ciosos frutos, de que ahora gozamos tan completamente.

Renacimiento de la geometría.

Los progresos en el renacimiento de la geometría fueron aun mas lentos que en el mismo nacimiento. No vemos por muchos siglos mas que malas traduciones, y muchas veces tambien corrupciones de las obras mas elementares de los griegos y de los árabes; ningun ingenioso descubrimiento, ninguna obra original, ningun adelantamiento en la geometría. Solo hácia mitad del siglo XIII florecieron dos matemáticos, Jordan Nemorario, y Juan de Sacrobosco, que manifestaron tener algun ingenio, y escribieron por sí, aunque siguiendo las guias griegas y árabigas, obras geométricas, y no simples traduciones. Pero estas mismas obras eran tan rústicas y mezquinas, que probaban la escasez de luces de aquellos tiempos; no eran oportunas para producir otras mejores, y hacer nacer buenos geómetras; y en efecto no empezamos á verlos hasta en el siglo XV.

Purbach.

Purbach puede llamarse el primero que manifestó alguna chispa de genio geométrico, y que hizo ver en sus observaciones, y en sus obras astronómicas alguna finura

ra

ra de pensar en la geometría, y alguna vislumbre de invencion para el mejoramiento de la geometría práctica, y de la trigonomotría. Regiomontano, su discípulo, superó bastante al maestro, y se formó un geómetra harto mas perfecto. Cárdano, oyendo de mala gana las alabanzas de Regiomontano, lo acusaba de plagio en la construccion de las efemerides, en la tabla de las direcciones, en el libro de los triángulos esféricos, y en todas las cosas (a). Pero sea lo que se fuese de estas acusaciones, que nosotros no podemos referir ahora, lo cierto es que la geometría y la astronomía profesarán perpetuo reconocimiento á Regiomontano. Este corrigió y perficionó la invencion de Purbach para la exâctitud de los cálculos trigonométricos, dividiendo el radio en 1000000 partes en vez 6000000, que Purbach, habia substituido á los 60 de los antiguos. Ademas de esto introduxo Regiomontano en la trigonometría el uso de las tangentes, y formó la tabla de ellas.

Regiomontano.

No

(a) V. Gassend. *in Vita Purbach. & Regiom.*

No solo expuso las teorías de los árabes en la trigonometría, sino que las llevó mucho mas adelante, encontrando la resolucion de los mas dificiles casos; y podemos decir que nos dió en su obra de los triángulos una trigonometría bastante completa. Sus comentos de Archímedes, la defensa de Euclides, y otros trabajos geométricos acrecentaron mas y mas sus méritos en la geometría; y todas sus obras, y el estudio que en aquel siglo se hacia de la lengua griega, sirvieron de mucho estímulo á los literatos europeos para dedicarse con nuevo ardor á la cultura de aquella ciencia. Se empezaron á leer y á gustar los geómetras griegos en sus originales, se abandonaron las traducciones hechas del árabe, y se hicieron otras del griego: se vió en su verdadero esplendor la antigua geometría, que hermoseó con sus gracias á los nobles ingenios, y se empezaron á ver entonces muchos geómetras. Tales eran Walter, Durer, Adriano Romano, Vanceulen y otros; tal particularmente Werner, que se internó con provecho en las secciones cónicas, inventó nuevas resoluciones en algunos problemas de geometría, é ilustró con nuevos escritos la trigonometría. Tales Retico, y Byrge, que acarrearon mayor perfeccion á las tablas trigonométricas; y singularmente Byrge llegó, segun el testimonio de Keplero, á formar la primera idea de los logaritmos. Célebre es la memoria de Nuñez, mas conocido baxo el nombre de Nonio, y benemérito de la geometría por su zelo, y por sus obras, pero mas aun por la invencion del instrumento que lleva su nombre, y que sirve tanto para la exâctitud geométrica. Los comentos de Euclides, de Ciruelo, algunos escritos de otro Nuñez, y otros de otros escritores manifiestan que en España se cultivaba con ardor la geometría. Los franceses Pelletier, y Oroncio Fineo, son conocidos de los geómetras, no solo por las disputas, y por las oposiciones á que se vieron sujetos, sino tambien por algun mérito de sus escritos. Commandino, y Mauroli, ó Maurolico, son nombres mas ilustres en las matemáticas: solo las traduciones é ilustraciones de los geómetras griegos hechas con mucha inteligencia y sagacidad, hicieron sus nombres muy respetables en la geometría, y las

Algunos modernos geómetras.

obras suyas propias aumentaron tambien la reputacion de su saber adquirida con dichas traduciones. Tartaglia, tan famoso por sus descubrimientos en el álgebra, manifestó tambien en la geometría su original y penetrante ingenio; y muchos se adquirian por todas partes el nombre de geómetras. Descollaba sobre todos Clavio por la fama universal: sus inmensas obras, y la vasta extension de sus conocimientos matemáticos hicieron que fuese tenido de muchos como el oráculo de aquella ciencia; y aunque despues se ha minorado mucho su fama, será siempre respetado de quantos querrán reconocer suplida la falta de ingenio con la eficacia del estudio, y con la constancia del trabajo, particularmente si consideran el estado de aquella ciencia en su siglo, y las ventajas que Clavio le acarreó. No tan extensa, pero mas verdadera, estable y sólida es la gloria de su contemporáneo Vieta, el mas sublime y original geómetra, que se hubiese visto despues de los felices tiempos de los Archîmedes, y de los Apolonios. Embebido en la geometría antigua, é íntimo conocedor de sus primores, movi-

Clavio.

Vieta.

vido de una disputa con el arriba nombrado Adriano Romano, geómetra holandes de mucho mérito, se aplicó al restablecimiento del libro *De tactionibus* de Apolonio, y lo dió al público con el título de *Apolonius gallus.* Una mayor exâctitud en acercarse á la verdad de la razon del diámetro al circulo; los elementos de la doctrina de las *secciones angulares*, y la determinacion por fórmulas analíticas de las relaciones de los senos de los arcos multíplices y submultíplices; la construccion de las tablas trigonométricas sobre este principio, y otras novedades geométricas son los verdaderos méritos que elevaron á Vieta á la clase de los mas sublimes geómetras. Al mismo tiempo que Vieta y Clavio trabajaba con feliz suceso Lucas Valerio buscando el centro de gravedad de los sólidos, á los que Archîmedes no habia dirigido sus especulaciones; y su libro sobre aquella materia puede llamarse la primer obra latina, que hiciese extender mas los confines de la geometría griega. Galileo buscó tambien el centro de gravedad, y logró encontrarlo en varios cuerpos. Justo amante de la geometría supo gus-

Lucas Valerio.

Galileo.

tar de todos sus primores, y se animó á tentar ulteriores adelantamientos. El fué el primero, ó qué encontró, ó á lo menos que exâminó la cicloyde, y que buscó sus propiedades. Varios curiosos é importantes teoremas geométricos son hallazgos suyos; pero su mayor mérito á favor de la geometría fué el aplicarla como lo hizo á la física, y hacerla servir de segura guia para penetrar los mas ocultos misterios de la naturaleza. De este modo empezaron los geómetras á internarse en los mas profundos arcanos, y á superar á los mismos griegos sus maestros. Hemos visto á los ignorantes europeos buscar por medio de los árabes los primeros elementos de la geometría, y estudiar malamente en sus traduciones las obras de los griegos. ¿Quantos siglos no se han pasado antes de superar en sus escritos los mas primitivos elementos de la geometría ordinaria? ¿Quantas fatigas no se han necesitado para entender bien á Euclides? ¿Quantos años, y quantos esfuerzos antes de llegar á comprehender las teorías griegas de Archîmedes, y de Apolonio? ¿Quien pensaba poder añadir luces á las luces de los maestros grie-

griegos? ¿Desde Gerberto hasta Vieta le ocurrió jamas á alguno buscar lo que Archîmedes no habia encontrado? ¿Quien se hubiera atrevido á pronosticar, que en pocos años superarian tanto los europeos á los descubrimiertos griegos, que los mas sublimes problemas, á los quales no pudieron llegar los antiguos, no serian en sus manos mas que un juego? Nuevos teoremas, nuevas verdades, nuevo orden de cosas se va á descubrir en la geometría de estos dos últimos siglos. Aunque sequaz al principio de la griega se atrevia sin embargo á superarla, abrir nuevos caminos no pisados por ella, y correr nuevos campos no tocados por la misma; pero hecha ya mas fuerte, y mas valerosa, provista de nuevos medios, y de auxîlios propios, osó subir á altas cimas no vistas de aquella, y dominar regiones, de quienes no se tenia idea alguna. Tenemos en estos dos siglos tres especies diversas de geometría: desde Vieta hasta Cartesio la geometría es aun la antigua, solo aumentada con nuevas verdades, y enriquecida con muchos descubrimientos, y esta aun continuó cultivandose y produciendo nue-

nuevos frutos despues de la introduccion de la cartesiana. Cartesio, sutil geómetra, y feliz algebrista, forma una nueva geometría, que acompañada y auxîliada del álgebra hace progresos, á los quales no se podia aspirar sin este apoyo: de Newton, y de Leibnitz nació una nueva mas sublime, mas noble, y mas fecunda geometría, que provista del cálculo infinitesimal es tan superior á la cartesiana, quanto esta á la antigua. Entremos pues á recorrer la historia de todas tres.

Vieta, Valerio y Galileo, hicieron ver, que con el método de los antiguos se podia pasar mas adelante de lo que se habian internado los mismos antiguos. Keplero fué mas animoso; y aunque no bastante provisto de geometría, se atrevió á tentar nuevos caminos no abiertos por los antiguos geómetras. El exâmen de ciertas vasijas le dió ocasion para producir una nueva geometría. Archîmedes, y los antiguos solo ponian la mira en la medida, y en las relaciones de los sólidos engendrados con hacer girar las secciones cónicas al rededor de una base puesta exâctamente en el medio. Keplero quiso con- Keplero.

siderar otros muchos, que podian engendrarse revolviendo al rededor de exes diversos ya las mismas secciones cónicas, y ya cierta porcion sola de las dichas curvas. De este modo llegó á formar mas de ochenta sólidos nuevos aun no contemplados por los geómetras, y los distinguió con nombres de *anillo ancho*, *de anillo angosto*, *de globo turquesco*, *de manzana*, *de membrillo* y de otros semejantes. Da gusto ver las maneras diversas, con que forma aquellos sólidos, y las curiosas imágenes de que se vale para hacerlos conocer á los lectores. Con motivo de hablar de las figuras se atrevió á introducir el nombre y la idea del infinito, formando el círculo de infinitos triángulos, el cono de infinitas pirámides, el cilindro de infinitos prismas, y así de otros sólidos, y demostró de este modo de una manera directa y clara algunas verdades, que en el método antiguo de comparar entre sí las figuras inscriptas y circunscriptas á los planos; y á los sólidos que se han de medir, exîgian giros sumamente intrincados, y muy dificiles de executar: pero la escasez de luces geométricas en que se encontraba todavia, lo hizo caer en muchos errores, y dexar sin la deseada resolucion la mayor parte de sus problemas. Sin embargo las investigaciones de Keplero sobre tantas figuras nuevas, y la introduccion de la idea del infinito en la geometría excitaron la curiosidad de los geómetras, y los conduxeron á nuevos descubrimientos.

Guldin. Guldin encontró la resolucion de los problemas propuestos por Keplero por medio del centro de gravedad, aplicándolo con mucho ingenio y felicidad á la medida de las figuras producidas por revolucion. El primer paso de Guldin fué señalar con exâctitud en cada figura el punto donde precisamente se encuentra el centro de gravedad; y esto solo le produxo ya algunos descubrimientos. Pero pasó mas adelante, y exâminando las figuras formadas por la rotacion de una línea, y de una superficie al rededor de una base inmoble, encontró que eran como el resultado de la figura generatriz, y del camino que describe su centro de gravedad; y que por exemplo si un triángulo rectángulo girando al rededor de uno de los catetos forma un cono, como el centro

tro de gravedad está entonces distante del exe un tercio de la base, y girando describe una circunferencia, que es el tercio de la que describe la extremidad de la base, del mismo modo el cono será como el resultado del triángulo generador por el tercio de la circunferencia descripta por la extremidad de la base; y por ello el cono será el tercio del cilindro de la misma base, y de la misma altura. De este modo aplicando esta regla á otras figuras encontró la resolucion de todos los problemas con singular exâctitud, y abrió un camino á los geómetras para descubrir muchas verdades. Pero este no fué seguido de muchos; y se hizo mucho mas fecunda y mas útil á la geometría la introduccion del nombre, y de la idea del infinito reconocido por los antiguos, y propuesto baxo nuevo aspecto por Keplero. Galileo (a) se familiarizó aun mas con los infinitos, y con los indivisibles; y no solo reduxo á ellos la demostracion de algunos teoremas, sino que pensó tambien en componer un tratado de

(a) *Dial. della nuova Scién.* lib. II, y III.

de los indivisibles. Esto que pensaba hacer Galileo lo habia ya dispuesto, y preparado su discípulo Cavalieri. El empieza por considerar el sólido como compuesto de infinitas superficies, las superficies de infinitas líneas, y las líneas de puntos infinitos; y para encontrar la medida de un sólido le basta tener la razon de todos los planos que lo componen, y la de las linesas para la medida de los planos, y generalmente para tener las relaciones entre dos cuerpos, determinar las de sus elementos, que él llama *indivisibles*. Así se resolvió á buscar la medida de muchos sólidos de los inventados por Keplero, y la encontró en mas de veinte (*a*), y despues aun en muchos mas, y abrió á otros un fácil camino para encontrarla en los restantes. Entonces pues con el descubrimiento de Cavalieri se dió principio á una nueva geometría. A las figuras inscriptas y circunscriptas, á las dificultades de inscribir y circunscribir poligonos á una figura, y de buscar los límites de la razon entre el último poligono ins-

Cavalieri

(*a*) *Geometr. indiv.* &c. *Pref.* & al.

inscripto, y el último circunscripto, al método en suma de doble posicion, á que únicamente habian atendido los antiguos, se empezaron á substituir los elementos indivisibles, los infinitésimos, los infinitos, y se facilitaron muchas investigaciones, que antes eran muy dificiles y confusas, se abrió campo para hacer otras muchas, que hasta entonces no se podian tentar, y nació en suma una nueva geometría. El nombre de *indivisibles*, y la novedad del descubrimiento excitó la atencion de todos los geómetras, y provocó las censuras de muchos. Pareció desde luego á algunos que el método de los indivisibles fuese tomado de Keplero; pero Cavalieri (*a*) hizo ver la diversidad; puesto que Keplero de los cuerpos pequeñísimos compone de algun modo los cuerpos mayores, quando él solo decia, que los planos eran como los agregados de todas las líneas equidistantes, y los cuerpos como los agregados de todos los planos. Quisieron otros derivar este método de una obra de Bartolomé del Sovero *De cur-*

Ll 2 *vi,*

(*a*) *Exerc. tert. in Guld.*

vi, et recti proportione promota (*a*); pero Cavalieri hizo ver que bastante antes de la publicacion de esta obra habia él, no solo escrito, sino presentado al senado de Bolonia la suya de la geometría de los indivisibles. La idea sola, y el nombre de indivisibles chocó á muchos geómetras, y él mismo habia ya previsto la extraña impresion que debia causar en el ánimo de muchos, y de algun modo habia anticipado la respuesta en la prefacion del libro septimo; y antes bien puede decirse que todo el libro septimo, probando con otro método las mismas verdades, que en los antecedentes se habian demostrado con el de los indivisibles, forma de algun modo la apología de este método. Salian sin embargo cada dia nuevos opositores y habiendo entre estos uno muy respetable, el poco ha nombrado Guldin, y deseando Cavalieri hacer mas público, y mas firmemente establecido su método, se vió precisado á exponerlo de nuevo en dos *exercitaciones*, y responder en otra á las oposiciones de Guldin. Este muy poseido de sus centros de grave-

(*a*) Lib. V.

vedad, y agravado tambien de achaques, no pudo mirar con buenos ojos el método de los indivisibles, ni exâminarlo con atencion: y alaba, sí, al autor, y recomienda su método como oportuno para la invencion, pero procura tacharlo de falsedad y de insubsistencia, y querria deprimirlo para hacer reynar el suyo de los centros de gravedad. Nosotros no podemos dexar de alabar uno y otro método, y venerar á sus autores; pero queriendo dar á alguno la preferencia, no temeremos abrazar el de Cavalieri como mas directo, mas expedíto, y mas fácil. Es natural, como con razon dice el mismo Cavalieri (*a*), buscar antes la dimension de las figuras, y despues su centro de gravedad, antes se concibe una figura extendida, que grave. Muchas veces aun es mas dificil el determinar el centro de gravedad que la medida, que por su medio se debería buscar. Pero dirémos sin embargo que el método de Guldin debe reputarse como un bellísimo descubrimiento en la geometría, y que por mas que el método de los indi-

(*a*) *Exerc. tert.*

divisibles haya tenido mas influxo en los progresos de la geometría, merece tambien el de los centros de gravedad los elogios de todos los geómetras, y ambos á dos hacen los nombres de Guldin, y de Cavalieri inmortales en los fastos de la geometría. Galileo, Viviani, y toda la escuela galileana acogió con muchos aplausos el método de Cavalieri, que despues defendió, ilustró, y amplificó un alumno suyo, Estevan de los Angeles. El primero que lo honró con la práctica, y con adaptarlo utilmente fué Torricelli, como se gloriaba de ello el mismo Cavalieri (*a*). Con este método resolvió Torricelli problemas dificilísimos con suma facilidad, encontró una nueva quadratura de la parábola, una nueva relacion de la esfera al cilindro, la medida del sólido agudo hiperbólico, y, lo que hizo mas célebre el nombre de Torricelli, la dimension de la cicloyde. Galileo habia estudiado muchos años la resolucion de tales medidas sin poderla encontrar; el mismo Cavalieri habia empleado en vano sus fatigas

(*a*) *Exerc. par.*

gas en aquella especulacion; y solo Torricelli con el auxîlio del nuevo método llegó con tal facilidad á encontrarla, que, como dice Cavalieri (*a*), el problema que parecia á los geómetras de suma dificultad, fué para él facilísimo. Pero esta bella fatiga del ingenio geométrico de Torricelli le atraxo una grave acusacion de plagiario del geómetra Roberval.

La Francia tenia entonces dos geómetras de órden superior, Cartesio, y Fermat: Roberval amigo de este, contrario de aquel, y émulo de entrambos, pero inferior á ambos á dos, procuraba igualar á estos, y se consideraba muy superior á todos los otros. El en efecto inventaba métodos, y resolvia problemas, que en vano lo hubieran intentado otros geómetras que Cartesio y Fermat. ¡Con que gusto podia pues oir que el público diese á otros los elogios de algunos inventos, que se debian á él muchos años antes! Habia encontrado un método semejante al de los *indivisibles*, y mientras lo tenia zelosamente guardado, gloriandose de poder resolver con él proble- Roverbal.

(*a*) Ibid.