la aritmética Máxîmo Planudes, y explicó á los griegos las reglas de contar con las cifras arábigas ó indianas; y escribieron de aquellas materias varios otros griegos, que pueden verse en Fabricio (*a*). Nosotros solo hablaremos de Manuel Moscópulo, autor de fines del siglo XIV, ó de principios del XV, no sabiendo si es el tio ó el sobrino el Moscópulo, de quien ahora hablamos, escritor de la obra aritmética de los *quadrados mágicos*, que se conserva manuscrita en la real biblioteca de Paris. A él debemos la invencion, ó á lo menos la primera noticia del *quadrado mágico*; invencion ciertamente curiosa, y tambien util á la aritmética por las varias combinaciones de números que ha hecho descubrir. Todos los números que componen un quadrado, v. g. 1, 2, 3 &c. hasta 25; si están dispuestos en progresion aritmética, forman un *quadrado natural*; pero aquel quadrado se hace *mágico*, si los números se escriben con tal orden, y se combinan con tal método, que sumándose los números de cada uno de los lados, tanto ho-

Quadrados mágicos.

(*a*) *Bibl. gr.* lib. IV, c. XXII.

horizontales y verticales, como diagonales, por cada uno resulta la misma suma. El primer autor que sepamos haber hablado de tales quadrados, llamados *mágicos*, no tanto por esta propiedad suya aritmética ó mágica, quanto por el uso que se hacia de ellos en los talismanes, es este Moscópulo en el citado códice de Paris, exâminado por la Hire, y él nos presenta, aunque solo en los números impares, dos métodos de formarlos, explicados por el mismo la Hire (*a*), y estimados justos é ingeniosos, pèro reducidos á dos casos particulares de los métodos propuestos por él en la sexta y en la décima proposicion de su primera disertacion. Estos quadrados fueron despues adoptados prácticamente; y Agripa formó quadrados de siete números, que son desde el 3 hasta el 9, para aplicarlos á los planetas. El docto aritmético Bachet de Meciriac habiendo visto los quadrados de Agripa, y no encontrando en autor alguno reglas para formarlos semejantes, propuso una pa-

(*a*) *Ac. des Sc.* an. 1705.

para los números impares (*a*), pero no supo encontrarla para los pares; y su método no es otro que el primero de los dos de Moscópulo, pero no tan sencillo. Célebre se hizo tambien en este punto de combinaciones numéricas el ingenioso Frenicle, que tanto crédito se habia adquirido con tantos otros descubrimientos aritméticos; y dió métodos para quadrados de raices pares é impares; y enseñó á variarlos de infinitas maneras que los otros no habian imaginado, y se determinó felizmente á disponerlos de modo, que algunos, aun quitado uno ó mas contornos de los lados horizontales y verticales, queden siempre mágicos, y otros al contrario dexen de ser tales, siempre que se quiera quitar uno ó mas contornos sea el que se fuese; y manifestó su ingenio y su gran pericia numeral en aumentar las circunstancias de los quadrados, y por lo mismo las dificultades, y en superarlas gloriosamente (*b*). Quando causaban estrépito en Francia los quadrados mágicos, la Lou-

(*a*) *Probl. plaisans.* (*b*) Anc. *Mêm. de l'Acad. des Sc.* l. V.

Loubere, que transmitió á la Europa tantos conocimientos de los indios, traxo tambien de ellos un método para formar los quadrados mágicos, no muy diferente del primero de Moscópulo, y dió tambien de él una ingeniosa, pero dificil demostracion (*a*). A principios de este siglo el flamenco Poignard publicó un tratado de estos quadrados, que quiso llamar *sublimes*, donde explicó muchas novedades ingeniosas y agradables. En vez de tomar todos los números de la serie de los números naturales, que llenasen un quadrado, como se habia hecho hasta entonces, toma solamente tantos números consecutivos, quantas son las casillas de cada lado; y los coloca de modo que ninguno se halle dos veces en un lado, y hagan todos los lados la misma suma. En vez de tomar los números en progresion aritmética solamente, los toma en progresion geométrica, y en armónica, y forma en todas diversas suertes de ingeniosos quadrados. Vinó finalmente la Hire, y en dos

 di-

(*a*) V. la Hire *Mêm. &c. Ac. des Sc. an.* 1705.

disertaciones leidas en la Academia de las ciencias superó mucho los descubrimientos de Frenicle, y de Poignard; propuso tantos métodos, no solo para los quadrados impares, sino tambien para los pares, é hizo de ellos tan sólidas é ingeniosas demostraciones, varió de tantos modos todos los quadrados, los adornó con tantas circunstancias, los travó con tantas dificultades, los formó con tanta facilidad, y seguridad, y dió tantas resoluciones á un problema, al qual hubiera sido bastante glorioso el encontrarle una sola, que pareció no dexar mas campo á los otros aritméticos para exercitarse en esta materia. Pero sin embargo en 1710 propuso Sauveur en la misma Academia nuevos descubrimientos para semejantes quadrados: para hacerlos mas generales los compuso no en números, sino en letras, formó quadrados por *analogía*, por *reciprocacion*, por *exceso*, y por *defecto*: los cortó no solo en contorno, sino en cruz, y de otros modos; dió formulas algebráicas para todos los que eran capaces de ellas; y no contento con tantos quadrados, hizo tambien cubos mágicos; y Fontenelle en la historia de aquel año

año se lisonjeaba de que este seria el último que hablase de una materia, que le parecia ya exhausta, y no muy importante, y de la qual, si hemos de decir la verdad, nos parece estar él ya fastidiado, como tememos que lo esten tambien nuestros lectores. Pero se engañó Fontenelle, y posteriormente en 1750 presentó d'. Ons-en-Bray otra memoria, en la qual propuso un método, no para añadir nuevas condiciones á los quadrados, y por consiguiente nuevas dificultades; sino para simplificar la resolucion del problema, dexando en pie las condiciones de que los demas lo habian cargado. Varios otros, ademas de los nombrados hasta aquí, han tratado tambien de estos quadrados; pero lo que llevamos dicho bastará para hacer ver en quanto aprecio hayan tenido los célebres aritméticos la invencion del griego Moscópulo: si esta no ha acarreado alguna sólida ventaja, ni provechoso uso á las ciencias, no ha dexado de ser útil á las mismas. El ingenio se aguza, se dilata el entendimiento, se fortifica la fantasia con tantas y tan sutiles combinaciones de números, las ciencias se aprovechan de las nue-

 vas

vas ideas que presentan estas investigaciones, y es siempre una honesta diversion, y un laudable entretenimiento el descubrir, aunque en materia tan esteril y seca, tantas nuevas, y á veces agradables verdades.

Aritméticos latinos. Aun antes que los griegos empezaron los latinos á abrazar el estudio de la aritmética. En el siglo X habia ya escrito el Español Josef un libro de la multiplicacion, y de la particion de los números, muy buscado por Gerberto (*a*), y por aquellos pocos, que entonces podian gustar de estas materias.

Gerberto. La aritmética puede tal vez decirse que fué el estudio que mas cultivó Gerberto. El habla de ella con freqüencia en sus cartas, y se muestra bastante práctico en las otras obras matemáticas; él, segun el testimonio antes citado de Guillermo de Malesbury, entre todas las adquisiciones científicas hechas en España hacia principalmente alarde de la de las reglas del abaco, y de las cuentas, y su aritmética estaba tenida en tanto aprecio, que el emperador Oton creia poder competir con el vivaz in-

(*a*) *Ep. ad Ger. Aur.*

ingenio de los griegos si llegaba á conseguir de Gerberto que le instruyese en ella. Pero ni de Gerberto, ni de los españoles sus maestros, ni de otro europeo alguno de aquellos tiempos exîste ya escrito alguno sobre la ciencia numeráica, que se haya dado á luz. El primer escritor de quien se conservan monumentos es el célebre Leonardo Fibonacci de Pisa, de quien todavia tenemos el precioso códice intitulado *Liber abaci*, tantas veces citado.

Leonardo de Pisa. Este pisano llevado á Africa por su padre hácia fines del siglo XII, empleado en una aduana, se dedicó con empeño á aprender de los árabes la aritmética indiana, que nosotros llamamos arábiga, á la qual daba la preferencia sobre la griega, sobre la romana, y sobre todas las otras; y despues de algunos años, en 1202 publicó esta obra, que puede ser tenida como magistral en aquella materia, y en la qual explica tambien la aritmética algebráica. Y no fué esta la única obra de Leonardo sobre el arte de contar, puesto que de un grueso códice en folio, exîstente en la biblioteca del hospital de santa María la Nueva de Florencia, se infiere haber él compuespuesto tambien un *Tratado sobre los números quadrados*, que se halla copiado en el libro XVI de aquel códice (a): de cuyo tratado habla tambien con mucho elogio Lucas Pacioli (b). Por grande que haya sido el mérito de Leonardo en la aritmética, y por algun respeto superior á todos los otros, sin embargo han sido conocidos mas generalmente de los matemáticos Jordan Nemorario, y Juan de Sacrobosco, autores tambien del siglo XIII. La aritmética de Jordan conservó aun su crédito entre los posteriores mas ilustrados, puesto que vemos que el docto Regiomontano, juez el mas autorizado en estas materias, queria dar á la prensa sus obras aritméticas (c), que despues en efecto publicó é ilustró Jayme Fabro sus *Elementos aritméticos*, y que Clavio y otros matemáticos hicieron uso de ellos, y los citaron con aprecio. Juan de Sacrobosco mas conocido por el tratado de la *Esfera*, escribió tambien de la aritmética, y tanto con esta obra, como con la de la esfera contribuyó mas que todos á propagar el uso de las cifras, y de la aritmética arábiga. De este modo se esparcian por todas partes las luces de aquella ciencia; los conocimientos de los números se hacian mas comunes, y se poseia mas y mas el arte de manejarlos. Lo vemos en la Toscana donde se conservó siempre viva y fecunda la doctrina de Leonardo; y á principios del siglo XIV floreció con singular crédito de saber aritmético Pablo de Dagomari, del qual dice Felipe Villani, que fué *peritísimo aritmético, y en las equaciones superó á todos los antiguos y modernos*, y Ximenez crée por varias razones (a) que sea el mismo Pablo, el que por su peridia en el arte de contar fué distinguido con el sobrenombre *del abaco*. En el siguiente siglo escribió un anónimo el grosísimo códice antes citado, intitulado *Tratado del abaco*, conservado entre los códices de dicho hospital de Florencia, donde siguiendo la doctrina de Leonardo trata copiosamente es-

Jordan Nomorario.

Juan de Sacrobosco.

Pablo del Abaco.

(a) V. Taxgioni *Viag. Tosc.* t. II. (b) *Somma* &c. distinct. I, tract. IV, art. VI. (c) Gassend. in *Vita Regiomont.* ex ejus Catálogo.

(a) *Del gnom. fior. Introd.* stam. par. II, §. 6.

esta materia (*a*); floreció un Benedicto, alabado por Verino en su *Ilustracion de Florencia* como maestro universal de contar; y finalmente Lucas Pacioli de Borgo san Sepolcro escribió la primera obra de aritmética, que se ha dado á la prensa, esto es, su *Suma de aritmética, geometría, proporciones, y proporcionalidad*, en la qual, dice Targioni (*b*), se adornó con la obra de Leonardo, y en la qual, sea de esto lo que se fuese, ciertamente reduxo á mayor brevedad las operaciones aritméticas de dicho Leonardo, de Nemorario, de Sacrobosco, y de otros maestros alabados por él mismo, y enseñó no solo las reglas aritméticas, sino tambien las algebráicas. Entonces empezó á ser conocida y estimada el álgebra, la qual era toda numérica, criada, puede decirse, para auxîlio de la aritmética, y sujeta á su servicio. Y en efecto entonces con el auxîlio y socorro del álgebra creció mucho la aritmética, y se elevó á sublimes y dificiles operaciones, á que ántes ciertamente no hubiera podido llegar. Todas las ciencias están unidas entre sí con vín-

Lucas Pacioli.

(*a*) Targ. ibi. (*b*) Ibi.

vínculos de hermandad, y no puede promoverse una sin que todas se muevan y desfruten alguna ventaja. De la cultura del álgebra sacó mucha utilidad la aritmética, y esta debe mirar á los Tartaglias, á los Cardanos, y á los otros algebrístas como sus verdaderos bienhechores. El amor á los griegos y á la antigüedad le fué tambien provechoso: buscando y estudiando á los antiguos griegos se hicieron traducciones, ilustraciones y comentos de Euclides, de Archîmedes y de Diofante; y con ellos se enriqueció de nuevas luces la aritmética. El estudio de los astros era el predilecto de los matemáticos de aquellos tiempos, como lo ha sido de casi todos, y este estudio era tambien útil á la aritmética, puesto que la vana astrología se ocupaba para sus pronósticos en grandes cálculos, y en diversas combinaciones de números, y de este modo acarreaba no pequeños adelantamientos á los conocimientos numéricos; y la verdera astronomía, necesitando á cada paso de grande inteligencia de los números, promovia mucho su estudio; y la aritmética de las fracciones decimales ha nacido, ó á lo menos crecido por el influxo de los astros

Otros escritores de aritmética.

con la cultura de los astrónomos, singularmente de Regiomontano. Y de este modo promoviendose las otras ciencias adelantaba siempre la aritmética, y crecian todas con el mutuo fomento, y con el recíproco auxîlio adquirian nuevo vigor. En efecto entonces Stifels, Pelletir, Maurolico, Clavio, Vieta y otros muchos escribieron del arte de contar con luces mas justas, y mas finas, que quantos les habian precedido.

Invencion de los logaritmos.

Pero la invencion que ha sido mas gloriosa á la aritmética, y el mayor regalo que esta ha hecho á las otras ciencias, se debe al escoces Neper, que á principios del siglo pasado, inventó los *logaritmos*, con los quales ha hecho inmortal su nombre, y ha merecido que se le coloque entre los bienhechores de las ciencias, y de la humanidad. La geometría, la mecánica, la astronomía, y todas las ciencias deben profesar á la invencion de Neper el mas grato reconocimiento. El ardor que se habia excitado en los siglos XV y XVI de adelantar en toda clase de conocimientos, no podia sujetarse á la lentitud de las operaciones aritméticas conocidas entonces, y exígia

gia métodos mas faciles, mas seguros y mas prontos: las investigaciones haciéndose mas profundas y mas finas, necesitaban de cálculos numéricos muy extensos, y estos robaban todo el tiempo que debia emplearse en llevar adelante las intentadas especulaciones. Todo estaba lleno de subtensas, de tangentes, de senos y de otras líneas, que no podian medirse con exâctitud, ni determinarse con puntualidad y con verdad sin descender á largas fracciones decimales, entrar en dificiles proporciones, engolfarse en intrincadísimas operaciones; era preciso multiplicar y partir muchos números por otros muchos, consumir mucho tiempo, sufrir molestas fatigas, y quedar sin embargo expuestos á incurrir en errores. ¿Que gracias, pues, no deberemos dar á Neper, que nos ha proporcionado el medio de evitar tantos tropiezos, y llegar al mismo fin con brevedad, seguridad y facilidad? La idea de dos líneas tiradas con diversas velocidades, variable la una, la otra uniforme, y de las relaciones, y razones que se encuentran entre aquellas líneas, hizo que le ocurriese el pensamiento de formar dos tablas de

 nú-

números en proporciones, geométrica la una, y aritmética la otra, y de substituir á las multiplicaciones y particiones de los números, por decirlo así, geométricos, la suma y la substraccion de los aritméticos, haciendo encontrar con estas el mismo número que antes debia buscarse por medio de la multiplicacion y particion de los números geométricos, y despues pensó aplicarlas á las operaciones trigonométricas. De este modo es tanto mas facil encontrar los buscados números de la multiplicacion, de la particion, de la extraccion de raices, de la formacion de potestad, y de qualquiera operacion quanto es mas facil, breve y seguro el operar por sumas y restas, que por multiplicaciones y particiones, por números baxos, como serán siempre respectivamente los aritméticos, que por altos, como los geométricos. Y no solo la aritmética obtuvo por los logaritmos expedicion y facilidad, sino tambien la geometría, y singularmente la trigonometría, y por consiguiente todas las ciencias exâctas sacan de aquella invencion grandes ventajas; y antes bien el primero y principal uso de los

los logaritmos fué buscado por Neper para las operaciones trigonométricas. Dando un arco de círculo, y aun de otras curvas de tantos grados y minutos facilmente se determinan con las tablas logaritmicas, las subtensas, los senos, las tangentes, las secantes, las areas, como tambien el arco, dado el seno &c. quando antes de tener este auxîlio se exîgian inmensas fatigas. A este fin deben tenerse muchas consideraciones en la formacion de tales tablas: es preciso buscar en cada una que principio y que progresion se deba tomar; es preciso ver á que corsesponda el cero, y que número deba darse á cada logaritmo. Por habersele escapado estas consideraciones á Neper no salió en la formacion de sus tablas con la felicidad deseada. El mismo fué el primero que conoció los inconvenientes que resultaban de aquella forma, y pensó desde luego en la correccion, dando otra á sus logaritmos, como propuso en una obra póstuma publicada por su hijo. El método propuesto por Neper fué felizmente executado por Brigio, su docto discípulo, quien en la obra intitulada *Aritmética logaritmica* publiblicó una larguísima tabla de los logaritmos de los números naturales, y empezó otra de los de los senos, y de las tangentes por todos los grados y centenas de los grados del quarto de círculo, la qual fué despues concluida y publicada por Gellibrand. El holandés Ulacq acarreó aun mas perfeccion, y dió mayor finura á la tabla de Neper y de Brigio, y siguiendo su exemplo otros muchos geómetras y aritméticos han trabajado, y todavía trabajan para construir tablas logarítmicas mas y mas exâctas y completas, de mas uso, y de mayor facilidad. Ademas de la invencion de los logaritmos debemos tambien á Neper el hallazgo de una maquinita, propuesta por

Rabdología.

él en su *Rabdología*, y que puede verse en muchos libros aritméticos, entre otros en Wolfio (*a*), con la qual, por medio de ciertas varitas, ó laminitas ingeniosamente combinadas, presenta á la vista qualquier multiplicacion, y particion sin trabajo del calculador. Esta máquina, con alguna mejora para la firmeza de las varitas, y para la distincion de los números, fué en 1730 pre-

(*a*) *Elem. ar.* c. II.

presentada por Roussain á la Academia de las ciencias (*a*). El ardor que se excitó en el siglo pasado de promover los adelantamientos de la aritmética hizo que se pensase tambien en buscar los medios de facilitar las operaciones, y enriquecer con nuevos hallazgos la aritmética instrumental. Otra máquina inventó Pascal despues de Neper de uso mas universal; pero sobrado complicada y compuesta para que pudiese ser de alguna utilidad. Otra mas simple presentó Leibnizt en 1673 á la real Sociedad de Londres, de la qual él mismo nos habla con complacencia, y refiere la aprobacion que obtuvo de Tschirnaus, de Huingens y de otros (*b*); pero que igualmente habia quedado abandonada y olvidada; bien que, como dice Dutens (*c*), fué en estos años pasados puesta nuevamente en uso por Kæstnero. Otra máquina habia inventado Moreland, de la qual dió él ya la descripcion en 1666: otras

(*a*) *Hist. de l' Acad. des Sc.* an. 1370. (*b*) *Op. Leibn.* tom. II. *Brev. descr.* &c. (*c*) *Op. Lecibn.* tom. cit. *Præf.*