les flux de chaleur, servent, géométriquement, à estimer les directions, et, mécaniquement, à évaluer les vitesses. Quoique je me sois efforcé, dans le premier volume, de faire convenablement ressortir, par une étude directe et générale, ce caractère fondamental de l'analyse mathématique, je ne devais pas négliger d'en signaler ici une vérification aussi capitale. D'après les théorèmes préliminaires indiqués

ci-dessus, la méthode infinitésimale permet de former aisément l'équation fondamentale relative à la propagation de la chaleur dans un cas quelconque. En effet, de quelque manière que doivent varier les températures successives d'une même molécule, ou les températures simultanées des différens points, on peut toujours concevoir la masse décomposée en élémens prismatiques, infiniment petits relativement à chacun des trois axes coordonnés, suivant les faces desquels les flux de chaleur soient uniformes et constants pendant toute la durée d'un même instant. Chaque flux sera donc nécessairement exprimé par la fonction dérivée de la température relativement à l'ordonnée correspondante. Cela posé, si le flux avait, dans les trois sens, la même valeur pour les deux faces égales et opposées perpendiculaires à la même ordonnée, la température de l'élément ne pourrait, évidemment, éprouver aucun changement, puisqu'il s'échaufferait autant par l'une de ces faces qu'il se refroidirait par l'autre. Ainsi, les variations de cette température ne sont dues qu'à l'inégalité de ces deux flux antagonistes. En évaluant cette différence, qui dépendra naturellement de la seconde dérivée de la température rapportée à l'ordonnée considérée, et ajoutant entre elles les différences

propres aux trois axes, on évaluera donc exactement la quantité totale de chaleur alors introduite, et par suite, l'accroissement instantané que devra présenter effectivement la température de la molécule, pourvu qu'on ait convenablement égard à la chaleur spécifique et à la densité de cet élément. De là résulte immédiatement l'équation différentielle fondamentale, qui consiste en ce que la somme des trois dérivées partielles du second ordre de la température, envisagée tour à tour comme une fonction de chaque ordonnée isolément, est nécessairement toujours égale à la première dérivée de cette température relativement au temps, multipliée toutefois par un coefficient constant : ce coefficient a pour valeur le produit de la densité par le rapport de la chaleur spécifique à la perméabilité de la molécule. S'il était convenable de considérer directement l'état final et permanent du système, on le caractériserait aussitôt en se bornant à annuler le second membre de cette équation générale, qui ne contiendrait plus alors que trois variables indépendantes.

On voit que, conformément aux propriétés universelles des relations différentielles, une telle équation ne renferme immédiatement aucune trace, non-seulement de l'état thermologique ini-

tial, mais encore des circonstances perpétuelles propres à la surface extérieure. L'équation exprime simplement ce que le phénomène offre de plus général et de plus profond, l'échange continuel de la chaleur entre toutes les molécules du système, en vertu de leurs températures actuelles. C'est ainsi que le premier volume de cet ouvrage nous a fait voir les équations différentielles fondamentales de la géométrie et de la mécanique, représentant d'une manière uniforme, un même phénomène général, abstraction faite du cas particulier quelconque où il se réalisera. Telle est l'origine philosophique de cette parfaite coordination qu'introduit constamment l'emploi convenable de l'analyse mathématique, quand la nature de nos études les en rend susceptibles. Désormais, en thermologie, les recherches illimitées que pourront suggérer les innombrables variétés de la forme des corps et de leur mode d'échauffement seront toujours, aux yeux des géomètres, les diverses modifications analytiques d'un problème unique, invariablement assujetti à une même équation fondamentale. Les différens cas particuliers ne pourront, en effet, s'y distinguer que par la composition analytique des fonctions arbitraires propres à l'intégrale générale de cette équation.

Toutefois, comme le sens d'une telle relation

abstraite ne saurait devenir entièrement déterminé qu'en ayant égard aux conditions caractéristiques de chaque question spéciale, il importe de signaler maintenant, pour compléter cette indication sommaire, le mode uniforme suivant lequel Fourier a conçu l'introduction analytique de ces conditions complémentaires. Il faut distinguer, à cet effet, entre l'état initial des différens points du système et l'état permanent de la surface extérieure, titres généraux sous lesquels pourront toujours être classées toutes ces diverses particularités.

Quant à la considération des températures primitives, elle ne présente immédiatement aucune difficulté analytique qui lui soit propre, si ce n'est lorsqu'on en vient à exécuter les intégrations. Alors, les fonctions arbitraires doivent être choisies de telle manière que, en annullant le temps dans la formule générale qui représente la température de chaque point à un instant quelconque, afin de remonter à l'état initial, cette formule devienne exactement identique avec la fonction des coordonnées, préalablement définie, par laquelle a été caractérisé le système thermologique originel. Cette condition ne donne donc lieu à aucune relation différentielle générale.

Il n'en est pas de même relativement à l'état

de la surface. On doit alors exprimer que la formule générale des températures, quand on y suppose, entre les coordonnées qui s'y trouvent, la relation convenable à la surface proposée, coïncide, en tout temps, avec celle qui convient à cette surface. Or, cette condition étant, de sa nature, permanente, elle est susceptible d'être prise en considération d'une manière générale par une équation différentielle subsidiaire, puisqu'elle altère continuellement le mode fondamental de propagation, tandis que l'influence de l'état initial devait se borner uniquement à affecter les valeurs absolues des températures propres à un instant donné. Cette équation différentielle, qui est nécessairement du premier ordre, s'obtient en égalant, pour un élément quelconque de la surface, la quantité de chaleur qu'il reçoit, selon sa normale, de la part des molécules intérieures correspondantes, avec celle qui tend à sortir par l'influence donnée du système ambiant. L'ordre moins élevé d'une telle équation, comparativement à l'équation fondamentale de la propagation intérieure, résulte de ce que, dans celle-ci, il fallait inévitablement considérer la différentiation du flux entre les deux faces opposées de chaque élément, tandis que, pour la surface, on doit, au contraire, envisager le flux lui-

même, immédiatement compensé par l'action du milieu. Si, par une cause quelconque, une certaine couche intérieure était assujettie d'avance à un système de températures déterminé, il en résulterait aussitôt, comme le remarque judicieusement Fourier, la même solution de continuité qu'à la surface dans le mode général de propagation de la chaleur.

Cette équation auxiliaire propre à tous les points de l'enveloppe, contient nécessairement, outre les fonctions dérivées de la température relativement aux coordonnées qui expriment le flux suivant chacune d'elles, les coefficients différentiels purement géométriques par lesquels est définie analytiquement la direction de la normale en chaque point de la surface. Tel est le mode général suivant lequel la forme des corps se trouve convenablement introduite dans la thermologie mathématique, de manière à exercer toujours sur l'ensemble de la solution une influence inévitable et spéciale. L'observation avait, sans doute, signalé depuis long-temps une telle influence, par des indications incontestables; mais on conçoit qu'il était impossible de s'en faire une juste idée, avant que la doctrine de Fourier eût rationnellement assigné son véritable rang général parmi les diverses causes qui concourent à l'effet total, dont

L'exploration directe ne saurait fournir à cet égard que des notions essentiellement vagues et confuses.

Tels sont les moyens généraux de mettre en équation tous les problèmes relatifs à la propagation de la chaleur dans les solides, ainsi que les deux sortes de conditions complémentaires destinées à déterminer, pour chaque cas particulier, les fonctions arbitraires correspondantes à cette équation différentielle du second ordre. La nature de cet ouvrage et ses limites nécessaires ne me permettent point de donner ici aucune idée, même sommaire, du système entièrement neuf de procédés analytiques créé par le génie de Fourier pour l'intégration de ces équations, qui se trouvaient dépendre inévitablement de la partie la plus difficile et la plus imparfaite du calcul intégral. Cette belle analyse est surtout caractérisée par le soin qu'on y prend constamment de chercher directement l'intégrale convenable à la question thermologique, sans la déduire de celle qui présente la plus grande généralité abstraite, et dont la formation serait presque toujours impossible. Les conditions subsidiaires relatives, soit à l'état primitif du système, soit à l'état permanent de la surface, y ont introduit la considération indispensable des fonctions discontinues, dont

la théorie, maintenant si satisfaisante, était jusque alors à peine ébauchée dans ses premiers rudiments. Les théorèmes généraux sur la transformation de ces fonctions en séries trigonométriques, procédant selon les sinus ou les cosinus des multiples indéfinis de la variable, ou en intégrales définies équivalentes, ont notablement agrandi le domaine fondamental de l'analyse mathématique, indépendamment de leur destination directe pour la thermologie. J'ai déjà noté, dans le premier volume, comment la géométrie pouvait les employer à compléter la représentation analytique de toutes les figures, en l'étendant à des portions limitées des lieux géométriques ou à des assemblages quelconques des diverses formes, ce qui était d'ailleurs nécessaire à la thermologie mathématique, afin d'y pouvoir étudier la propagation de la chaleur dans les polyèdres. Mais la manière dont Fourier a dirigé l'usage de ses procédés analytiques n'est peut-être pas moins remarquable, sous le point de vue philosophique, que l'invention même de tels moyens. Non-seulement il s'est toujours scrupuleusement attaché, dans tous les cas importants, à obtenir finalement des formules claires, simples et facilement évaluables en nombres, comme on devrait le faire à l'égard de questions quelconques ; mais il les a, en géné-

ral, tellement composées qu'elles dévoilent, au premier aspect, la marche essentielle du phénomène proposé, leurs différens termes exprimant sans cesse des états thermologiques élémentaires et distincts, qui se superposent continuellement, ainsi que l'exploration directe le ferait apercevoir, si elle était praticable avec un tel degré de précision.

Sous le point de vue purement analytique, les problèmes thermologiques offrent, par leur nature, une analogie fondamentale avec ceux que fait naître l'étude du mouvement des fluides. Il s'agit, de part et d'autre, de fonctions de quatre variables indépendantes, assujetties à des équations aux différences partielles du second ordre, dont la composition est habituellement semblable. La parité s'étend même, à beaucoup d'égards, aux conditions auxiliaires. Celles relatives aux températures primitives des diverses molécules, sont remplacées, dans les problèmes hydrodynamiques, par les vitesses initiales des différens points. De même, le maintien constant de la surface du fluide à un degré donné de pression extérieure, représente l'état permanent de l'enveloppe du solide échauffé à une température déterminée, indépendante de la propagation interne. Il y a toutefois, sous ce dernier rapport, une différence essentielle entre les deux cas, puis-

que, dans le problème thermologique, la forme de la surface demeure invariable pendant toute la durée du phénomène, tandis qu'elle change, dans la question hydrodynamique, à mesure que le phénomène s'accomplit, ce qui doit augmenter nécessairement les difficultés analytiques. Mais, quoique les deux analyses ne puissent pas, sans doute, être envisagées comme exactement identiques, leurs analogies naturelles n'en sont pas moins évidemment assez profondes pour que les progrès généraux de l'une, deviennent immédiatement applicables au perfectionnement de l'autre, ainsi que Fourier l'a annoncé. On doit donc compter que, lorsque l'ensemble de la doctrine de Fourier sera plus connu et mieux apprécié, les géomètres en feront un usage très étendu et fort important dans l'exploration analytique des mouvemens des fluides, comme Coran-
cez l'a déjà tenté.

En considérant sous un aspect philosophique l'esprit général de cette analyse thermologique, elle m'a semblé comporter un perfectionnement fondamental, que je dois ici indiquer sommairement aux géomètres susceptibles de le comprendre et de l'utiliser. Il consisterait essentiellement dans l'application du calcul des variations à la thermologie, jusqu'ici tout-à-fait privée de cette

précieuse méthode. Partout où une grandeur quelconque reçoit deux sortes d'accroissemens, non-seulement divers et indépendans, mais aussi radicalement hétérogènes, la conception des *variations* peut être introduite, et présente constamment la propriété essentielle d'améliorer, dans ses élémens, l'expression analytique des phénomènes, en distinguant mieux, par le calcul même, les causes naturellement différentes. C'est ainsi que Lagrange a si heureusement transporté cette conception dans l'analyse mécanique, où elle empêche de confondre désormais les différentiations purement géométriques avec celles dont le caractère est vraiment dynamique. Or, la thermologie me paraît comporter une telle application, tout aussi naturellement que la mécanique. Car on y considère toujours évidemment, à l'égard des températures, deux ordres bien tranchés de changemens généraux : ceux qu'éprouve, aux diverses époques du phénomène, la température d'une même molécule, et ceux qui se manifestent en un même instant, en passant d'un point à un autre. Deux points de vue différentiels aussi distincts, jusqu'ici sans cesse confondus dans les équations thermologiques, pourraient y être habituellement séparés avec facilité en appliquant à l'un d'eux l'algorithme spécial des variations, qui con-

viendrait surtout au second. Un tel perfectionnement ne se bornerait pas à l'amélioration des notations fondamentales, ce qui d'ailleurs aurait déjà, pour tout analyste, une extrême importance. Mais je ne doute pas, en outre, que l'emploi judicieux des transformations générales enseignées par le calcul des variations pour isoler les deux caractéristiques, ne contribuât beaucoup à simplifier l'ensemble de la solution analytique, en même temps qu'à l'éclaircir, et à la mettre mieux en harmonie avec la marche du phénomène thermologique. La nature et l'étendue de mes travaux propres ne me laissant guère l'espoir de suivre jamais cette pensée d'une manière convenablement spéciale, j'ai dû la livrer immédiatement aux géomètres qui seraient disposés à profiter d'une telle ouverture.

Après avoir suffisamment caractérisé sous ses principaux aspects la théorie mathématique de la propagation graduelle et continue de la chaleur ou du froid dans les corps solides, il resterait à analyser philosophiquement la doctrine générale de Fourier en ce qui concerne l'étude de la chaleur rayonnante. Mais cette opération ne pourrait s'effectuer clairement qu'à l'aide de développemens très étendus qui seraient ici déplacés. D'ailleurs, les considérations précédentes, relatives à la question la