

plus importante et la plus difficile, font assez concevoir comment les phénomènes thermologiques ont pu être irrévocablement ramenés à des lois mathématiques, ce qui devait être, dans cet ouvrage, mon seul but essentiel. Je me bornerai donc, quant à l'analyse du rayonnement, à signaler ici son résultat général le plus remarquable, qui consiste dans l'explication rationnelle du mode suivant lequel varie l'intensité du rayonnement d'après sa direction.

J'ai déjà noté à ce sujet, dans la leçon précédente, comment M. Leslie avait découvert, par une expérimentation ingénieuse, la variation continuelle de cette intensité proportionnellement aux sinus des angles que forment les rayons, soit émergens, soit incidens, avec la surface correspondante. Or, Fourier a pleinement démontré que cette loi est indispensable à l'établissement ou au maintien de l'équilibre thermométrique entre deux corps quelconques. Une molécule placée arbitrairement dans l'intérieur d'une enceinte très étendue, dont toutes les parties sont exactement à une même température constante, prend toujours, au bout d'un certain temps, cette température commune, et la conserve indéfiniment quand elle l'a une fois acquise : c'est ce qu'indiquent clairement les observations les plus vulgaires. Il est d'abord aisé

de prouver qu'un tel résultat ne saurait avoir lieu si toutes les parties de l'enceinte rayonnaient sur la molécule avec la même énergie, abstraction faite de l'inégalité des distances : la chaleur émise perpendiculairement à la surface de l'enceinte ne peut donc avoir la même intensité que celle qui en émane suivant des directions plus ou moins obliques. Les considérations employées par Fourier montrent ensuite, d'après une analyse plus approfondie, que cette température commune n'existerait pas davantage si l'on faisait varier l'intensité du rayonnement suivant toute autre loi que celle du sinus de l'obliquité : l'état thermométrique de la molécule dépendrait alors de sa situation, et pourrait présenter les différences les plus absurdes d'une position à l'autre, au point d'être, en certains cas, très supérieur ou très inférieur à l'état général et permanent de l'enceinte. La démonstration est simple, quand on a seulement égard à la chaleur directement envoyée à la molécule par chaque élément de l'enceinte ; mais elle se complique beaucoup lorsqu'on vient à considérer, comme l'exige une analyse complète, celle qui peut en provenir aussi après un nombre quelconque de réflexions successives. Enfin, il suffit de remplacer la molécule proposée par un corps de dimensions sensibles, pour étendre le même raisonnement mathéma-

tique à la partie de la loi empirique de M. Leslie, qui concerne la chaleur reçue au lieu de la chaleur émise. Ainsi, ce beau travail de Fourier rattache directement au simple fait général et vulgaire de l'équilibre thermométrique cette loi remarquable, base principale de la théorie du rayonnement, et que les expériences des physiciens ne pouvaient sans doute établir que d'une manière seulement approximative. Cette démonstration difficile constitue certainement une des plus heureuses applications de l'analyse mathématique aux études physiques, envisagées sous un point de vue spécial.

D'après le plan général établi dans les prolégomènes de cet ouvrage, la philosophie naturelle, conçue abstraitement, doit être le seul sujet de notre examen habituel, et nous avons dû nous interdire d'y comprendre, d'ordinaire, les considérations concrètes relatives à l'ensemble de l'histoire naturelle proprement dite, le système des sciences secondaires ne pouvant être qu'une dérivation de celui des sciences fondamentales (voyez la deuxième leçon). Je ne saurais donc envisager ici, avec toutes les indications spéciales qu'exigerait son exacte appréciation philosophique, l'importante théorie des températures terrestres, qui constitue cependant l'application la plus essen-

tielle et en même temps la plus difficile de la thermologie mathématique. Toutefois, je ne puis m'empêcher de signaler sommairement une partie aussi neuve et aussi intéressante de la doctrine générale créée par Fourier.

La température propre à chaque point de notre globe est essentiellement due, abstraction faite des influences purement locales ou accidentelles, à l'action diversement combinée de trois causes générales et permanentes : 1° la chaleur solaire, affectant inégalement les différens lieux, et partout assujettie à des variations périodiques; 2° la chaleur intérieure propre à la terre dès l'origine de sa formation à l'état de planète distincte; 3° enfin, l'état thermométrique général de l'espace occupé par le monde dont nous faisons partie. La seconde cause agit seule directement sur tous les points de la masse terrestre; l'influence des deux autres est immédiatement limitée à la seule surface extérieure. Elles sont, d'ailleurs, énumérées ici dans l'ordre effectif suivant lequel elles ont pu nous être successivement dévoilées, c'est-à-dire d'après leur participation plus ou moins étendue et plus ou moins évidente à la production des phénomènes thermologiques de la surface, les seuls complètement observables.

Avant Fourier, ces phénomènes étaient regar-

dés, par l'ensemble des physiciens et des naturalistes, comme devant être uniquement attribués à l'action solaire, tant leur analyse avait été jusque alors vague et superficielle. L'opinion d'une chaleur centrale était à la vérité très ancienne; mais cette hypothèse, arbitrairement rejetée par les uns, tandis que les autres l'admettaient d'une manière non moins hasardée, n'avait réellement aucune consistance scientifique, la discussion n'ayant jamais porté sur la part que cette chaleur originaire pouvait avoir aux variations thermologiques de la surface. La théorie mathématique de Fourier lui a montré clairement que, à cette surface, les températures différeraient extrêmement de ce que nous observons, soit quant à leur valeur, soit surtout quant à leur comparaison générale, si la masse terrestre n'était point partout pénétrée d'une chaleur propre et primitive, indépendante de l'action du soleil, et qui tend à se perdre, à travers l'enveloppe, par son rayonnement vers les autres astres, quoique l'atmosphère doive ralentir beaucoup cette déperdition naturelle. Cette chaleur originaire contribue directement très peu aux températures superficielles effectives; mais elle empêche que leurs variations périodiques suivent d'autres lois que celles qui doivent résulter de l'influence solaire,

laquelle, sans cela, se perdrait, en majeure partie, dans la masse totale du globe. En considérant les points intérieurs, même très près de l'enveloppe, et à une distance d'ailleurs d'autant moindre qu'ils sont plus rapprochés de l'équateur, la chaleur centrale devient prépondérante, et bientôt c'est elle qui règle exclusivement les températures correspondantes, dont la fixité rigoureuse, et l'accroissement graduel à mesure que la profondeur augmente, ont tant attiré dans ces derniers temps l'attention des observateurs.

Quant à la troisième cause générale des températures terrestres, personne, jusqu'à Fourier, n'en avait seulement conçu la pensée. Et néanmoins, comme cet illustre philosophe avait coutume de l'indiquer à ceux qu'il honorait de ses entretiens familiers, si, quand la terre a quitté une partie quelconque de son orbite, elle y laissait un thermomètre, cet instrument, supposé soustrait à l'action solaire, ne pourrait sans doute baisser indéfiniment; la liqueur s'arrêterait nécessairement à un certain point, qui indiquerait la température de l'espace où nous circulons. Cette ingénieuse supposition n'est que l'énoncé le plus simple et le plus frappant du résultat général des travaux de Fourier à ce sujet, qui ont clairement établi que la marche effective des températures à

la surface de notre globe serait totalement inexplicable, même en ayant égard à la chaleur intérieure, si l'espace ambiant n'avait point une température propre et déterminée, qui doit très peu différer de celle qu'on observerait réellement aux deux pôles de la terre, quoique son évaluation véritable présente jusqu'ici quelque incertitude. Il est remarquable que, des deux causes thermologiques nouvelles découvertes par Fourier, la première soit susceptible d'être directement mesurée à l'équateur, à quelques centimètres de la surface, et la seconde aux pôles; tandis que, sur tous les points intermédiaires, l'observation a besoin d'être dirigée et interprétée par une analyse mathématique approfondie pour qu'on puisse démêler, dans ses indications totales, l'influence propre à chacune des trois actions fondamentales.

Le grand problème des températures terrestres étant ainsi défini quant à ses élémens généraux, sa solution mathématique constitue l'application la plus difficile de la thermologie analytique. Il s'agit alors d'analyser exactement la marche des températures dans une sphère donnée, dont l'état initial est exprimé par une fonction déterminée, mais inconnue, des coordonnées d'une molécule quelconque, et dont la surface, en même temps qu'elle rayonne vers un milieu qu'on doit sup-

poser à une température constante, d'ailleurs ignorée, reçoit continuellement l'influence d'une cause thermologique variable, exprimée par une fonction périodique très complexe, quoique donnée, du temps écoulé : il faut encore avoir égard à l'enveloppe gazeuse dont cette sphère est entourée, et qui doit sensiblement modifier le mouvement naturel de la chaleur à sa surface. L'extrême complication d'un tel problème, et notre ignorance nécessaire à l'égard de l'une des conditions essentielles, ne sauraient permettre d'en obtenir une solution rationnelle vraiment complète, quoiqu'on puisse le simplifier en regardant la température initiale de chaque molécule intérieure comme dépendant seulement de sa distance au centre. Toutefois, l'état thermologique de la surface ou des couches qui l'avoisinent devant constituer ici la plus intéressante partie de la recherche, il a été possible, en dirigeant judicieusement tous les efforts vers ce seul but, de parvenir, sous ce rapport, à des résultats très satisfaisans, essentiellement dégagés de toute hypothèse précaire sur la loi relative à la chaleur intérieure, envers laquelle Fourier s'est toujours sagement abstenu de prononcer. La marche générale des températures superficielles est désormais nettement caractérisée dans ses variations prin-

cipales, soit diurnes, soit annuelles; nous connaissons le mode suivant lequel y participe chacune des trois causes thermologiques; enfin, nous apprécions convenablement l'influence essentielle de l'atmosphère, qui, par une alternative périodique, échauffe et refroidit tour à tour la surface, et contribue ainsi à la régularité des phénomènes. Quoique cette étude difficile soit encore si près de sa naissance, ses progrès principaux, relativement à ce que nous pouvons espérer d'en connaître d'une manière positive, ne dépendent essentiellement désormais que du perfectionnement des observations, dont la belle théorie de Fourier a d'ailleurs nettement tracé le plan le plus rationnel. Quand les données indispensables du problème seront ainsi mieux connues, cette théorie permettra de remonter avec certitude à quelques indications précises sur l'ancien état thermologique de notre globe, aussi bien que sur ses modifications futures. Mais, dès aujourd'hui, nous avons obtenu par là un résultat définitif d'une haute importance philosophique, en reconnaissant que l'état périodique de la surface est maintenant devenu essentiellement fixe, et ne peut éprouver que d'imperceptibles variations par le refroidissement continu de la masse intérieure dans la suite des siècles postérieurs. Ce résumé rapide, quelque im-

parfait qu'il soit, montre clairement quelle admirable consistance scientifique a pris tout à coup, par les seuls travaux d'un homme de génie, cette branche fondamentale de l'histoire naturelle du globe terrestre, qui, jusqu'à Fourier, ne se composait que d'opinions vagues et arbitraires, entremêlées de quelques observations incomplètes et incohérentes, d'où ne pouvait résulter aucune exacte notion générale.

Tels sont, en aperçu, les principaux caractères scientifiques de la thermologie mathématique créée par le génie du grand Fourier. Beaucoup de géomètres contemporains se sont déjà empressés de parcourir cette nouvelle carrière ouverte à l'esprit mathématique, mais sans ajouter réellement jusqu'ici rien de vraiment capital aux résultats des travaux de Fourier. On doit même dire que la plupart d'entre eux n'ont vu essentiellement encore, en de telles recherches, qu'un nouveau champ d'exercices analytiques, où l'on pouvait aisément obtenir une célébrité momentanée, en modifiant, d'une manière plus ou moins intéressante, les cas traités par l'illustre fondateur. Ces travaux secondaires n'indiquent pas, le plus souvent, ce sentiment profond de la vraie philosophie mathématique, dont Fourier fut peut-être plus éminemment pénétré qu'aucun autre grand

géomètre, et qui consiste surtout dans la relation intime et continue de l'abstrait au concret, comme je me suis tant efforcé de l'établir nettement. On a vu, par exemple, un géomètre, aujourd'hui très renommé, attacher une puérile importance à reprendre l'équation fondamentale de la propagation de la chaleur, en y concevant variable, d'un point à un autre, la perméabilité, que Fourier avait supposée constante, mais en continuant d'ailleurs à l'y regarder comme identique en tous sens. Néanmoins, dans cet ensemble, déjà très étendu, de recherches analytiques sur la thermologie, il faut distinguer les travaux de M. Duhamel, les seuls dignes jusqu'ici d'être remarqués comme ajoutant réellement quelque chose à la théorie fondamentale de Fourier, en cherchant à perfectionner la représentation analytique des phénomènes effectifs. J'indiquerai surtout l'heureuse conception de ce géomètre sur la perméabilité.

M. Duhamel a senti qu'il serait illusoire de faire varier cette propriété dans les différens points d'un corps, si, pour chaque molécule, on la laissait égale en tous sens, ses modifications réelles devant être, évidemment, bien plus prononcées selon les directions que suivant les lieux. Il a donc reformé l'équation générale de la thermologie, en y regardant la perméabilité comme assu-

jettée à ces deux ordres simultanés de variations. Son analyse l'a conduit à découvrir un théorème général très remarquable sur les relations fixes des diverses perméabilités d'une même molécule quelconque dans toutes les directions différentes. Ce théorème est relatif au cas où la perméabilité serait la même en tous les points du corps, et varierait seulement, pour chacun d'eux, suivant les directions. Il consiste en ce que, dans une telle hypothèse, il existe toujours, pour une masse quelconque, trois directions rectangulaires déterminées, que M. Duhamel a judicieusement nommées *axes principaux de conductibilité*, et selon lesquelles le flux de chaleur a la même valeur que si la conductibilité était constante : le flux est un *maximum* relativement à l'un de ces axes, et varie, en tout autre sens, proportionnellement au cosinus de l'angle correspondant. Ces axes thermologiques offrent, en général, par l'ensemble de leurs propriétés, une analogie intéressante et soutenue avec les axes dynamiques découverts par Euler dans la théorie des rotations : il est digne de remarque que les uns et les autres soient caractérisés par les mêmes conditions analytiques, comme l'a montré M. Duhamel. Leur considération présente surtout la même importance pour faciliter l'étude analytique du phéno-

mène, puisque, en y rapportant les coordonnées, M. Duhamel est parvenu à rendre l'équation fondamentale aussi simple, dans le cas de la perméabilité variable, que Fourier l'avait établie pour la conductibilité constante, avec cette seule différence que les trois termes du second ordre n'y ont plus des coefficients égaux. Cette intéressante découverte, envisagée sous le point de vue philosophique, complète, d'une manière remarquable, l'harmonie fondamentale, déjà signalée à tant d'autres égards par Fourier, entre l'analyse thermologique et l'analyse dynamique. Son utilité effective est, toutefois, notablement diminuée par la nature essentiellement hypothétique de la constitution thermologique correspondante : car, le théorème cesse nécessairement d'avoir lieu lorsqu'on vient à envisager la perméabilité comme variable, non-seulement selon les directions, mais aussi suivant les points, ce qui est, néanmoins, sans doute, le cas réel, à l'égard duquel M. Duhamel a d'ailleurs établi ensuite l'équation différentielle complète du phénomène.

On n'a point encore tenté d'examiner les modifications que devrait éprouver la thermologie mathématique, en tenant compte des changemens que l'accomplissement du phénomène peut intro-

duire, à ses diverses époques, dans la perméabilité propre à chaque molécule et à chaque direction : il en est ainsi des altérations analogues de la chaleur spécifique. Aucune de ces propriétés, et surtout la dernière, ne saurait cependant être envisagée comme rigoureusement invariable à toutes les températures, conformément à ce que j'ai indiqué dans la leçon précédente. Leurs inégalités doivent, sans doute, exercer une influence réelle sur tous les cas qui comportent des changemens de température très étendus. Il serait difficile d'y avoir égard sans compliquer beaucoup les équations thermologiques fondamentales, dont l'intégration deviendrait alors peut-être entièrement inextricable, comme on le voit ordinairement dans l'étude analytique des phénomènes physiques quelconques, même les plus simples, quand on veut trop rapprocher l'état abstrait de l'état concret. Ces modifications sont même celles qui, par leur nature, compliqueraient le plus les difficultés fondamentales du problème thermologique, envisagé sous le point de vue analytique; car, en y ayant égard, l'équation différentielle de la propagation de la chaleur, cesserait nécessairement d'être *linéaire*, et par conséquent échapperait dès lors à toutes les méthodes d'intégration employées jusqu'ici, toujours