otras se han presentado en este siglo á la Academia de las ciencias por l' Epine, y por Boitissendeau, y otras inventadas por otros; pero todas han sido abandonadas, y yacen llenas de polvo, é inutiles, y la aritmética instrumental jamas ha podido estar en alguna reputacion. Son muy nobles y elevadas las matemáticas para que quieran servirse de tales medios, dexan para los muchachos estos juegos de manos, y exîgen en sus adoradores intension de mente, y fuerza de imaginacion. Mas honor acarreó á Pascal la invencion de su triángulo aritmético, en el qual señalando á la punta un número á su arbitrio, se forman sucesivamente todos los números figurados, se determinan las razones que tienen entre sí los números de dos casillas, sean las que se fuesen, y las diferentes sumas que resultan por la adicion de los números de una misma fila, y despues se hacen de ellas varias aplicaciones. Al mismo tiempo que Pascal trabajaba Fermat sobre los números figurados, y descubria en ellos muchas y muy bellas propiedades, de las quales su ingenio geométrico sabia aprovecharse; se aplicaba á la contemplacion de

Pascal.

Fermat.

de los números *primeros*, esto es, de los que no pueden dividirse en otros números enteros, y encontraba en ellos muy sutiles y verdaderos teoremas, que han llamado la atencion de Eulero (*a*), de la Grange (*b*), y de otros modernos; promovia mucho la analísis numérica de Diofante, puesta antes en reputacion por Bachet de Meciriac, como diremos despues mas extensamente (*c*), y daba honor á la aritmética con su nombre, y con sus descubrimientos. Al mismo tiempo florecia en aquella ciencia Frenicle, que se distinguió singularmente por la destreza y maestría en el cálculo numérico. Los quadrados mágicos, como hemos dicho arriba, ocuparon mucho su atencion, y dexó un largo tratado de ellos, que sino contribuye á la mejora de las ciencias, ciertamente le habrá servido á él mismo para disponer su mente á toda suerte de combinaciones numéricas. Otro dió mas útil sobre los *triángulos rectángulos en números*, y otro de una *abreviacion de las* com-

Frenicle.

(*a*) *Ac. Petr. Nov. Comm.* tom. V. al.
(*b*) *Ac. de Berl.* tom. XXXI, al. (*c*) Cap. III.

combinaciones, en los quales se leen curiosas y útiles especulaciones de toda suerte de números en general, pero particularmente de los figurados. No habia en aquellos tiempos problema alguno sobre los números, de quien no se viese una resolucion de Frenicle, y esta de la mayor elegancia. Fermat y Cartesio, opuestos entresí en tantos otros puntos, solo convenian en alabar las soluciones de Frenicle, y en preferirlas muchas veces á las suyas propias: ocupados, como dice Condorcet (a), en disputarse la superioridad en los grandes objetos, daban voluntariamente á Frenicle esta prueba de justificacion, que era nada violenta á su amor propio. El *Método de las exclusiones* le daba tal facilidad para la resolucion de semejantes problemas, que tenia admirados á los aritméticos, hasta que con la impresion de este y de otros tratados suyos se vieron los caminos que él se habia abierto, y que felizmente habia seguido. Ahora han dexado de ser de moda estos problemas, y merecen poca atencion tales teorías; pero noso-

(a) *Eloq. de Frenicle.*

sotros observando que Beguelin presenta con freqüencia á la Academia de Berlin los problemas numéricos en que se habian ocupado Bachet, Fermat y Frenicle (a): oyendo resonar tan amenudo los nombres de estos aritméticos en las Academias de Petersburgo y de Berlin en las bocas de Eulero y de la Grange (b); viendo á estos dos consumados aritméticos de nuestros dias, agitar con tanto ardor y constancia las investigaciones sobre los números primeros y enteros, sobre los divisores, y sobre otros puntos semejantes (c), no podemos dexar de aplaudir las especulaciones de Frenicle, y de Fermat, y profesar grato reconocimiento á sus doctas fatigas. Quando estos, y otros célebres matemáticos se empleaban en tales teorías, otros pensaban en mudar todo el sistema de la aritmética, y formar otros enteramente diversos. Weigel observando que los

Aritmética quaternaria.

(a) Tom. XXVIII, XXXI, al. (b) *Nov. Comm. Ac. Peter.* tom. II, al; *Academ. de Berl.* t. XXIV, XXVIII, XXXI, al. (c) *Academ. Peter.* ibid. *Ac. de Berl.* tom. cit. XXVI, al.

los pitagóricos tenian en particular aprecio la *tetractys*, ó el quaternario, se imaginó que fuese esta una aritmética quaternaria, esto es, una aritmética, que solo usase el periodo de quatro, como nosotros usamos el de diez, y no tuviese mas caractéres que 1, 2, 3, 0, y creyó encontrar grandes ventajas en este modo de contar; así que quiso exponer el método, y la utilidad en dos obras sobre la *tetractys pitagórica*, publicadas hácia el año 1670. Si Weigel por una soñada imitacion de los pitagóricos intentó formar una aritmética *tetractyca*, ó quaternaria, Leibnitz con estudio para mayor comodidad en el exâmen de los números, inventó una aritmética del mas breve y simple periodo que pueda darse, qual es la *dyadica*, ó binaria, que con solos los caractéres 1 y 0, puede expresar todos los números. Estos tienen dos especies de propiedades; algunas esenciales, qual es, que los números impares puestos en serie, y sumados dan la serie natural de los quadrados; otras accidentales, que dependen de una arbitraria colocacion, qual es por exemplo, que en todos los multiplices de 9, las cifras que los expresan juntandolas dan siempre 9, ó una multiplicacion de 9, lo que proviniendo unicamente de ser 9 el penultimo número del periodo decuplo, colocado arbitrariamente, no es mas que una propiedad accidental, pero que sin embargo acarrea sus comodidades á la aritmética. Ahora pues de semejantes propiedades accidentales encontró Leibnitz mas en su aritmética binaria, que en la nuestra decimal, añadiendo ademas mayor facilidad para todas las comunes operaciones; y en 1702 dió parte de este invento suyo á la Academia de las ciencias, y en seguida de todas las ventajas que creia pudiesen resultar. Al mismo tiempo Lagny, profesor de hidrografía en Rochefort, sin tener noticia del descubrimiento de Leibnitz, para evitar algunos inconvenientes que encontraba en los logaritmos, pensó tambien en una aritmética binaria, con la qual las multiplicaciones y las particiones se hacen necesariamente por simples adiciones y substracciones, y como él dice, las multiplicaciones y las particiones son los *logaritmos naturales* (a). Dagincourt, en una me-

(a) *Hist. de l' Ac. des sc.* an. 1703.

memoria sobre esta aritmética leibnitciana, hace ver quanto mayor sea la facilidad de encontrar con ella las leyes de las progresiones, que con qualquiera otra de mas caractéres, ó de mas largo periodo (*a*). Una utilidad de la aritmética binaria, en la qual ciertamente no pensaron ni Leibnitz, ni Lagny, ni Dagincourt, que fué enviada por el mismo Leibnitz al P. Bouvet en la China, pareció oportuna para hacer entender los antiquísimos caractéres de Fohi, que eran muchos siglos habia ininteligibles á los mismos chinos, y podian con esta combinacion de números recibir alguna luz (*b*). Pero sean las que se fuesen las ventajas de estas aritméticas quaternarias y binarias, no bastan á compensar los embarazos que requeririan con la multiplicacion de caractéres, de que tendria necesidad para expresar los números algo altos; y antes bien, queriendose introducir alguna novedad, en vez de abreviar el periodo de los números á 4, ó 2, sería

(*a*) *Misc. Ber.* t. I. (*b*) Leibn. *Ac. des sc.* an. 1703.

ria mucho mas útil el prolongarlo á doce ó diez y seis, que sufren mas divisiones en números enteros sin necesidad de quebrados. Pero es muy dificil el abandonar los métodos antiguos adoptados generalmente de todos, para recibir otros nuevos imaginados de pocos, singularmente quando las ventajas no son patentes, y pueden ser justamente contrastadas. Así que las aritméticas quaternaria y binaria, no han encontrado sequaces que las abrazasen, ni podia esperarse que encontrasen mas si se quisieran introducir la de doce, ó la de diez y seis números, aunque tuvieran mas manifiestas utilidades.

Aritmética de los infinitos de Wallis.

En mas sublimes teorías aritméticas pensaban entonces los profundos ingleses. Nada menos que una aritmética de los infinitos se atrevió á formar Wallis; las mas largas é intrincadas series de números se reducian á sus exâctas sumas, y sujetándose á las leyes que les imponia aquella nueva aritmética, dexaban descubrir sus mutuas razones; la fraccion continua de Brounker, de la qual han manifestado tan bellos usos Eulero (*a*) y la Grange (*b*), ha nacido de la

(*a*) *Ac. Petr.* 1737. (*b*) *Ac. de Berl.* t. XXIV.

la aritmética de Wallis; el infinito mismo, y las inexplicables series de números infinitos no se escapaban de sus reglas, y se dexaban desenvolver y contemplar, quando estaban en las delicadas manos de Mercator, de Barrow y de otros, aunque pocos, dirigidos de algun modo por la doctrina de Wallis. Todo quanto pertenece á cuentas y cálculo, sea por medio de cifras numéricas, ó de signos algebráicos, sea definido y particular, ó indefinido y universal, sea de razon de números á numeros, ó de quantidad á quantidad, todo lo abrazó el gran Newton en su *Aritmética universal*: él reduxo á un cuerpo la aritmética y el álgebra, para formar con ellas un cuerpo perfecto del arte de calcular, y dió de este modo á la aritmética la mayor extension y dignidad á que jamas pudiera aspirar. Pero de las series numéricas, tan manejadas por los modernos matemáticos, y de las aritméticas de Wallis y de Newton, hablarémos con mas extension en el capitulo siguiente, como de materias enteramente algebráicas. Tambien por otro camino se ennobleció la aritmética á fines del siglo pasado aplicandose á diversos usos,

Aritmética universal de Newton.

Usos diversos de la aritmética.

usos, á que antes jamas se habian aplicado. Pascal (*a*), Sauveur (*b*) y algun otro francés habian ya insinuado alguna aplicacion de la aritmética á las combinaciones de los juegos; Huingens escribió expresamente un tratado (*c*), donde buscó el modo de discurrir acertadamente en los juegos que mas dependen de la suerte que de la razon. Leibnitz aplicó tambien el cálculo á la jurisprudencia y á la moral, y determinó por su medio la usura, ó el fruto del dinero que puede ser conveniente en diversas circunstancias (*d*). Petry reduxo á cálculo el número de los habitantes de una nacion, las mercaderías que deben consumir, las labores que pueden hacer, la cultura de los terrenos, la navegacion, el comercio, y quanto puede interesar al gobierno público, y dió de este modo principio á la aritmética política. Así se fué aplicando la aritmética á todas las materias; y en breve todas las qüestiones fueron

En los juegos.

En la jurisprudencia.

En la política.

(*a*) *Triang. aritm.* (*b*) V. Fonten. *Eloge de Mr. Sauveur*. (*c*) *De ratioc. in ludis aleæ*. (*d*) *De interus simpl. in Act. cr. Lyps.* an. 1683.

ron reducidas á qüestiones de mero cálculo. Pero estos no fueron mas que ligeros ensayos de los grandes esfuerzos, que despues han hecho los mas profundos matemáticos para levantar la gran fábrica del arte de conjeturar, de la doctrina de la suerte, del cálculo de la probabilidad. Pero todas estas materias y probabilidades, aunque pueden decirse nacidas baxo la jurisdicion de la aritmética como dependientes de las combinaciones numéricas, fueron despues transferidas al álgebra, y han quedado sujetas á su dominio. Entretanto las especulaciones aritméticas eran miradas con indiferencia por los matemáticos: estos consideraban como esteriles las verdades pertenecientes á los números, y las dexaban abandonadas, como poco dignas de sus meditaciones, segun nos asegura Eulero (*a*). Sin embargo no faltaron ilustres matemáticos, que gustasen de entretenerse en tales qüestiones, é hiciesen su corte á la aritmética. Vemos á Carré ocupado en explicar una curiosa propiedad del número 6, que tomándose por di-

Aritméticos modernos.

vi-

(*a*) *Ac. Petr. Nov. Comm.* t. I.

visor de todos los números cúbicos, dexa en cada uno una resta, que es la raiz de aquel cubo; y á la Hire con sutiles é ingeniosas combinaciones encontrar la misma propiedad en todos los números elevados á qualquier potestad (*a*). Vemos á Krafft trabajar sobre las multiplicaciones del 7; y no contento con la regla que nos dieron Stifels, y Juan Krafft en el siglo XVI, propone otra á la Academia de Petersburgo, la qual, evitando los inconvenientes que descubria en la antigua, tuviese mayor claridad y sencillez (*b*). El mismo Krafft trató de los números *compuestos*, esto es, de aquellos cuyo menor se forma con la suma de los números aliquotes del mayor, como 220, y 284 (*c*), y encontró en ellos ingeniosas y útiles novedades. Winsheim escribió sobre los números perfectos (*d*). Hanschio propuso á los matemáticos la teoría de una aritmética enriquecida por él con nuevos inventos (*e*).

R 2 en-

(*a*) *Hist. de l' Ac. des Sc.* an. 1704. (*b*) *Ac. Petr.* t. VII. (*c*) *Ac. Petr. Nov. Comm.* t. II. (*d*) *Ac. Petr.* ibid. (*e*) *Ep. ad Math. de theor.* &c. 1738.

Goldbach expuso un teorema perteneciente á los divisores de los números (*a*), y el antes citado Krafft trató de estos con bastante mas extension. Kruger en sus *Pensamientos sobre el álgebra* ha publicado tablas de los números *primeros*; Lambert las ha aumentado despues. Moulieres presentó á la Academia de las ciencias en 1704 (*b*) un método para encontrar los números *primeros*; y Rallier des Ourmes envió á la misma en estos años otro fácil para descubrir todos aquellos, que se contienen en un curso ilimitado de la serie de los impares, y para distinguir al mismo tiempo los divisores simples de aquellos que no lo son (*c*). Buffon (*d*), Lambert (*e*), Beguelin, Bernoulli (*f*) y otros geómetras de crédito, no se han dexado llevar de la comun opinion, y han abrazado las especulaciones numéricas que

(*a*) *Act. Erud. Lyps. Suppl.* t. VI. (*b*) *Hist. de l' Ac.* 1705. (*c*) *Mém. de Math. & de Phys. présent. á la R. Ac. des Sc.* t. V. (*d*) *Ac. des Sc.* an. 1741. (*e*) *Act. Helvat.* t. III. (*f*) *Ac. de Berl.* XXVII, XXVIII, al.

que otros habian empezado á abandonar: ¿Pero que mas? Los dos oráculos de las modernas matemáticas, Eulero (*a*) y la Grange (*b*), no solo no se han desdeñado de dirigir sus pensamientos á tales qüestiones, sino que las han agitado tan repetidas veces, y las han exâminado con tanto ardor, que parece que hayan encontrado en ellas sus mayores delicias, y ciertamente han hecho ver que no miraban las doctrinas numéricas como esteriles verdades, ó como poco dignas de ocupar su geométrica atencion. Pero sin embargo es preciso confesar que estos mismos argumentos, aunque todos versan sobre los números, y por lo mismo son enteramente aritméticos, se hallan por la mayor parte tratados algebraicamente, y casi todos los escritos insinuados ahora, aunque citados por nosotros en este capitulo, mas pertenecen al álgebra que á la aritmética. El álgebra que por tantos siglos solo habia sido auxîliadora y sierva de la aritmética, se

(*a*) *Ac. Petr.* t. XIV, *Novi Comm.* t. I, II, IV, al. (*b*) *Ac. de Berl.* t. XXIX, XX, XI, al.

se ha elevado despues á formar por si misma una ciencia, y ha sojuzgado, por decirlo así, á su principal y señora: la facilidad y expedicion que ofrece para los mas sublimes cálculos, y para las mas dificiles operaciones, ha llamado la atencion de los mas ilustres matemáticos: todas las qüestiones pertenecientes á los números, que antes eran de la inspeccion de la aritmética se han sujetado á la decision del álgebra; esta se ha enriquecido con el caudal mismo de aquella, y aun para mejorar la aritmética se han dirigido al álgebra los estudios de los matemáticos. Nosotros pues dexando á aquella pasarémos á exâminar el origen y los progresos de esta.

CAPITULO III.

Del Algebra.

Origen del álgebra. El álgebra, mirada primero como un método de la aritmética, y despues como una aritmética de signos aplicables á los números, ó como una aritmética mas universal y abstracta, ha sido finalmente aplicada, no menos que á los números, á las magnitudes, y

y á las quantidades geométricas, y se ha formado una ciencia media entre la aritmética y la geometría, y distinta de una y de otra, ó por mejor decir, que comprehende y abraza á ambas á dos. El nombre de álgebra viene del árabe أَلجَبر que significa *restitucion*, ó *union en un entero*; y por esto creen muchos que deba tomarse de los árabes el origen de una ciencia, á quien ellos han dado el nombre. Pero el álgebra reconoce un origen harto mas antiguo, y trae de la docta Grecia su literaria nobleza. Los árabes mismos se la confirman espontaneamente; y la obra *De los aritméticos* de Diofante es un incontrastable monumento, que prueba mucho á favor de los griegos, para que se les pueda disputar este honor. ¿Pero á que griego deberémos atribuir la gloria de la invencion de aquella ciencia? ¿Fué Diofante el autor del álgebra, ó solo fué ilustrador y propagador de la misma, conocida ya antes, y usada por otros griegos? Algunos creen descubrir en Euclides (*a*) los fun- Diofante inventor del álgebra.

(*a*) *Elemen.* lib. II, c. IX, prop. VII.