

LÍNEA DE CALIFORNIA.

En esta línea, no habiendo tomado directamente los ángulos de las líneas de monumento á monumento, se comenzó por deducirlos con los elementos que hemos dado atrás, calculando primero las ordenadas respecto á la línea del Monumento 207 (VI) al antiguo de la confluencia.

Los azimutes observados en los Monumentos VI y IV concordando bastante bien, según se puede ver en los datos arriba dados, no se creyó necesario modificar los ángulos observados. Teniendo ya los ángulos de las líneas de monumento á monumento y el azimut de una de estas líneas, se procedió exactamente lo mismo que en la línea de Sonora.

Dijimos que se había juzgado lo más conveniente al ajustar las latitudes, longitudes y azimutes observados, conservar estos dos últimos elementos, adoptando el valor de la diferencia de latitud que de ellos resulta. En efecto, si se hubiesen adoptado las latitudes y los azimutes, la diferencia de longitudes deducida de estas difiere de la astronómica $13''$ próximamente; con la longitud y latitud astronómica el azimut deducido difiere, como puede verse por los resultados que hemos dado más de $1'$, mientras que con la longitud y el azimut, la diferencia de latitudes deducida difiere de las astronómicas sólo $4''$, lo que es muy explicable por las desviaciones de la vertical; además, la distancia obtenida de este modo difiere de la medida directa en menos de $1/3000$.

Podría también haberse hecho el ajuste, modificando á la vez los tres elementos, pero no hay nada que nos indique la proporción en que deben modificarse.

Con las diferencias de latitud y de longitud de los monumentos consecutivos y los azimutes de las líneas que los unen, apoyándose en las latitudes medias que más adelante se encuentran, se formaron las tablas de las páginas 109 y 110, de la Memoria Internacional, tomando antes el promedio de nuestros resultados con los de la Sección Americana.

Una vez teniendo las posiciones relativas de todos los puntos que definen la línea, no faltaba más que combinar las posiciones astronómicas para tener su posición absoluta y poderlos situar en las cartas.

Habiendo sido ajustados los resultados de los trazos á la diferencia de longitudes astronómicas, es claro que basta tener la longitud de uno cualquiera de esos puntos para tener las de todos los demás; pero no sucede lo mismo con las latitudes, pues con cada latitud observada se obtiene para cada punto un resultado diferente. Por esto se convino en adoptar, para latitud de cada estación, el promedio de los resultados obtenidos con las latitudes de todas las demás estaciones y las diferencias correspondientes de latitud deducidas por el trazo. Á este valor se ha llamado latitud media.

Esto no quiere decir por supuesto, que se consideren las latitudes medias como los valores más probables de la latitud de un punto. Se han adoptado para la situación de los puntos en las cartas, porque no se tenía motivo que indujera á adoptar de preferencia, alguna de las latitudes observadas como punto de partida para deducir las otras, y como la manera de conseguir que las latitudes de los puntos en la carta difiriesen lo menos posible de las latitudes observadas.

Á continuación damos una tabla que indica la manera como se obtuvieron las latitudes medias con las astronómicas y las diferencias de latitud deducidas del trazo.



CAMPAMENTO DE LA SECCIÓN MEXICANA EN AGUA CALIENTE, EN EL RÍO DE TLUANA.

NO 37

Puntos.	Dif ^a de Latitud con Monumento 53.	Latitud Astronómica A	Latitudes que resultan para Monumento 53.	Latitudes Medias G	G - A
Monumento I.....	27 01.89	31 46 59.40	31 19 57.51	31 46 61.35	1.95 +
Est. Ast. 2 (Mex.)....	01.47	60.88	59.41	60.95	0.07 +
Monumento 15.....	1.06	60.34	59.28	60.54	0.26 +
„ 21.....	1.14	58.85	57.71	60.62	1.77 +
„ 26.....	1.08	58.08	57.00	60.56	2.48 +
„ 40.....	1.11	59.70	58.59	60.59	0.89 +
„ 53.....	0.00	61.79	61.79	31 19 59.48	2.31 -
Est. Ast. 6 (E. U.)....	- 0.21	57.94	58.15	59.27	1.33 +
Monumento 64.....	- 0.09	62.60	62.69	59.39	3.21 -
„ 67.....	- 3.96	56.86	60.82	55.52	1.34 -
„ 77.....	2.03	58.99	56.96	61.51	2.52 +
Est. Ast. Mex. 7*....	1.37	59.65	58.28	60.85	1.50 +
„ „ 9 (E. U.)....	3.41	66.07	62.66	62.89	3.18 -
Monumento 98.....	2.65	63.02	60.37	62.13	0.89 -
„ 111.....	- 1.65	57.58	59.23	57.83	0.25 +
„ 122.....	- 2.45	60.75	63.20	57.03	3.73 -
„ 204.....	69 02.69	32 29 01.00	58.31	32 29 02.16	1.16 +
Yuma.....	83 36.38	32 43 34.69	58.31	32 43 35.85	1.16 +
Monumento 258.....	72 01.53	32 32 01.34	59.81	32 32 01.01	0.33 -
		Promedio =	31 19 59.48	Suma =	+14.98
					-14.99
					0.01 -

*La latitud correspondiente al punto Est. Ast. 7. Mex. corresponde á la mojonera que el Sr. Valle había tomado como Monumento XX.

El modo de formar la tabla anterior hasta la columna 4 no necesita explicación; una vez obtenida la latitud media del Monumento 53 (XI), se obtienen las de los demás, tomando algebraicamente la diferencia entre dicha latitud y las cantidades de la columna 2.

La última columna de la tabla contiene la diferencia entre la latitud media y la astronómica, lo que se ha llamado error de estación, y dicha cantidad da idea de las desviaciones de la vertical á lo largo de la línea. La diferencia entre los errores de estación de dos puntos da la diferencia entre las desviaciones que en ellos sufre la vertical y como se ve en la tabla anterior las mayores diferencias se encuentran en la parte comprendida entre los Monumentos 53 al 122, esto es en la parte más montañosa de la línea.

Tomando como punto de partida las latitudes medias de la tabla anterior, se calcularon valiéndose de las diferencias de latitud obtenidas por el trazo, las tablas de las páginas 107 á 110 de la Memoria Internacional. En las líneas azimutales de Sonora y de California se pusieron únicamente las latitudes medias de los monumentos antiguos existentes. Lo mismo habría bastado en rigor en los paralelos atendiendo á la manera como los nuevos monumentos fueron intercalados entre los antiguos.

NOTA SOBRE LAS FÓRMULAS PARA CALCULAR LAS DIFERENCIAS DE POSICIONES GEOGRÁFICAS.

Las fórmulas empleadas para el cálculo de las diferencias de posición geográfica entre dos puntos, conocidos su distancia y el azimut de uno de ellos tomado desde el otro, son las siguientes:

Sean: φ y L la latitud y longitud del punto A.
 " φ' " L' " " " " " B.
 K la distancia de A á B; y
 U el azimut de B en A contado de N. á O.

Se tiene:

$$\varphi' - \varphi = B. K. \cos U - C. K.^2 \sin^2 U - B. K. \cos U. E. K.^2 \sin^2 U - (\Delta \varphi)^2 D$$

$$L' - L = \frac{K. A. \sin U}{\cos \varphi'}$$

$$U = 180 + U + \frac{(L' - L). \sin \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}$$

$$\text{En las que: } A = \frac{1}{N. \sin^2 \varphi}; \quad B = \frac{1}{\rho. \sin^2 \varphi};$$

$$C = \frac{0.5}{\rho. N. \sin^2 \varphi}; \quad E = \frac{1 + 3 \tan^2 \varphi}{6. N^2}$$

$$D = \frac{\frac{3}{2} e. \sin \varphi. \cos \varphi}{1 - e^2. \sin^2 \varphi}$$

$(\Delta \varphi)$ es el valor de $\varphi' - \varphi$ calculado con los tres primeros términos.

Las cantidades A, B, D. dependen de la latitud y se las encuentra tabuladas de 1' en 1' en el Apéndice á la Memoria del *Coast and Geodetic Survey*, correspondiente á 1884. Las constantes del elipsoide empleadas en dicha obra, son las de Clarke.

Las fórmulas anteriores se encuentran desarrolladas en la obra antes citada, y son semejantes á las que da el Sr. Díaz en las páginas 140 y 144 de su tratado de Geodesia y Astronomía Práctica; la diferencia consiste solamente en la introducción del término $(\Delta \varphi)^2 D$ para reducir el valor obtenido con los otros tres términos á lo que sería si se hubiese empleado el valor del radio de curvatura correspondiente á la latitud media en lugar de emplear los valores de B, C y E correspondientes á dicha latitud, que es el camino que sigue el Sr. Díaz.

Hemos preferido el empleo de las fórmulas dadas arriba porque son más rigurosas que las que da el Sr. Díaz y aunque en líneas cortas sea indiferente el empleo de una ú otra, no sucede lo mismo en tratándose de líneas tan extensas como las de Sonora y California.

Para resolver el caso inverso, es decir determinar la distancia entre dos puntos y el azimut de uno de ellos en el otro partiendo de sus posiciones astronómicas, se ha seguido el procedimiento que sigue el mismo Sr. Díaz en la obra ya citada en el capítulo sobre el trazo de líneas extensas, y que consiste en calcular por medio de las posiciones dadas los valores de $K. \sin U$ y $K. \cos U$, deduciendo en seguida de éstos los valores de K y de U; pero atendiendo á la extensión de las líneas, no se limitó la aproximación al segundo término de la fórmula sino que se calculó también el tercero, sirviéndose de valores aproximados de K y de U, y el cuarto término con el valor de $(\varphi' - \varphi)$. Además en el cálculo de $k. \sin U$ se empleó la fórmula:

$$\sin(L' - L) = \frac{\sin(AK). \sin U}{\cos \varphi'}$$

más rigurosa que la dada arriba, la que no es mas que una aproximación de ésta; al efecto se dió la forma:

$$\frac{(L' - L) \sin(L' - L)}{L' - L} = \frac{\sin(AK) \left(\frac{\sin(AK)}{AK} \right) \sin U}{\cos \varphi'}$$

El logaritmo de $\left(\frac{\sin AK}{AK} \right)$ se puede calcular con valores aproximados de K pues varía muy poco. Importante es y mucho en este cálculo tener cuidado de tomar el valor de A correspondiente á la latitud y no al promedio de φ y φ' , pues si se tomase éste podrían obtenerse errores sensibles.

Para cerciorarnos de la exactitud de los resultados obtenidos de la manera que acaba de indicarse, hemos empleado otras fórmulas deducidas siguiendo un camino enteramente distinto y de las que vamos á dar una idea.

Sea c la cuerda que une los puntos A y B, R_o el radio de curvatura medio de la sección en el elipsoide del plano normal en A y que pasa por B. Se tendrá evidentemente:

$$K = c + \frac{c^3}{24 R_o^2}$$

En efecto si llamamos R_a el radio de curvatura de la sección en A, y R_b el mismo en B, se tendrá que K está comprendido entre

$$c + \frac{c^3}{24 R_a^2} \quad c + \frac{c^3}{24 R_b^2}$$

y tomando el promedio R_o de R_a y R_b se tendrá un valor de K que difiera del verdadero menos de la diferencia entre los dos últimos términos. Para ver hasta donde puede llegar el error que se cometa de esta manera, basta considerar que aun en la más exétrica de todas las secciones normales al elipsoide como una sección meridiana, la diferencia entre dos valores de R correspondientes á dos puntos distantes 3 grados no pasa de $\frac{1}{1800}$ del valor de R; ahora bien $\frac{1}{1800}$ en R produce en K un error para $K = 300000$ de menos de 0,04m. Para calcular la cuerda c se siguió el procedimiento que vamos á indicar. Tomemos por plano de las xy el plano meridiano del punto A y por eje de las z la línea de los polos; tendremos entonces llamando α el ángulo que hace la proyección de c sobre el plano de las xy con el eje de las y , y d la longitud de la proyección

$$\tan \alpha = \frac{x' - x}{y'}; \quad d = \frac{y'}{\cos \alpha}$$

y llamando β el ángulo de la cuerda con el plano de las xy

$$\tan \beta = \frac{z' - z}{d}; \quad c = \frac{d}{\cos \beta}$$

encontramos sustituyendo por $x, z, \acute{e} y$, sus valores en función de φ y de la normal

$$\tan \alpha = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') \sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') - 2 \cos \varphi' \sin^2 \frac{1}{2} L - \frac{dN}{N \cos \varphi}}{\cos \varphi' \sin L}$$

$$\tan \beta = \frac{2N'(1 - e^2) \sin \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) \cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) - dN(1 - e^2) \sin \varphi}{d}$$

$$d = \frac{N' \sin L \sin \varphi'}{\cos \beta}; \quad c = \frac{d}{\cos \beta}$$

Empleando el mismo método de las coordenadas se encuentra una fórmula adaptable fácilmente para el cálculo del azimut, pero se consigue más fácilmente aún de la manera siguiente: En la figura adjunta, se tiene:

$$\tan \frac{1}{2}(z - z') = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)} \cot \frac{1}{2}(L - L')$$

$$\tan \frac{1}{2}(z - z') = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)} \cot \frac{1}{2}(L' - L)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \varphi}{\sin z'} \sin(L' - L)$$

En las que φ_1 es el ángulo que hace con el ecuador la recta Bn tirada del punto B al pie de la normal del punto A y θ el ángulo de estas dos rectas. φ_1 se obtiene fácilmente de la manera siguiente. En la figura se tiene:

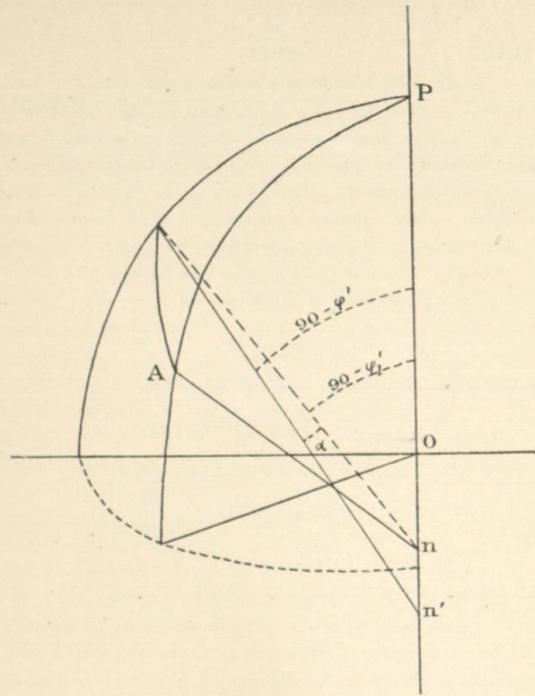
$$\varphi_1 = \varphi - a$$

$$\alpha = \frac{on' - on}{N \sin L'}$$

$$on' - on = 2N' e^2 \sin \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) \cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) + (N - N') e^2 \sin \varphi$$

Una vez obtenida θ se puede calcular fácilmente la cuerda c y deducir luego el valor de K como hemos dicho, pero hemos encontrado suficiente aún para líneas tan extensas como la de Sonora, tomar $K = N \cdot \sin \theta$. Este valor es por otra parte el que se obtiene con las fórmulas que dimos al principio.

La diferencia entre los resultados obtenidos por las fórmulas que se acaban de desarrollar, rigurosas para los azimutes y que dan las distancias como hemos visto con una aproximación mayor de la que puede obtenerse con 7 cifras logarítmicas aun para líneas tan extensas como la de Sonora, no ha pasado de 0,"4 en los azimutes y las distancias han estado de acuerdo hasta los decímetros.



WASHINGTON, D. C., Junio 5 de 1896. = Firmado = Valentín Gama.

Es copia

WASHINGTON, D. C., Octubre 17 de 1896.

JACOBO BLANCO,
Ingeniero en Jefe.

Anexo No. VI.

ESTE DOCUMENTO HA SIDO DEPOSITADO EN LOS CIMIENTOS DEL MONUMENTO
Nº 258 EL DÍA TRES DE OCTUBRE de 1894.

FUÉ LEVANTADO DICHO MONUMENTO ORIGINALMENTE POR LOS SEÑORES PEDRO GARCÍA CONDE Y JOSÉ SALAZAR ILARREGUI POR PARTE DE MÉXICO EL 10 DE OCTUBRE DE 1849 Y POR EL SR. MAYOR W. H. EMORY COMO COMISIONADO AMERICANO. FUÉ LABRADO Y LEVANTADO DE NUEVO BAJO LA DIRECCIÓN DE LA COMISIÓN INTERNACIONAL DE LÍMITES ENTRE MÉXICO Y LOS ESTADOS UNIDOS, LA CUAL HA RESTABLECIDO LA LÍNEA DIVISORIA DEL RÍO GRANDE AL OCEANO PACÍFICO, SEGÚN LAS CONVENCIONES DE 29 DE JULIO DE 1882 Y FEBRERO 18 DE 1889, ERIGIENDO DOSCIENTOS CINCUENTA Y OCHO MONUMENTOS.

ESTE TRABAJO HA SIDO PRACTICADO POR PARTE DE MÉXICO DURANTE LA ADMINISTRACIÓN DEL Cº GRAL. PORFIRIO DÍAZ, PRESIDENTE DE LOS ESTADOS UNIDOS MEXICANOS, SIENDO MINISTRO DE FOMENTO EL SR. INGENIERO Dº MANUEL FERNÁNDEZ LEAL DE QUIEN HA DEPENDIDO DIRECTAMENTE LA COMISIÓN MEXICANA.

MIEMBROS ACTUALES DE LA COMISIÓN MEXICANA,

JACOBO BLANCOINGENIERO EN JEFE.
VALENTÍN GAMAADJUNTO ASTRÓNOMO.
GASPAR MARTÍNEZ CEBALLOS.....INGENIERO AUXILIAR.
LUIS R. SERVÍNINGENIERO AYUDANTE.
MANUEL BANCALARIINGENIERO AYUDANTE.
RODRIGO ELIZÁLDEINGENIERO AUXILIAR.

SAN DIEGO, CALIFORNIA, OCTUBRE 3 de 1894.

ES COPIA

Washington, D. C., Noviembre 2 de 1896.

JACOBO BLANCO,
INGENIERO EN JEFE.