

## CAPITULO IV.

## De la Geometría.

Origen de  
la geometría.

Es harto verisimil que en Egipto, donde se hacian tantos canales, tantos diques, tan grandes lagos, tan inmensas fábricas, tantas y tan portentosas obras, que exígian conocimientos geométricos, donde los sacerdotes, libres de las públicas ocupaciones, y de otros pensamientos, podian atender cómodamente á las meditaciones científicas, donde en efecto florecian las ciencias, y á donde de las naciones extrangeras acudian los estudiosos á aprenderlas; que en Egipto digo, naciese, se cultivase y promoviese la geometría, y se elevase de los trabajos mecánicos, y de las operaciones prácticas á las abstractas y generales teorías. ¿Pero que podremos decir de la geometría de los egipcios sino puras conjeturas? Los pocos progresos que baxo su enseñanza hicieron los ingeniosos y estudiosos griegos, dan una prueba mayor de la escasez de luces de los egipcios, que quantas nos pueden presentar de su saber

al-

algunas obscuras expresiones de los antiguos, y algunas memorias suyas, que admiten diversas interpretaciones. ¿Que aprecio podremos hacer de la geometría de los egipcios al oír lleno de admiracion al rey Amasis por ver á Tales, que midiendo la sombra de su baston, y la de una piramide determinaba la altura de esta (a)? Si despues de mucho estudio de la geometría egipciaca Tales por haber, como dice Laercio (b), formado en el semicírculo un triángulo rectángulo, y Pitágoras por haber encontrado el quadrado de la hipotenusa igual al de los dos lados, saltaron de gozo, é hicieron un sacrificio á las Musas, ¿podremos concebir una idea muy ventajosa de la ciencia egipciaca? De los griegos, pues, tomaremos el principio de la historia de la geometría, donde se nos presentan hechos sobre que poderla fundar. Los primeros progresos de los griegos son ciertamente muy cortos y reducidos, y prueban la profunda ignorancia en que

Principio  
de la geometría de  
los griegos.

Tom. VII.

Ee

se

(a) Plutarc. in *Conviv.* Laert. in *Thaleta.*

(b) *In Thal.*

se encontraban quando se dieron á cultivar estos estudiosos; pero sin embargo da gusto el ver á la geometría pasar en sus manos de su infantil pequeñez á la mas robusta madurez, verla caminar al principio con los tímidos y vacilantes pasos de Tales, y de Pitágoras, y superar despues los mas altos é intrincados montes de dificultades con los vuelos de Archímedes, y de Apolino. Laercio (a) cita á un Meri, que inventó, como él dice, los principios de los elementos de la geometría; y un Euforbo frigio (b), que segun el testimonio de Calimaco, empezó á establecer alguna doctrina sobre los triángulos escalenos, y sobre las líneas. Pero es preciso que Meri y Euforbo no esparciesen sus inventos, ni formasen discípulos en aquella ciencia, puesto que vemos á los griegos estudiosos ir á Egipto para aprenderla, y contarse comunmente á Tales por primer introductor de la geometría entre los griegos. Tales apenas vuelto de Egipto formó en Mileto una escuela filosófica, donde sembró las prime-

(a) *In Pithag.* XI. (b) *In Thalet.* III.

ras semillas de la geometría, que tantos y tan sazonados frutos produxeron despues de algunos siglos en la Grecia. El promovió, y amplió la doctrina de Euforbo sobre los triángulos escalenos, y sobre otras figuras geométricas (a); él, segun el testimonio de Pamfila citada por Laercio, encontró el modo de describir en un semicírculo un triángulo rectángulo, esto es, descubrió la propiedad del círculo, que todo triángulo, que tiene por base el diámetro, y toca con el ángulo opuesto la circunferencia, tendrá este ángulo recto; él en suma hizo muchos descubrimientos (b), que le adquirieron el nombre de geómetra, é hicieron que lo mirasen los posteriores como el padre de la geometría griega. De las escuelas de Tales salió Anaxímandro tambien geómetra; y si es cierto, como dice Suidas (c), que Anaxímandro compuso un compendio de geometría, esto prueba haberse promovido y adelantado mucho este estudio, Ee 2 por-

(a) Laert. *in Thal.* (b) Proclus *in Euclid.* Comm. lib. III. p. I. (c) Anaxim.

porque no se piensa en formar compendios de las ciencias, sino hay muchos descubrimientos, muchas opiniones, y muchas teorías que compendiar. Mientras Tales promovía en la Jonia la geometría, Pitágoras le deba en Italia notable incremento. Célebre es su descubrimiento de ser igual en los triángulos rectángulos el cuadrado de la hipotenusa al cuadrado de los dos lados tomados juntos (a). El demuestra que de todas las figuras sólidas la mas grande (y aun la mas bella, como dice Laercio) es la esfera, y de todas las planas el círculo (b), con lo que hizo de algun modo nacer el primer ensayo de la doctrina de los isoperímetros. Un mediocre geómetra de nuestros dias se reirá de los conocimientos, y del espíritu de los griegos, que miraban como esfuerzos del ingenio de los primeros maestros lo que ahora no es mas que un pequeño juego para los mas débiles principiantes. Pero quien reflexione las gravísimas dificultades que se ofrecen á los primeros inven-

(a) Cicero, Laert. & alii, passim. (a)

(b) Laert. in Pyth. XIX. l. q. III. dicitur.

ventores de qualquiera ciencia, y la intension demente que necesita, el que sin principio alguno sobre que apoyarse procura hacer generales las propiedades de algunas figuras, y formar por sí mismo sin ningun auxilio precedente algunos teoremas, creará que no se requiere menos ingenio para llegar de la nada á comparar entre sí, y con el círculo los triángulos, á encontrar la proporcion de algunas líneas, y de sus cuadrados, á decidir sobre la mayor magnitud, á comparar entre sí las figuras planas y las sólidas, y á hacer los pequeños descubrimientos de Tales, y de Pitágoras, que para pasar de las doctrinas de Cavalieri, de Fermat y de Barrow, á los sublimes descubrimientos de Newton, de Leibnitz, y de los Bernoullis. Las escuelas de Tales y de Pitágoras produxeron muchos geómetras, y otros salieron de la Grecia sin haber venido de aquellas escuelas. Leemos en Laercio (a) quantas obras geométricas compuso Demócrito; y el verle tratar del contracto del círculo y de la esfera, de las

Progresos de la geometria.

Quarta de los libros de la geometria.

no se hubiesen encontrado en Demócrito. In Democr. XIII. l. q. III. dicitur.

líneas irracionales y de las sólidas, y de tantos otros puntos geométricos nos manifiesta con bastante claridad quanto adelantó él en la geometría.

Progresos  
de la geo-  
metría.

En vano querremos seguir ahora distintamente la historia de los progresos hechos en aquellos tiempos por la geometría, debidos á Archítas, á Euclides pónico, á Hipócrates chio, á Filolao, á Platon, y á otros ilustres matemáticos: son muy escasas y obscuras las noticias, que han llegado hasta nuestros dias de sus fatigas geométricas, para poderlas describir exáctamente; pero sí dirémos en general, que casi todas las proposiciones que forman aun el dia de hoy los elementos de la geometría, han sido descubrimientos de aquella edad, y que las sublimes especulaciones en que vemos empleados á los geómetras de aquellos siglos, prueban bastante que se habia ya adelantado mucho la geometría. La quadratura del círculo, la duplicacion del cubo, la triseccion del ángulo, son los problemas que disputaban aquellos geómetras; y no podía pensarse en semejantes problemas, sino se hubiesen encontrado antes otras muchas

Quadratura  
del círculo.

chas verdades necesarias para tales investigaciones. La quadratura del círculo ha empeñado por su dificultad la atencion de los geómetras de todos los siglos hasta el nuestro, y ha acarreado á la geometría notables adelantamientos; pero no obstante lo arduo del problema vemos ocupados á los antiguos geómetras en buscar la resolucion. Plutarco (a) nos dice que Anaxágoras encerrado en la carcel formaba su divertimento buscando la quadratura del círculo. Y un hecho semejante de Anaxágoras, al paso que nos hace creer que fuese este entonces un problema bastante agitado, no pareciendo verisímil que aun encarcelado le ocurriese el pensamiento de trabajar sobre un problema tan arduo, no siendo aun tentado por otro, prueba tambien que eran ya en tiempo de Anaxágoras harto extensas las luces de la geometría, quando se internaban los geómetras en tales investigaciones. En efecto poco despues vemos al cómico Aristófanes introducir en la escena un geómetra, y hacerle ofrecer pesar el ayre, y quadrar el círculo.

(a) *De Exil.*

como que esta fuese entonces una materia muy disputada por los geómetras (a); y Aristóteles (b) cita tres diferentes quadraturas del círculo, inventadas ya en aquel tiempo por Hipócrates chio, por Brison, y por Antifonte. La investigación de aquella quadratura empezó bien presto á producir adelantamientos en la geometría; y á ella se debe la quadratura de la lunula de Hipócrates chio, sobre la qual vemos aun ocuparse utilmente l' Hospital, y otros modernos (c), y la quadratriz de Dinostrato, que tomó de esta buscada propiedad el nombre de *quadratriz*.

Duplicación del cubo.

La duplicación del cubo era otro problema que tenia en agitación á los geómetras. No me detendré en la fábula de la peste, y del oráculo de Delos, que no quiso que quedase libre el Atica de aquel mal hasta que fuese duplicada su ara, y como esta ara era cúbica, por eso se llamaba *Deliaco* el problema de la duplicación del cubo. Pero lo cierto es que los

(a) En los *Uccelli* sc. del Geómetra, y Pistetero. (b) *I Elench.* (c) *Acad. des Sc.* 1701.

mas célebres geómetras se empeñaron en aquella investigación, fácil en apariencia, pero en realidad muy ardua, y abstrusa para los conocimientos de aquella edad, por lo qual fueron vanas é inútiles todas sus diligencias. El primer paso para la resolución del problema era conocer la dificultad. Esta se ocultó al principio á los ojos de los geómetras griegos; pero después de inútiles tentativas fué finalmente reconocida. El antes citado Hipócrates de Chio fué el primero que conoció que para duplicar un cubo es preciso encontrar entre el lado del cubo, y el duplo del mismo lado dos medias proporcionales, y que la primera de estas medias será el lado del cubo duplicado que se busca (a). El gran Platon estudió con esmero el problema, y llegó á formarse un instrumento para resolverlo mecánicamente, pero sin la debida exactitud (b). Eudoxio, geómetra no menos famoso, encontró otra resolución por medio de ciertas

*Tom. VII.* Ff *tas*

(a) *Procl. in Euclid.* (b) *Eutocium ad Archim.* lib. II *De Sphæra & Cilindro.*

tas curvas inventadas por él; y ésta, aunque despreciada por Eutocio, fué alabada por Eratóstenes, testimonio mas autorizado por mas inmediato á aquel tiempo, y por haberse empleado tambien en la investigacion del mismo problema. Archítas tarentino fué el primero, segun dice Laercio (a), apoyado al testimonio de Platon, que encontró en la geometría la deseada duplicacion del cubo. Menecmo dió dos resoluciones, y estas nos hacen ver otras dos muy importantes materias de las investigaciones de los antiguos geómetras, que manifiestan en sus conocimientos notables adelantamientos; quales son las secciones cónicas, y los lugares geométricos. Los geómetras no satisfechos con los conocimientos adquiridos sobre los triángulos, sobre los círculos y sobre las propiedades de varias líneas y figuras, pensaron en buscar otras curvas con que emplear su estudiosa curiosidad, y las encontraron cortando un cono de diversos modos, y observando las curvas que de aquí nacian. De este modo encontraron la elip-

Secciones  
cónicas.

(a) *In Archyta VII.*

se, la parábola, y la hipérbola, las quales tomaron el nombre de *secciones cónicas*, como formadas por la seccion del cono; y el triángulo, y el círculo que allí se encuentran igualmente, aunque eran ya antes bastante conocidos. Algunos quieren atribuir á Eudoxio la invencion de tales curvas; y lo cierto es que las sobredichas resoluciones de Menecmo, discípulo de Eudoxio, se fundan sobre conocimientos harto profundos de aquellas lecciones, que prueban quanto hubiesen adelantado ya los geómetras en sus investigaciones. A mas de esto Apolonio, que puede ser mirado como maestro de tales curvas, no hizo mas que perfeccionar los quatro libros de los cónicos de Euclides, y Euclides solo siguió la doctrina de Aristéo, ilustre escritor (a); y este escribiendo sus cinco libros de elementos cónicos, los expuso con una brevedad que prueba ser aquellas materias harto conocidas é ilustradas por los geómetras que le habian precedido. Otra especulacion se ve tam-

Ff 2

(a) Pappo *Coll. Math. lib. VII. De con. Apol.*

Lugares  
geométricos.

bien de aquellos siglos, que dá mucho honor á su geometría, y es la de los lugares geométricos, ó de aquellas líneas rectas ó curvas, de las quales cada punto resuelve igualmente un problema indeterminado, ó capaz de infinitas resoluciones. Estos lugares geométricos son de mucho uso en las matemáticas; y los elogios que han obtenido Cartesio, Fermat, y otros geométricos modernos por lo bien que los han manejado, pueden probar suficientemente quanta sea su utilidad. Grandes alabanzas, pues, debemos dar á los antiguos geométricos de la escuela platónica, los quales no solo inventaron estas materias, sino que las ilustraron con tanta extension. Tres especies diversas formaban de estos lugares, y llamaban *planos* los que se contenian en líneas rectas, y en arcos de círculos, *sólidos* las secciones cónicas, y *lineares* las otras líneas ó curvas de orden superior; y desde los primeros tiempos los trataron todos tres con mucha extension é inteligencia. Las sobredichas resoluciones de Menecmo manifiestan en él una gran posesion de estos lugares. Solo de los lugares sólidos compuso Aristeo cinco libros muy

muy estimados de los antiguos; que el docto geométrico Viviani quiso dar á conocer de algun modo á los modernos, y con mucha gloria suya compuso sobre ellos una ingeniosa y erudita *Divinacion*. Después de Aristeo escribió Euclides dos libros de los *lugares de la superficie*; escribió Eratóstenes de los *lugares de las medianías*; otros dos libros dexó Apolonio de los *lugares planos*, y otros muchos escribieron de estos lugares (a); y todo prueba quanto adelantaron los antiguos geométricos en aquella utilísima teoría. La analisis geométrica, ó bien sea aquel método que del resultado como concedido, sacando consecuencias, y de estas pasando á otras consecuencias se viene á parar en alguna proposicion evidentemente verdadera, ó falsa en los teoremas, posible, ó imposible en los problemas, es otro invento, que da mucho honor á los antiguos, particularmente á Platon, á quien se atribuye la gloria de la invencion. Algunos creen que los antiguos careciesen de toda

no-

Analisis  
geométrica.

(a) IV. Papp. lib. VII. (c) .ning. II V di I

noción de análisis (a). Pero aun sin recurrir á las obras de Platon, de Archimedes y de otros antiguos géometras, donde se ven de ella claros exemplos, basta leer á Pappo y á Proclo para conocer que los antiguos adquirieron copiosas y justas nociones de este método. Pappo (b), ademas del uso que hizo de ella en todos sus libros, en el principio del septimo explica claramente que sea la analisis, de que modo proceda, que usos tenga en los teoremas, y en los problemas, á que géometras pueda ser útil, quales la hayan tratado, y en suma habla de ella de modo, que es preciso no haberlo leído nunca para sostener que los antiguos no tuvieron nocion alguna de la analisis. Proclo tambien habla de ella muchas veces (c), y forma de algun modo su historia. Platon, inventor de este método, lo comunicó antes que á todos á Laodomante, el qual bien pronto supo hacer de él un óptimo uso. Teeteto y Architas tomaron tambien de

(b) *Encycl. method. Math., Disc. prel. (b)*  
Lib. VII, princ. (c) *In Eucl. lib. II & III.*

Platon este método, como igualmente Neocolis, Eudoxio, Menecmo y otros; y la analisis fué siempre mirada como una útil y gloriosa invencion de la escuela platónica, de la qual hicieron despues mucho uso Euclides, Archimedes, Apolino, y los más sublimes géometras. La triseccion del ángulo es otro problema, que ocupó mucho las meditaciones de los antiguos, y ha empeñado tambien la atencion de Cartesio (a), y de los más sutiles modernos. La facilidad de dividir un ángulo en dos partes iguales por medio de una recta perpendicular, movió á los géometras á procurar dividirlo tambien en tres; pero despues de algunas inútiles aunque ingeniosas tentativas, comprehendieron, que solo con la geometría plana, ó con la regla y con el compas, no podia esperarse tal triseccion, y que esta era, como la quadratura del círculo, y la duplicacion del cubo, un problema casi irresoluble; y el conocer esta dificultad es una grande prueba de la exâctitud de la antigua geometría. Sin embargo pro-

Triseccion  
del ángulo.

(a) *Geom. lib. III. (c) In Eucl. I & II. (b) In Theophr.*

curaron buscar por otros caminos la deseada resolución, y aplicando la hipérbola, y la conoide encontraron algunas muy ingeniosas, que se ven referidas por Pappo (a), y que hacen ver lo mucho que adelantaron los antiguos en la sutileza geométrica. Quanto hemos dicho hasta aquí puede probar suficientemente, que los antiguos adquirieron mas individuales y profundos conocimientos de geometría de lo que comúnmente se cree; pero hay aun otra prueba, que puede quitar mas toda duda. Ya en tiempo de Alexandro escribió Teofrasto quatro libros de historia de la geometría, como dice Laercio (b); y ademas de este escribió mas copiosamente Eudemo rodio, discípulo tambien de Aristóteles como Teofrasto, otra historia de la geometría, de la qual saca Proclo (c) muchas noticias; y estos no llegaban más que á los primeros siglos, y se quedaban en Ermotimo, y en Filipo, como los últimos geómetras de los

(a) *Collect. Math.* lib. IV. (b) *In Theophr.* XIII. (c) *In Eucl.* I &c. III. lib. III. (a)

tiempos de su historia. La antigua geometría no hubiera prestado materiales para tantos libros de historia; sino hubiese hecho muchos descubrimientos, y obtenido gloriosos progresos.

Pero sin embargo es preciso confesar que el verdadero esplendor de la antigua geometría no se vió hasta los tiempos posteriores, despues de la fundacion de la escuela de Alexandría. Entonces los Euclides, los Eratóstenes, los Archímedes, los Apolonios y tantos otros hicieron que tomase un vuelo mucho mas alto, y que compareciese baxo nuevo y mas respectable aspecto. Euclides puede ser mirado como el padre, y es verdaderamente el maestro de la antigua geometría. Hipócrates chio fué el primero, como dice Proclo (a), que escribió elementos de geometría: despues de él los escribieron mas completos Leon el geómetra, Teudio de Magnesia y otros; pero todos quedaron oscurecidos al comparecer los *Elementos* de Euclides. En ellos se ven recogidas, explicadas y demostradas, enlazadas y unidas

(a) *Lib. II in Eucl.*

Escuela  
alexandri-  
na.

Euclides.

das en cuerpo de doctrina quantas proposiciones de geometría elemental se encuentran sueltas y dispersas en los escritos de los otros géometras, á los cuales agregó tambien algunos libros de aritmética; y su obra de los *Elementos* puede llamarse el copioso almacén de las riquezas matemáticas de aquella edad. La exâctitud y severidad con que él definió todas las palabras, demostró todas las proposiciones, y unió y encadenó todas las cosas, se puede decir que creó el espíritu geométrico, que tantas ventajas ha acarreado al adelantamiento de las ciencias, y á la perfección del espíritu humano. Los elementos de Euclides han sido en todos los siglos el código de los géometras, y el libro clásico de todas las escuelas de geometría. Teon alexandrino, Proclo y otros antiguos se esmeraron en comentarlos. Los árabes traduxeron, comentaron é ilustraron de varios modos los elementos de Euclides, y siguiendo las huellas del maestro griego pudieron adelantar en aquella ciencia. Los latinos, que no los conocieron, no hicieron por muchos siglos mas que palpar tinieblas copiando, y alterando

do algunos pocos principios de Boecio, ó de otros menos inteligentes que él en la materia: los primeros crepúsculos de la geometría les vinieron á ellos de las traducciones aunque imperfectas de los elementos de Euclides; y los primeros maestros de la geometría de los modernos, Commandino, Clavio, Barrow y algunos otros aun mas modernos creyeron emplear bien sus fatigas traduciendo, y comentando los elementos de Euclides. Solo en este siglo se ha querido encontrar manchas en aquel lumínar de la geometría, y se ha tachado aquella obra de sobradas definiciones y divisiones escolásticas, de sobrada individualidad y escrupulosidad en demostrar las cosas bastante claras por sí mismas, de sobrada sutileza, y de alguna sofistería. Dexo para los verdaderos y profundos géometras la decision de lo justo de estas acusaciones; y solo diré, que el voto de un Newton y de un Leibnitz, los más sublimes géometras que haya producido el espíritu humano, los cuales aprobaban mucho el método y el orden, la exâctitud y el rigor de los elementos de Euclides, la aprobación de un Wolfio escritor tan