

mónico de Rameau, y de d' Alembert. Las tentativas de Sauveur, y mas aun las breves señales de Newton sobre las vibraciones de las cuerdas sonoras, estimularon á los matemáticos á tratar este problema con rigor geométrico, y vencer la dificultad que presentaba su complicacion.

Tailor. El primero que tuvo la gloria de resolverlo felizmente fué Tailor, quien llegó á demostrar con exâctitud las diferentes leyes de tales vibraciones, y sujetar al cálculo el movimiento de las cuerdas oscilatorias (a). Considera él la longitud y la masa de estas, y despues la longitud de una determinada péndola de segundos, y la relacion de la circunferencia de un círculo á su diámetro, y de aquí pasa á dar una fórmula que expresa el número de las vibraciones de la cuerda durante una oscilacion de la péndola. Busca la figura que toma la cuerda quando forma las vibraciones, y encuentra que no es mas que una especie de cicloyde prolongada, que él llama compañera de la cicloyde, y otros

(a) *Math. increm. directa & inversa*, 1715.

geómetras llaman curva de los arcos. Para determinar esta figura supone, que todos los puntos de la cuerda llegan al mismo tiempo á la situacion rectilínea, y aunque esta suposicion parece bastante manifestada por la experiencia, quiere sin embargo demostrarla aun sin el auxilio de ella. Juan Bernoulli, que examinó el problema de las cuerdas de vibracion despues de Tailor, dió tambien la misma resolucion. Parecia tal vez á estos geómetras, que dicha hipótesis bastase para dar razon de los principales fenómenos de los tonos músicos, y tal vez creian que no bastasen sus fuerzas para resolver el problema fuera de aquella hipótesis en toda su extension. Esta resolucion, aunque de Tailor y de Bernoulli, no satisfizo la escrupulosa delicadez de d' Alembert, y se dedicó á probar que aun en aquella hipotesis puede tomar la cuerda infinitas otras figuras, que igualmente satisfacen el problema, y que sin aquella hipótesis se puede determinar en general la curvatura que en cada momento debe tener la cuerda haciendo sus vibraciones; é hizo en seguida muchas ingeniosas investigaciones sobre la

na-

naturaleza de estas curvas, que él llama *generatrices*, y de la manera que ellas pueden engendrarse, que han acarreado muchas luces á los matemáticos, á los geómetras y á los algebristas, y fué el primero que resolvió el problema en su extensión (a). La resolución de d' Alembert era realmente general, pero siempre suponiendo que la curva generatriz fuese regular, y que pudiese ser comprendida en una

Eulero. *équation continue.* Eulero trató el problema con un método análogo al de d' Alembert; pero le dió mas extensión, y concluyó que qualquier curva *serpeante*, continuada por una y por otra parte alternativamente encima del eje, y debaxo de él, sea regular ó irregular, será propia para la resolución de aquel problema (b).

Esta resolución, aunque hecha con un método muy análogo al de d' Alembert, y semejante á la suya en muchos puntos esenciales, era sin embargo diversa, mas directa, mas analítica, mas aplicable á todas

(a) *Acad. de Berlin*, an. 1747.

(b) *Acad. de Berlin* 1748.

das las cuestiones de esta especie, y evidentemente mas general. No pudo llevar con paciencia d' Alembert, el haber de partir con otro la gloria de un tan bello descubrimiento, ni vió en la resolución de Eulero mas que las señales de semejanza con la suya, ni la creyó suficiente para todos los casos, en los cuales en la curva generatriz no se siguiese la ley de la continuidad (a). Pero no tardó á responderle Eulero, y sostuvo tener su resolución toda la exáctitud necesaria, y la correspondiente generalidad (b). Mientras de este modo se combatian aquellos dos héroes de la matemática, salió al campo otro atleta no menos valeroso, el profundo y sólido Daniel Bernoulli, y de algún modo quiso quitar á ambos á dos la gloria que tanto se disputaban, y darla toda entera á Taylor, primer resolvidor de aquel problema. El cree demostrar que la solución de Taylor es capaz de satisfacer todos los casos posibles, y establece la proposición general, que qualquiera que pueda ser el movimiento

Daniel
Bernoulli.

(a) *Ibid.* an. 1750. (b) *Ibid.* an. 1753.

miento de una cuerda tirante, ésta jamás formará otra cosa que una, ó un complejo de dos ó mas cicloydes prolongadas. Despues quiere que los cálculos de d' Alembert y de Eulero no enseñen nada mas que los de Tailor, y reduce el mérito de la resolución que da él mismo, á solo haber sabido aplicar al método de Tailor una análisis tan nueva, que no existia en tiempo de este, esto es, la de las diferencias parciales. Respondió Eulero á las objeciones de Bernoulli, y el calor de la disputa entre dos geómetras tan profundos, hizo brotar muchas nuevas é importantes verdades sobre las oscilaciones de las cuerdas y del ayre, sobre la formación del sonido, sobre los instrumentos de cuerda y de ayre, y sobre otros muchos puntos pertenecientes á esta materia. Era de ver con gusto, acompañado de admiracion y de respeto, la larga y gloriosa lucha de aquellos dos sublimes ingenios (a): uno explicaba todas las fuerzas de la análisis, el otro para poderse gobernar sin tener necesidad de ella, empleaba todo el arte, y toda la sagacidad de un ingenio inagotable de recursos; uno esparcia prodigamente esfuerzos y cálculos, porque nada costaban á su genio fecundo é inexhausto, el otro siempre sencillo, elegante y fácil ponía su gloria en hacer mucho con pocas fuerzas, sin temer comparecer falto de ellas, y ambos á dos ilustraban, y tenían suspensa y admirada de su sublime saber á toda la Europa matemática (a). Despues de Newton, Tailor, los dos Bernoullis, d' Alembert y Eulero entró animosamente en el campo el jóven la Grange, y le tocó coger los laureles. El exâmina la doctrina de Newton sobre la propagacion del sonido, expone la analisis pura y exâcta del problema segun los primeros principios de la mecánica, y hace conocer la insuficiencia y la falsedad del método newtoniano, y propone otro camino para la resolución fundado sobre principios seguros é incontrastables. Discute las teorías

(a) V. *Eloge de Mr. Daniel Bernoulli, Acad. des Sciens. de Paris* 1782. *op. cit.* (a)

otro para poderse gobernar sin tener necesidad de ella, empleaba todo el arte, y toda la sagacidad de un ingenio inagotable de recursos; uno esparcia prodigamente esfuerzos y cálculos, porque nada costaban á su genio fecundo é inexhausto, el otro siempre sencillo, elegante y fácil ponía su gloria en hacer mucho con pocas fuerzas, sin temer comparecer falto de ellas, y ambos á dos ilustraban, y tenían suspensa y admirada de su sublime saber á toda la Europa matemática (a). Despues de Newton, Tailor, los dos Bernoullis, d' Alembert y Eulero entró animosamente en el campo el jóven la Grange, y le tocó coger los laureles. El exâmina la doctrina de Newton sobre la propagacion del sonido, expone la analisis pura y exâcta del problema segun los primeros principios de la mecánica, y hace conocer la insuficiencia y la falsedad del método newtoniano, y propone otro camino para la resolución fundado sobre principios seguros é incontrastables. Discute las teorías

Tom. VII. Rrr de

(a) V. *Acad. de Berlin* 1753, &c.

La Grange.

de Tailor , de d' Alembert , de Eulero , y las reformas y las objeciones de Daniel Bernoulli ; y pesadas las razones de unos y de otros , concluye que sus cálculos no bastan para decidir tales questões , y propone una resolucion que parece tener todo el mérito de la solidez y de la generalidad. Pasa despues á desenvolver la teoría general de los sonidos armónicos , de los instrumentos de cuerda y de ayre , y por medio de una fórmula sencilla determina el sonido fixo , y los sonidos armónicos que propuso Sauveur , con aquella exâctitud y facilidad , á que aquel no pudo llegar ; y da nuevas y seguras luces para el conocimiento del sonido , aplicables tambien á la práctica de la construccion y del manejo de los instrumentos , á la teoría del eco simple , y á otros curiosos y difíciles puntos de la acústica. Las fórmulas tan sencillas y generales , la integracion de tantas equaciones , la análisis tan fina , clara y exâcta , la penetracion de su ingenio , la solidez de su juicio , llamaron la atencion de todos los geómetras : los mismos atletas de aquella noble lid Eulero , d' Alembert y Bernoulli , los vene-

ra-

rados oráculos de esta ciencia oyeron con respeto la voz del jóven geómetra , y no se desdñaron de ponerlo á su lado en el trono que ellos ocupaban del imperio matemático. Todos tres escribieron desde luego al jóven la Grange , abrazando muchos puntos de su doctrina , pidiendo de otros mayor ilustracion , y venerándolo en todos casi como su árbitro y juez ; y si la Academia de Berlin habia sido pocos años antes el campo de batalla entre aquellos tres ilustres campeones , la Academia de Turin se hizo en su nacimiento el teatro de honor , donde hicieron brillante comparâ la acústica y el álgebra , y donde puede decirse que concurrieron á cortejar á la Grange Eulero y d' Alembert , los soberanos y príncipes de las disciplinas matemáticas. ¡ Que gloria para un jóven geómetra verse á la primera produccion llevado en alas de la fama por todas las academias y escuelas , y recibir los aplausos de los mas célebres geómetras , y los inciensos y adoraciones de todos los otros ! Esta gloria singular que obtuvo entonces la Grange , siempre la ha conservado , y acrecentadola constantemente hasta nues-

Rrr 2

tros

Jordan
Riccati.

tros días , esparciendo siempre nuevas luces sobre la presente materia , que tan copiosamente habia ilustrado (a). Es pues muy glorioso para el conde Jordan Riccati el merecer ser nombrado aun despues de la Grange , y los poco ha celebrados géometras : el tercer sonido observado por Tartini , el sonido falso , y algunos otros puntos nuevos solo por él han sido tratados geométricamente ; y si no ha igualado á sus ilustres antecesores en el primor de la análisis , y en la profundidad de los cálculos , tal vez los ha superado en la novedad de algunas materias , en la extension de las investigaciones , y en el estudio de conformar con la práctica sus teorías , lo que es un mérito no muy comun en tales especulaciones (b).

Mientras estos géometras contemplaban tan atentamente la parte mecánica del sonido , otros dirigian su atencion á la par-

(a) V. *Acad. de Turin* tom. I, II, III. *Recherches*, &c. y *Mechan. anal. sec. part. sect. IX.*

(b) *Delle corde elastiche*, 1767 ; *Suono falso* artic. del *Prodromo della nuova Enc. ital.*

parte física , y otros á la parte armónica del mismo. Mairan , encontrando alguna analogía entre los sonidos y los colores , quiso llevarla mas adelante , y propuso una hipótesis sobre la propagacion del sonido , que se semejaba mucho al sistema de Newton sobre el esparcimiento de la luz y de los colores. El sonido no es mas que las vibraciones de las partículas del ayre producidas por el cuerpo sonoro , y comunicadas á nuestro oido. Quería pues Mairan que las partículas del ayre fuesen de diversa elasticidad , y que al mover la cuerda tocada todas las partículas de ayre que la circuyen , solo siguiese la vibracion en las que fuesen análogas á las vibraciones de aquella , y no de otras cuerdas ; del mismo modo que puestos unísonos dos clavicordios inmediatos , si suena una cuerda de uno , se oye en el otro un pequeño eco , pero solo en la cuerda unísona , y no en las otras. Con esta diversa elasticidad de las muléculas aéreas , y con esta analogía de algunas con las vibraciones que exige un tono , y de otras con las de otro , explica con bastante facilidad muchos fenómenos de la propa-

pagación de los sonidos diversos, que en cualquier otro sistema son muy embarazosos y difíciles, y da razones harto probables de varios accidentes de la armonía. Pero sin embargo esta hipótesis de Mairan no ha sido abrazada de muchos físicos; la diversa elasticidad de las moléculas del ayre muy contraria á su equilibrio, y la infinita variedad que se quiere de tales moléculas, poco conforme á la simplicidad de la naturaleza, han parecido de mayor dificultad que quantas puede soltar dicha hipótesis. Euleró no contento con haber resuelto analíticamente el problema de las cuerdas sonoras, quiso tambien tratar físicamente del sonido, y formar un sistema de los principios de la armonía, y una nueva teoría música (a). Su principio es, que los tonos serán mas consonantes, ó agradables al oído, quanto mas facilmente se dexará comprehender de la mente la razón de sus vibraciones sonoras; y forma despues la escala de los grados diversos de suavidad en los diversos tonos, y de las vibraciones que exige un tono, y de las que exige otro, explicando con claridad la razón de cada uno de ellos.

(a) *Tentamen nov. theor. mus. &c.*

y establece todo el sistema de la armonía musical. Muchos inconvenientes en la teórica, y muchos mas en la práctica manifiesta Eximeno en el sistema músico de Euleró (a), á quien remitimos á los lectores que deseen verlos. Mayor crédito se ha adquirido Rameau, excelente músico, y útil escritor de música; no solo en la Francia, sino tambien en las otras naciones; afortunado por haber tenido por ilustrador y reformador de su doctrina no menos que á un d' Alembert (b). Y es digno de admiracion que los mas célebres géometras de Europa, mientras disputaban sobre los áridos cálculos de la parte mecánica del sonido, se ocupasen tambien casi á un mismo tiempo en las deleitables amenidades de la armónica; mas prudente, en mi concepto, d' Alembert por haberse sujetado al sistema de un músico, sin empeñarse en hacer de nuevo uno suyo, y por haber desechado los difíciles cálculos, sin hacinar, como él

(a) *Orig. della Musica lib. I, c. III.*(b) *Elem. de Musique.*

dice, cifras sobre cifras en su escrito. Del fenómeno observado ya por Sauveur, que al tocar una cuerda se oye además del sonido propio de esta la duodécima y la décima séptima mayor de aquel tono, sacan Rameau y d' Alembert los principales puntos de la melodía y de la armonía, y muchas útiles doctrinas sobre todas las partes de la música. El descubrimiento del tercer sonido, esto es, que quando con dos instrumentos semejantes se forman dos sonidos diversos, se oye otro diferente de ambos á dos, ha dado mas nombre á Tartini, aunque algunos se lo han disputado (a), que su obscurísimo *Tratado de la armonía*, que fundó sobre este descubrimiento, y que vanamente intenta apoyar con razones aritméticas y geométricas. Después de tan ilustres músicos, después de tan célebres filósofos y tan sutiles matemáticos, compareció Eximeno muy versado en la matemática y en la música para conocer íntimamente la naturaleza de la una y de la otra, y muy sincero filóso-

(a) D' Alembert *Elem. de Musique, Dis. prélim.*

sofo para decir libremente su opinión sin respeto á otros escritores, y quitar á la matemática todo influxo sobre la música. Expone él, y refuta los sistemas músicos de los matemáticos y de los músicos que le habían precedido, y quiere fundar su sistema, no sobre cifras y figuras, ni sobre raciocinios matemáticos, sino solo sobre la observacion de la naturaleza. Los tonos de la música no son para él mas que los acentos del habla; y siete son solamente los tonos de las voces y de las cuerdas armónicas, porque por mas que sean las personas, á quienes se haga entonar la voz que les sea mas fácil y natural, no se oirán otras que las de los siete tonos; y así es perfecta la armonía de tercera, quinta y octava, y son consonantes los intervalos que se encuentran entre aquellas cuerdas, porque este es el temple dictado por la naturaleza, y el que sin reglas de música harán muchas personas que quieran formar naturalmente un concierto. De estas simplicísimas observaciones saca las reglas de la música, y hace volver á entrar este arte en la verdadera filosofía. Rousset, Martini, Sacchi y algunos otros

han escrito ó escriben todavía de la música; pero nosotros no podemos seguir todos los pasos de esta ciencia, y tal vez hemos hablado de ella mas de lo que correspondia á nuestro instituto. La música mas ha de ser mirada como arte deleytable, que como ciencia matemática; la acústica, que debe comprehender toda la doctrina del sonido, puede aun considerarse como naciente, y apenas tocada en pocos de sus puntos; empleen en ella sus estudios los géometras y los físicos, que con experiencias y con cálculos, descubrirán muchas útiles verdades, que son ahora desconocidas, y nos formarán una verdadera ciencia de la acústica, como la tenemos de la óptica que pasaremos á examinar.

IN-
m. VII.
222
dan

INDICE

ALFABETICO

DE LAS COSAS MAS NOTABLES

que contiene este tomo.

A

- Abaco* pitagórico pag. 71.
Adler 89, 96.
Alembert: álgebra 190, 204: geometría 304: mecánica 359, 371: hidrostática 404, 410: acústica 440, 493, 503.
Alfonso rey de Castilla: música 471, 474.
Algebra inventada por Diofante 136: descubrimiento de los signos algebraicos 161: cálculo infinitesimal 180.
Alkindi 79, 98.
Allejo 199, 425.
Amontons 361.
Anaximandro 37.
Apolonio 8, 242.
Arabes 24, 43: aritmética 86: álgebra 140: geometría 248: mecánica 319: hidrostática 382: náutica 417: música 462.
Archimedes: aritmética 80: geometría 238: mecánica 314: hidrostática 380.
Aristeo 229.
Aristóteles: música 458.
Aristóteles 447.
Aritmética 66: arábica 72, 86: cuadrados mágicos 102: logaritmos 114: mecánica 118: trac-