ORIGEN,
PROGRESOS

De Emeterio Valverde

ORIGEN,

PROGRESOS

Y ESTADO ACTUAL

DE TODA LA LITERATURA.

ORIGEN,
PROGRESOS
Y ESTADO ACTUAL
DE TODA LA LITERATURA.

OBRA ESCRITA EN ITALIANO

POR EL ABATE

D. JUAN ANDRES,
individuo de las Reales Academias Florentina, y de las Ciencias y buenas Letras de Mantua:

Y TRADUCIDA AL CASTELLANO

POR

D. CARLOS ANDRES,
individuo de las Reales Academias Florentina, y del Derecho Español y Público Matritense.

V. 7

EN MADRID

AÑO DE M. DCC. XCV.

EN LA IMPRENTA DE SANCHA.

Se hallará en su libreria en la *Aduana Vieja.*

Con las Licencias necesarias.

PREFACION.

¿Que no deberá esperar un docto y prudente lector al verse llevado á contemplar el quadro, que representa el *Origen*, *los progresos y el estado actual de las ciencias naturales?* Una obra que contiene el tesoro de las verdades descubiertas por los hombres con el estudio de tantos siglos; una obra que da razon al genero humano de las gloriosas fatigas de sus mas nobles individuos destinados por la naturaleza para cultivar las ciencias; una obra que pone á la vista el poder del espíritu humano, y manifiesta los ingeniosos recursos, que ha sabido encontrar en sus urgencias, y los felices sucesos que en ellas ha obtenido; la historia en suma del *Origen*, *de los progresos y del estado actual de las ciencias naturales* debe por muchos respetos excitar vivamente la uni-

universal curiosidad. Se desea ver la continuada derivacion, y la genealogía, por decirlo así, de los descubrimientos científicos, y conocer los vínculos de mutua dependencia, con que estan ligados entre sí; se siente complacencia en desenvolver la sucesion de las ideas, y desde las baxas y reducidas de los primeros tiempos venir paso á paso á las grandiosas y sublimes de los filósofos de nuestros dias; causa gusto el contemplar juntas, y de un golpe todas las ciencias, que comunmente no se ven mas que separadas y divididas; los jóvenes estudiosos se inflaman del amor á las ciencias al verlas producir tan bellas y tan inesperadas verdades; el ánimo de los hombres grandes se llena de una secreta y suavísima complacencia al observar los penosos esfuerzos, que han sido precisos para adquirir los conocimientos, que ellos miran ahora como muy fáciles y llanos, y poco acreedores á su atencion, y al con-

contemplar la infinita superioridad á que han sabido elevar los suyos propios; se esparcen y se difunden por toda clase de lectores las luces, que los ingenios mas sublimes no han podido adquirir sino á costa de grandes trabajos y fatigas; y discípulos y maestros, doctos é ignorantes, todos pueden gozar de ellas, todos pueden sacar ó placer, ó instruccion, ó consuelo ó aliento. ¿Que bellas imágenes, que nobles rasgos, que vivos colores no presentan errores combatidos y destruidos, verdades desenterradas, y puestas á buena luz, descubrimientos contrastados, y que quedan al fin victoriosos y triunfantes, hombres grandes combatiendo con la naturaleza para arrebatarle algun secreto, hora vencedores, hora vencidos, y tantos otros grandiosos objetos que presenta este argumento? ¿Pero podré yo lisonjearme de satisfacer con mis fatigas tantos deseos de los curiosos lectores? Quanto mas conoznozco lo vasto, vario, y grande de los objetos que se comprehenden en esta historia, tanto mas motivo tengo para temer que lejos de obtener la aprobacion de los estudiosos y de los doctos, que corresponde á una obra de esta clase, pueda solo merecer el desprecio de unos y otros. Las vicisitudes y los progresos de una ciencia sola bastan para ocupar todo el estudio de un docto filósofo, que quiera describirla dignamente; solo la historia de la física experimental le parece á Priestley una obra inmensa, y superior á las fuezas de qualquier hombre por mas erudíto que sea (*a*). ¡Que confusion para mi temeridad, que con mis débiles talentos, con las angustias del tiempo, que debo dividir en tantas otras materias, y con lo reducido de las páginas, que requiere la naturaleza de esta obra, me atrevo á ofrecer la historia no solo de la fí-

si-

(*a*) *Hist. de l' electr.* Préface.

sica experimental, ó de una ciencia sola, sino de todas las ciencias naturales juntas! Sé, que para tratar bien la historia de una ciencia es preciso volverla y revolverla parte por parte, penetrar íntimamente todos sus puntos, repetir muchas veces el exâmen de cada uno de ellos, ver todas sus relaciones, conocerla plenamente en toda su extension, y estar bien enterado de todas las adherencias que pueda tener, empaparse de sus máxîmas, de sus reflexîones y de sus miras, estar poseido de la dignidad y extension de sus luces, y de sus verdades, no pensar, no hablar, no respirar, no vivir sino solo para aquella ciencia que se quiere representar. Y yo que por lo tardo de mi ingenio no puedo elevarme á comprehender con libertad y seguridad las sutiles teorías, y los sublimes descubrimientos de los genios inventores, ni por lo reducido del tiempo puedo manejar cómodamente todos los pun-

 tos,

tos, y hacerme dueño de ellos, sino que habiendo apenas entrado con dificultad en los umbrales de una ciencia debo luego abandonarla para pasar á otra; y dividido en tantas materias no puedo dedicarme libremente á alguna, y deben serme todas extrangeras, ¿podré acaso lisonjearme de tratar con algun decoro y dignidad el orígen, los progresos y el estado actual de todas las ciencias naturales?

A mi falta de inteligencia y capacidad se agregan las dificultades de la execucion por lo reducido de los volumenes destinados á este argumento, y por la variedad de los lectores, cuya aprobacion se desea obtener. ¿Como es posible en tan pocas páginas abrazar tantas materias? ¿como ponerlas á tal qual buena luz, y adornarlas con la correspondiente eloqüencia? La quadratura del círculo ha dado al docto y sabio Montucla abundante materia para un tomo

de historia; dos ó tres historias diversas tenemos de la cicloyde; muchos volumenes nos ha dado Priestley de la historia de sola la electricidad; ¿como pues podremos nosotros en poquísimas líneas tratar todas estas materias? ¿Quantos tomos no llenan la historia de la medicina de le Clerc, y la de la anatomía de Portal? ¿Quantos no ocupará la de la cirujía de Perilhe si llega á ser conducida á su término? La historia de la jurisprudencia romana forma en manos de Terrasson un tomo en folio. Dos gruesos tomos ha dado Montucla de la historia de las matemáticas, sin llegar á tocar este siglo, que podria darle materia para otros dos. Quatro, ó por mejor decir cinco, ha empleado Bailly para presentar la historia de la astronomía. ¿Como pues nosotros podremos comprehender en solos dos tomos no solo todas estas, sino tantas otras ciencias, que todavia no han sido expuestas historicamente por otros escritores? Por escasa que sea mi erudicion, hubiera podido decir no pocas veces acá y acullá cosas nuevas, ó desconocidas, ó mal entendidas, ó no bien explicadas por los autores que han tratado tales materias; ¿pero como hemos de llenar las páginas de discusiones, citas y discursos quando se necesitan para tantas otras cosas, conocidas, sí, pero necesarias é indispensables para el complemento de toda la obra? Los hombres grandes, los brillantes descubrimientos inflaman la fantasia del escritor, y lo llevan á contemplar las relaciones, á entregarse á las reflexîones, á extenderse en los elogios, y á manifestar la impresion que hace en su ánimo la vista de ingenios tan grandes y de tan nobles verdades. Pero nosotros debemos sufocar todo movimiento del ánimo, abstenernos de toda reflexîon, explicacion é ilustracion, tocarlo todo solo de paso, y sujetarnos á una fria é insipida nar-

racion. ¡Quanto mas fácil no nos hubiera sido, y menos fastidioso y molesto el dexar correr libremente la pluma, y poner en el papel quanto para mayor ilustracion y mayor ornamento de las materias nos presentaba la lectura, la meditacion y la fantasia, y llenar muchos y gruesos tomos sobre cada una de estas ciencias, que no haber de contar continuamente las líneas, medir las palabras, cortar las expresiones y trabajar mucho mas para reducir á pocas páginas, y hacer breve y obscuro, seco é informe, lo que en mayor extension tal vez hubiera salido espontaneamente con mayor felicidad! La diversa disposicion de los lectores aumenta la dificultad en la execucion de esta obra. Los doctos y perítos en la ciencia de que se trata, no necesitan particularidades é individuaciones, y por ello muchos no quieren mas que ideas generales, y pocos hechos, pero presentados de modo que abracen la historia de las ciencias y de los siglos; sin embargo algunos desean encontrar todo aquello que saben, y se complacen de ver que se hace mencion de todos los conocimientos que á ellos les han costado algun trabajo de lectura y meditacion. Los jóvenes estudiosos, y los lectores menos instruidos necesitan una instruccion mas individual; y por ello desearán algunos encontrar los hechos explicados y extensos, ver interpuestas las ideas, y seguir paso á paso los progresos que ha hecho la ciencia; pero á otros al contrario, por lo mismo que entienden poco aquellas materias, les cansan las particularidades é individuaciones, y se contentan con ideas generales y rasgos importantes, que conserven viva y atenta la curiosidad, sin molestarse en individuadas exposiciones. Nosotros hemos procurado guardar un prudente medio, no usar solo insinuaciones y generalidades, ni hacer tampo-

co muy freqüentes, y muy extensas explicaciones, desenvolver algunos descubrimientos, y exponer algunas verdades, otras solo nombrarlas, y dexarlas para la inteligencia y erudicion de los lectores, y procurar á los menos doctos alguna instruccion, y á los doctos algun placer. Pero conociendo la dificultad de la empresa, y nuestra debilidad, tememos con razon al contrario causar enfado á los doctos, dexar sin instruccion á los estudiosos, y merecer la desaprobacion de todos.

¿Por que pues no abandonar, segun el consejo de Horacio, una empresa que no puede executarse con el debido esplendor, y no ir en busca del desprecio y de las reprehensiones? Yo me acojo á la indulgencia y discrecion de los lectores. Una obra de esta naturaleza faltaba aun á las ciencias; y era ciertamente útil, y aun tal vez necesaria para su mejor cultura. Si yo he tenido la audacia de emprenderla , si empleo todas mis fuerzas, quales sean, y no perdono trabajo ni fatiga para salir con alguna felicidad, ¿no podré esperar la indulgencia de los sabios por mis buenos deseos y diligencia, antes que sus reprehensiones por el incauto atrevimiento, ó por la inocente temeridad? Si despues, á pesar de todo el estudio, y de todos los esfuerzos, no salgo con la felicidad que deseo; si alguna vez padezco equivocacion en la inteligencia de algunos autores; si carezco de la correspondiente exâctitud y claridad en la explicacion de los descubrimientos, y de las teorías; si incurro en otros defectos, que hubiera debido, y aun tal vez hubiera podido evitar, me lisonjeo que no culparán mi apuro, ni me pondrán esta tacha, sino que atribuirán á lo grande y dificil de la empresa los defectos de la execucion, y que de todos modos mas querrán una obra tal con algunos defectos, que no tenerla de modo alguno: á mi me basta poder presentar una obra, que no sea enteramente inutil á los lectores, donde los estudiosos encuentren algo que aprender, y no tengan los doctos mucho que reprobar. Lo vasto de la materia no ha permitido comprehenderla en un tomo: hemos tenido que extenderla á dos, y queda aun sobrado reducida. Las matemáticas, y aquellas partes que comunmente se entienden con el nombre de física, se comprehenden en este primero, y se reservan para el otro la química, la botánica, la medicina, y todas las otras ciencias naturales. Se incluyen en estas la lógica, la jurisprudencia y otras, las quales aunque mas justamente puedan llamarse intelectuales y morales, las llamamos aquí naturales para distinguirlas de las eclesiásticas ó divinas, que darán materia para el último tomo, y las unimos á aquellas atendiendo mas á una cómoda distribucion de las materias en es-

ta

ta obra, que á una rigurosa exâctitud en la division de las ciencias. El deseo de los lectores, y nuestro cuidado debe ser de tratar exâcta y perfectamente todas las ciencias baxo qualquier órden que se dispongan: las presentamos á los lectores del mejor modo que hemos sabido hacerlo, y convidamos al zelo y al saber de los doctos á recibir esta como un simple bosquexo, y á que nos den ellos una obra completa y perfecta qual la requiere la dignidad de la materia, y qual no puede esperarse de la debilidad de nuestras fuerzas.

INDICE
DE LOS CAPITULOS
DE ESTE TOMO.

LIBRO PRIMERO.

De las Matemáticas.

CAPITULO I.

De

CAPITULO II.

Pro-

CA-

CAPITULO III.

Ba-

La

CAPITULO IV.

CAPITULO V.

CAPITULO VI.

CAPITULO VII.

CAPITULO VIII.

ORIGEN, PROGRESOS Y ESTADO ACTUAL DE LAS CIENCIAS NATURALES.

No hay monumento mas claro de la sublimidad, y estoy por decir divinidad del espíritu humano, que el quadro y la historia de las ciencias naturales. Colocado el hombre en este vasto teatro de la naturaleza, abandonado á lo grosero de la materia, yaceria ocioso é inerte, ocupado únicamente en satisfacer sus materiales necesidades, deslumbrado de las falsas representaciones de los sentidos, sin cuidarse de extender mas allá su curiosa vista. El espíritu activo y vivaz levantando los ojos al rededor de esta gran máquina del universo, no satisfaciéndose con las imágenes que le presentan los falaces sentidos, rompiendo el velo con que oculta la naturaleza sus operaciones, entra en el sutil y atento exâmen de los mas secretos

Merito de la historia de las ciencias naturales.

PRO-

ORIGEN, PROGRESOS Y ESTADO ACTUAL DE LAS CIENCIAS NATURALES.

No hay monumento mas claro de la sublimidad, y estoy por decir divinidad del espíritu humano, que el quadro y la historia de las ciencias naturales. Colocado el hombre en este vasto teatro de la naturaleza, abandonado á lo grosero de la materia, yaceria ocioso é inerte, ocupado únicamente en satisfacer sus materiales necesidades, deslumbrado de las falsas representaciones de los sentidos, sin cuidarse de extender mas allá su curiosa vista. El espíritu activo y vivaz levantando los ojos al rededor de esta gran máquina del universo, no satisfaciéndose con las imágenes que le presentan los falaces sentidos, rompiendo el velo con que oculta la naturaleza sus operaciones, entra en el sutil y atento exâmen de los mas secretos y

Merito de la historia de las ciencias naturales.

y recónditos fenómenos, y se atreve á penetrar en los mas arcanos misterios de la naturaleza. Pequeños resplandores vistos en el ayre en una noche obscura, tácitos movimientos no perceptibles mas que á fuerza de repetidas observaciones, lo elevan á formar infinitos mundos, y á establecer las leyes que gobiernan toda la máquina del universo. En vano la naturaleza esconde en los cuerpos fluidos desconocidos, porque su penetracion se los hace descubrir, y donde menos se pensaba sabe encontrar segura guia para dirigirse en las difíciles navegaciones, medios oportunos para defenderse de los meteoros, y correspondientes auxîlios para elevarse á caminar por el ayre. Las subterraneas minas, los invisibles insectos, los brutos feroces, los páxaros, los peces, las conchas, las plantas, las piedras, todos los seres de la naturaleza, tanto pequeños como grandes, todos se rinden á sus sagaces miradas, y se sujetan á sus científicas contemplaciones. El espíritu mismo, aunque indivisible é inmaterial, sufre una rigurosa anatomía, y se hace á sí mismo objeto de finísimas especulaciones. El mismo

mo Dios, aunque á él tan superior, se le da tambien á conocer, y se dexa, por decirlo así, manejar en sus meditaciones filosóficas: toda la naturaleza creada con su mismo criador está sujeta á la contemplacion del espíritu humano, y dividida en varias clases forma las diversas clases de las ciencias naturales, y da un glorioso testimonio de la sublimidad y penetracion del espíritu humano, que ha sabido sujetarla á sus sutiles teorias. Ahora pues, ¿que agradable espectáculo no deberá presentar la historia de estas ciencias? Ver, por decirlo así, elevarse á nuestra vista de pequeños fundamentos el vasto edificio de todas las ciencias; ver á algunas nacer y crecer en poco tiempo, otras apenas nacidas caer en olvido, sin volver á ponerse en pie hasta despues de muchos siglos; leves principios producir rápidamente grandiosos descubrimientos; fecundas y nobles verdades quedar por muchos años estériles y ociosas. Observar por otra parte las naciones asiáticas conservando por tantos siglos las semillas de las ciencias, y produciendo tan pocos frutos: los griegos al contrario agitados de un espíritu de curioriosidad correr á las naciones extrangeras para aprender sus ciencias, y traidos apenas muy superficiales conocimientos de ellas, con las fatigas de su propio ingenio, y con las propias especulaciones formar perfectas ciencias, y hacerse maestros de todo el mundo: y el resto todo del universo, fuera de la Grecia, estarse descuidado y ocioso, sin cuidarse de promover estas ciencias, y ni aun de conservarlas: salir del interior del Asia, del medio de la ignorancia y de la barbarie los árabes, hacer renacer las ciencias griegas, adelantarlas, y transmitirlas á los europeos, que por tantos siglos las habian despreciado; y estos despues abrazarlas con tanto ardor, que en pocos años les han acarreado mayor engrandecimiento del que en tantos siglos habian recibido de los árabes, de los griegos, y del mundo todo. Estas vicisitudes y estas variedades deben ofrecer á un filósofo observador un agradable é instructivo espectáculo, y nosotros las bosquejaremos brevemente en los libros de este tomo.

De las naciones antiguas.

Sin dar crédito á las muchas fábulas, que algunos vanos rabinos, y algunos modernos filólogos nos quieren vender de los recónditos conocimientos de química, de historia natural, y de matemática de Adan, y de nuestros primeros padres; sin abrazar por verdaderos los libros de Adan, de Abel y de otros pretendidos escritores antiquísimos; sin reconocer como reales y verdaderas sus escuelas y sus diversas sectas filosóficas, que algunos imprudentes escritores pretenden asegurar, podremos creer que los primeros hombres, dotados de fibras mas vigorosas y robustas que las nuestras, y faltos de tantos pensamientos que distraen nuestra mente de las meditaciones científicas, buscasen su deleyte en la contemplacion de la naturaleza, la tomasen por objeto de sus discursos, y formasen de algun modo varias clases de ciencias. Su larguísima vida debia facilitar el establecimiento de tales ciencias. Los principios hallados por un buen ingenio, podian ser por él mismo sólidamente confirmados con muchos siglos de repetidas experiencias y observaciones, y podian tambien mas facilmente conservarse sin alteracion, y acrecentarse ventajosamente con los reiterados coloquios, y viviendo perpetua é interminablemente juntos los estudiosos que los abrazaban. Si Hipócrates y Archîmedes, si Galileo y Newton hubiesen vivido la larga vida de los antediluvianos, ¿quanto mas adelantadas no estarian ahora la medicina, la física, la geometría, la mecánica, la óptica, la astronomía? Y á la verdad los inventos de las artes, que ciertamente suponen muchos conocimientos científicos, algunas expresiones de la Escritura, y los testimonios de Josefo y de otros hebreos, nos podrán dar algun no pequeño fundamento para presentar muy científicos á los hombres de aquella remota edad. Las mismas opiniones de los filósofos y eruditos modernos, que hacen ascender á una remotísima antigüedad la cultura de algunas naciones asiáticas, aumentarian el crédito á las ciencias anteriores al diluvio, cuyas reliquias, aunque alteradas y corrompidas, bastaron para dar nombre de doctos á los indios, á los chinos, á los caldeos, á los egipcios y á los persas. ¿Pero para que sirve desvariar vanamente con simples conjeturas, y fabricarnos con estudiados raciocinios un pue-

pueblo erudito y científico, de cuyos científicos conocimientos jamas sabremos nada con seguridad, ni podremos proferir fundadamente juicio alguno? Ni aun de las ciencias de las gentes antiguas, que fueron las primeras en procurarse la cultura, tenemos suficientes monumentos para texer una descripcion bastante clara. Hemos hablado en otra parte (*a*) de las ciencias de aquellos pueblos antiguos con la parsimonia y moderacion, á que nos obliga la incertidumbre, y la falta de monumentos; y ahora la copia de las materias que faltan á tratar no nos permite volver á aquellas, que pocas ó ningunas verdaderas noticias podrian presentarnos de nuevo, y solo nos darian campo para violentas cavilaciones. Unicamente diremos, que los asiáticos, los egipcios, los fenicios, y aquellos pueblos llamados bárbaros por los griegos, poseyeron mucho antes que ellos algunas ciencias; que no solo sus libros, y sus tradiciones, sino que hasta los mismos griegos nos dicen, que quando la Grecia todavía estaba envuelta en una profun-

(*a*) Tom. I, c. I.

funda ignorancia, cultivaban ya aquellos pueblos la astronomía, la física y la filosofía, y que los griegos tuvieron que reconocerlos por muy superiores en su saber, y debieron sujetarse á su enseñanza. Pero sinembargo las ciencias, por decirlo así, bárbaras, no nos parecen aun bastante dignas del ilustre nombre de ciencias, y solo entre los griegos las podemos ver elevadas á tan sublime dignidad.

De los griegos.

Maravillosa gente es la griega, y singular y única en todo género de cultura y de saber. Los griegos, príncipes de la poesía, de la eloqüencia y de la historia; los griegos que tuvieron un Homero, un Píndaro, un Sófocles, un Platon, un Demóstenes, un Heródoto; los griegos venerados maestros en todas las clases de las buenas letras; los griegos obtuvieron igualmente la primacía en las matemáticas, en la medicina, y en todas las ciencias; y pudieron del mismo modo gloriarse de tener los Hipócrates, los Archîmedes, los Apolinos, los Diofantes, los Hiparcos, los Aristóteles, los Teofrastos, y los caudillos y maestros de todas las clases de las ciencias. Y ciertamente seria dificil decidir si la Grecia debe mas su gloria á las buenas letras, ó á las ciencias; como tambien si deben mas á la Grecia las ciencias, ó las buenas letras. Al ver, digamoslo así, divinizados por tantos siglos á Homero, Platon, Demóstenes, Heródoto, y otros eloqüentes escritores griegos, y honrados con las adoraciones de quantos profesan algun amor á la amena literatura, parece que el esplendor del nombre griego deba atribuirse todo á las buenas letras. Pero quando se reflexîona que Hipócrates, y los otros medicos y quirurgicos griegos son todavia venerados despues de tantos siglos, y se ven aun en estos dias alabados, estudiados, traducidos é ilustrados por Cocchi, por Boerhaave, por Gorther, por Piquer, por Lorry, y por otros doctos y estimados médicos modernos; al pensar que Euclides, Archîmedes, Apolonio y otros geómetras griegos son mirados con respeto, leidos con atencion, y recomendados con particulares elogios por Simson, por Maclaurin, y por el mismo Newton; que los doctos miembros de la academia de las ciencias (a), que

(a) *Descr. des anim.* Præfat.

Bekman (*a*), Buffon y otros modernos hablan con admiracion de la historia de los animales de Aristóteles; que Teofrasto y Dioscórides se citan con respeto y adhesion por los botánicos de nuestros dias, es preciso confesar que las glorias científicas de la Grecia en nada son inferiores á las de las buenas letras; Archîmedes á los ojos y en la pluma de Newton, Hipócrates sobre el bufete de Boerhaave, Aristóteles en las manos de Buffon son tan gloriosos trofeos de las ciencias de la Grecia, que pueden equivaler á los mas religiosos inciensos ofrecidos á su amena literatura. Bello y grandioso es ciertamente para unos ojos filosóficos el espectáculo de los griegos, poetas, oradores é historiadores, que de un vuelo se elevan á la mayor perfeccion con las alas de su imaginacion, y de su propio gusto: pero el ver á los mismos griegos luchar valerosamente con la naturaleza, y sin ningun auxîlio extrangero, con sola la fuerza de su propio ingenio arrebatarle tantas verdades celosamente encubiertas, entrar en el escabroso campo de las ciencias, é internarse con tanta felicidad haciendo á cada paso útiles y gloriosos descubrimientos, ¿no debe causar igual placer, y tal vez mayor admiracion á quien sabe apreciar justamente los esfuerzos de la imaginacion y del ingenio? Ni el ser las obras griegas exemplares mas perfectos en las buenas letras que en las ciencias, ó el haber llegado los griegos en las composiciones de la amena literatura tan adelante como los modernos, quando en las científicas han sido aventajados de estos casi infinitamente, puede tenerse por prueba de deber mas á la Grecia las buenas letras que las ciencias. Las obras de la buena literatura como nacidas únicamente de la imaginacion, y del gusto, y que no tanto provienen de los antecedentes exemplares, como de la propia sensibilidad del que las compone, pueden desde luego llegar á su conveniente perfeccion; pero las ciencias tienen un curso mas grave y pausado, necesitan de repetidos esfuerzos del ingenio, y de continuadas experiencias y observaciones; nuevas meditaciones descubren defectos en las adelantadas teorías, y dan exâctitud

(*a*) *De ortu et progr. Zoologiae apud vet.* c. I, §. 10.

tud y perfeccion á los anteriores descubrimientos: las repetidas experiencias, y las nuevas observaciones desenvuelven nuevas verdades, y manifiestan errores tenidos con aparentes razones por principios indubitables; y las ciencias, obra del ingenio, del trabajo y del tiempo, no pueden en su infancia esperar alguna perfeccion y sazonada madurez. Pero si reflexîonamos la necesidad que en el restablecimiento de las ciencias ha habido de las luces y de las obras de los griegos, deberémos confesar que no deben menos á la Grecia las ciencias que las buenas letras. Sin las obras de Eurípides y de Xenofonte hubieran dado Cornelle sus tragedias, Fenelon el Telemaco, y Richardsón la Clarise; pero sin Hiparco, y sin Tolomeo no hubieran hecho Ticon y Galileo sus descubrimientos astronómicos; ni sin los astrónomos y geómetras griegos hubiera podido levantar Newton la gran fábrica de sus *Principios*. Pero sin detenernos en semejantes cotejos podrémos ciertamente asegurar, que fueron los griegos singularmente beneméritos en todas las ciencias naturales, y deberémos mirar con admiracion enno-

ble-

blecidas todas las clases de las ciencias con muchos nombres de ilustres griegos. ¡Quantos escritos, no solo de medicina, sino tambien de cirugía y de farmacia! ¡Quantos ilustres escritores sobre la música! Si la geometría se gloría de los ilustres nombres de Euclides y de Archîmedes, el álgebra reconoce por padre á Diofante. Si Hiparco y Tolomeo han acarreado muchos adelantamientos á la astronomía, la mecánica debe á Ctesibio y á Eron su científico establecimiento. Finalmente hasta de los mismos sueños formaron los griegos una ciencia, y dexaron escritos algunos libros de onirocrítica. No hay ciencia ni tan grande y sublíme, ni tan pequeña y baxa, que los griegos no la hayan manejado, y no la hayan reducido á mayor claridad y nobleza; ni hay parte de ciencia alguna en cuya historia no se vean campear uno ó mas griegos.

De los romanos.

No podrémos decir lo mismo de los romanos, aunque émulos de los estudios de los griegos. Quanto se acercaron á estos en la cultura de las buenas letras, y aun en algunas clases les aventajaron, otrotanto estuvieron lejos de seguirles en la

per-

perfeccion de las ciencias. No hay un matemático, ni un astrónomo célebre, que pueda dar crédito á las ciencias romanas. No una secta médica ó filosófica, ni un caudillo de escuela, ni un libro clásico y magistral de física ó de otras ciencias. Si alguno se ponia á escribir de estas materias, lo hacia expilando los archivos griegos, amontonando doctrinas griegas, y trabajando mas sobre la erudicion griega, que sobre el original y propio saber. Antes bien muchos de estos escritores procuraban adoptar el idioma griego, como sino encontrasen en el romano palabras propias y correspondientes á las materias tratadas. En griego escribieron L. Aruncio de los astros, y Sestio Nigro y Julio Baso de medicina (*a*); en griego expuso Sexto pitagórico sus sentencias como las tenemos aun ahora; y en griego trataron materias científicas algunos otros romanos. Y si un Rabirio, un Amafanio, y algun otro filósofo quiso tratar las materias científicas en lenguage latino, todos usaron de un estilo tan rústico é inculto que no podian leer-

(*a*) Plin. *Elenc. lib. omnium* &c.

leerse sino por quien no tuviese oido romano, ni hicieron que no pudiera decir con verdad Ciceron, que la filosofía habia estado hasta entonces sepultada entre los romanos, y no habia obtenido las luces de las letras latinas (*a*). Pero ni aun entre los romanos faltaron estudiosos de las ciencias, que las cultivasen con cuidado, y procurasen hacerlas comunes á sus nacionales. Plinio (*b*) y otros antiguos citan tantos romanos escritores de astronomía; de medicina, y de otras ciencias naturales, que podria formarse un catálogo no pequeño de solo sus nombres. Pero la idea del estudio y del saber de los romanos, no tanto debe formarse por el número de los escritores, quanto por el uso que ellos hicieron de las ciencias. Si César no escribió obras mecánicas como Eron, hizo sin embargo un puente sobre el Rhin, donde expuso los mas profundos conocimientos de mecánica y de geometría; y aun quando él no hubiese escrito las obras astronómicas, que publicó con singular honor del

(*a*) Cicer. *Tusc. quaest.* lib. I, n. III.
(*b*) Lib. I, et al.

del saber romano, solo sus eruditas combinaciones para la coreccion del año civil no bastarian para darnos una ventajosa idea de su talento astronómico, y para ponerlo al lado de los buenos astrónomos de la Grecia? Quanto estudio hiciesen de las ciencias los romanos puede probarlo el exemplo de Vitrubio. Con disculpar él su ignorancia predicando una máxîma, útil igualmente que verdadera, esto es, que basta á un arquitecto entender medianamente de las otras ciencias lo que es necesario para su perfeccion, nos dá una noble idea de la cultura y erudicion de los artistas romanos. Puesto que si un arquitecto, contento con los conocimientos necesarios para su arte, no pudo satisfacerse con la lectura de las obras griegas y latinas pertenecientes á la arquitectura, sino que tambien se engolfó en el estudio de la física, y pasando á las matemáticas no supo contentarse en los primeros elementos, sino que se internó en las mas profundas explicaciones geométricas y mecánicas, músicas y astronómicas de Archítas, de Aristóxeno, de Eratóstenes, de Archîmedes, de Aristarço, de Eudoxîo, de

de Ctesibio, de Apolonio y de los mas sutiles y sublimes matemáticos de la Grecia, ¡que alto concepto no deberémos formar de los arquitectos, y de los otros artistas romanos! ¡Quan universal no habrá sido entre los romanos la cultura de las ciencias, quando los arquitectos debian internarse tanto en la física, y en las matemáticas! ¡Quan profundas noticias no se habrán adquirido los otros, que hacian profesion de literatos! En efecto vemos al orador Ciceron tratar doctísimamente qüestiones filosóficas y teológicas, y manejar tambien la física con plena erudicion de quanto entonces se sabia de ella (a); vemos al poeta Lucrecio hablar tan propia y adequadamente de varios puntos de física, que es aun respetado y seguido de los físicos de nuestros dias; vemos escribir á Virgilio con tanta exâctitud en todas las materias, que merece ser admirado por Macrobio como erudito en el derecho civil y en el augural, en la astronomía, y generalmente en toda clase de fi-

(a) *De nat. Deor.* lib. II, et alib.

filosofía (*a*). Séneca, aunque no profesaba la física, trata las qüestiones naturales con una sutileza y erudicion, que no se hubiera podido desear mas del mas docto físico griego de aquella edad; antes bien algunas observaciones suyas, y algunas reflexîones manifiestan en él unos ojos finos, y una mente sólida y recta, superior á las preocupaciones de su tiempo, y capaz de comprehender las mas sublimes teorías del nuestro. Plinio, aunque alguna vez se dexa llevar de su entusiasmo en algunos razonamientos físicos, sin embargo muestra generalmente un conocimiento de la naturaleza, que daria honor á qualquier docto profesor de historia natural, y que causa admiracion en un hombre siempre ocupado en ministerios gravísimos. Era preciso que Frontino y los otros superintendentes de los aqüeductos tuviesen muchas y no vulgares noticias de mecánica, y de hidrostática. Las armas romanas que nos describen Vitrubio, Vegecio y otros, prueban en los artífices de ellas conocimientos ballísticos y geométricos.

Las

(*a*) Sat. I, cap. XXIV. et alib.

Las luces de las ciencias naturales de los romanos resplandecen singularmente en sus escritos de agricultura. ¡Quantas noticias meteorológicas, quanta historia natural, quanta botánica, quanta física, quanta filosofía! La geometría misma, y la astronomía se hacen servir para la mas exâcta pericia de su agricultura (*a*), y donde menos se esperaban aparecen los vastos y extensos conocimientos científicos de los romanos. Pero en la moral reynaban principalmente los romanos, aunque sin las escuelas y las sectas de los griegos; y tal vez por esto mismo reynaban, porque no sujetos á un sistema particular, ni jurando en la palabra de algun maestro, podian mejor exâminarlos todos, y con mas sosegado é imparcial juicio escoger de cada uno las verdades mas probables. Bruto, segun dice Plutarco (*b*), recorrió todas las escuelas de los griegos, y no hubo filósofo griego que no oyese, ni secta filosófica que no conociese. Y Bruto en efecto escribió de la virtud, y trató materias filosóficas con tal extension y exâctitud,

C 2 con

(*a*) Colum. lib. V, et alib. (*b*) In *Bruto*.

con tal copia y elegancia, que, segun el testimonio de Ciceron (a), no dexó en aquellos puntos que desear de los griegos. ¿Y que griego podrá ser justamente preferido á Ciceron? ¡Quantas materias filosóficas no trató profundamente con sólido juicio, con erudicion, y con eloqüencia, qual no se ve en los griegos mas celebrados! ¿Que griego epicureo, ó que estoyco podia exponer los sentimientos de su secta con aquella claridad, precision y fuerza con que Ciceron hace hablar á sus estoycos, y á sus epicureos? El mismo Platon y Aristóteles no llenan su doctrina de tanta copia de razones, y de tanta amenidad de erudicion como vemos que lo hace Ciceron. La sublimidad de los pensamientos, y la gravedad de la doctrina elevaron al latino Séneca sobre los griegos estoycos sus maestros. El se rie con freqüencia de las vanas qüestiones, tras las quales se perdian los filósofos de su tiempo, y manifiesta quales deben ser las miras de las especulaciones filosóficas, qual el fin del verdadero filósofo. En suma los ro-

(a) Ac. lib. I, n. III.

romanos sin el estrepito de las sectas griegas, sin la soberbia de los griegos doctores, sin la celebridad de las escuelas y de las academias llamaban á su servicio las ciencias griegas; y sino tenian Platones, Aristóteles, Teofrastos, Archîmedes é Hiparcos, las entendian tal vez mas que los mismos griegos de su tiempo, que hacian profesion de enseñarlas. Y no debe esto causar admiracion á quien esté medianamente versado en la història literaria. Sin salir de Italia, ni del presente siglo tenemos el exemplo de muchos magistrados, y de otros personages, que lejos de las escuelas, y de las academias, estaban tan profundamente instruidos en las ciencias, que hubieran podido dar lecciones á los mismos maestros que las enseñaban. Los condes Fagnani y Riccati, apartados de las cátedras, y de los puestos académicos, tal vez no eran inferiores en las matemáticas á los profesores Grandi y Manfredi, y ciertamente eran superiores á todos los otros de su tiempo. Una vasta y profunda erudicion eclesiástica y profana, adquirida en medio de los empleos civiles, y de las ocupaciones políticas, hacia al marques Maf-

Maffei un teólogo harto superior á los presumidos doctores de las escuelas, y le inspiraba obras teológicas, cuyo mérito no eran capaces de conocer la mayor parte de los coetáneos profesores de teología. ¿Y en que género de erudicion, y de ciencias no podrá competir con los académicos, y con los catedráticos el conde Carli, aunque haya sido presidente de un tribunal, y distraido por gravísimos negocios? Quantos Carlis, quantos Maffeis, quantos Fagnanis y Riccatis no contaba Roma en sus senadores, ocupados, si, en los negocios civiles, y distraidos de la profesion de las ciencias; pero sin embargo iguales, y tal vez superiores en el sólido saber á los ociosos griegos de su tiempo, que pasaban su ruidosa vida en las escuelas, y en las academias! Pero es preciso confesar que los romanos, aunque procuraban adquirir los conocimientos de las ciencias naturales para su propia erudicion, y por sus propias ventajas, no pensaban como los griegos en acrecentar las mismas ciencias con sus descubrimientos, y en contribuir con sus libros á la instruccion de la posteridad. Bien que aun en

esto podrémos decir con verdad, que Lucrecio, Celso, Séneca y Plinio, han dado á los posteriores muchas luces para el adelantamiento de algunas ciencias; y deberemos concluir, que si los romanos no deben ser respetados como maestros en las ciencias naturales, sin embargo no se han de despreciar, como lo hacen muchos, como rústicos é ignorantes.

De los tiempos baxos.

Pero tales se hicieron luego con el corrompimiento que se siguió del buen gusto, y con el abandono de los buenos estudios. El amor á la propia erudicion estimulaba á los romanos á la lectura de los griegos, y al estudio de sus útiles doctrinas; y faltando aquella cultura se perdió el amor á las ciencias, no se leyeron mas los griegos filósofos y matemáticos, ni se pensó en el estudio de la naturaleza. ¡Que infelicidad haber de andar pescando en la larga serie de diez ó mas siglos un Macrobio, un Boecio, un san Isidoro, un Beda, un Gerberto y algun otro rarísimo, para poder ver que á lo menos se habia conservado entre los latinos alguna sombra de las primeras noticias elementares de algunas ciencias, y la inteligencia á lo me-

menos de las voces técnicas! Pero un descubrimiento, una atenta y justa observacion, una clara y exâcta explicacion de algun fenómeno, una ligera muestra de haber á lo menos gustado las ciencias sublimes, y de conocer los libros, no puede encontrarse en los muchos millares de doctores y de escritores que florecieron en todo aquel tiempo. La verdadera cultura de las ciencias solo se encuentra en los árabes, los quales, como con bastante extension lo hemos probado en otra parte (*a*), á todas dirigieron atentamente sus estudios, y no solo conservaron los conocimientos de los griegos descuidados por los latinos, y olvidados de los mismos griegos, sino que añadieron muchos suyos propios, y aumentaron con sus descubrimientos el caudal de las ciencias: los árabes son los únicos que entran á la parte con los griegos en la gloria de felices inventores y padres de las ciencias naturales. Pero su mayor mérito consistió en hacer renacer entre los europeos algun amor á estas ciencias, que despues se mejoró y perfi-

De los árabes.

(*a*) Tom. I, c. VIII. &c.

ficionó con el estudio de los griegos. La lectura de los griegos afinó en los europeos el gusto de las ciencias, no menos que el de las buenas letras. Empezaron á tomar nuevo aspecto las matemáticas luego que Regiomontano traduxo del original griego algunas obras de los matemáticos griegos, que, ó aun no estaban traducidas, ó solo se habian traducido de las traducciones arábigas. Nuevo espíritu, y nuevo lustre adquirió la medicina con el estudio de los médicos griegos. Las guerras literarias sobre la filosofía de Platon, y la de Aristóteles empezaron á hacer conocer lo futil de las sutilezas, y formar alguna idea de la buena filosofía. Y generalmente al ardor de los estudios griegos deben todas las ciencias su verdadero restablecimiento. Pero las ciencias griegas pasando á las manos de los modernos han recibido en pocos siglos tan notables aumentos, que parece que hayan adquirido un nuevo ser. Las mas sublimes teorías de los geómetras griegos no son mas que los primeros grados para remontarse á las elevadísimas contemplaciones de los nuestros. De las pueriles adivinaciones aritméticas,

De los modernos.

á que estaba reducida el álgebra, la vemos ahora, erigida en árbitra de la naturaleza, tenerla sujeta á sus formulas, y á sus señales. La astronomía, que en boca de los griegos no sabia mas que tartamudear, ahora explica con eloqüencia los movimientos de las estrellas, el órden de los cielos, y el sistema del universo. La aplicacion de la geometría, de la observacion, y de la experiencia á la física ha hecho de esta una verdadera ciencia, que antes solo se reducia á vanas conjeturas y ridículos sofismas. La química, que, ó no conocida, ó mal usada, solo habia servido para inutiles, ó tal vez aun perjudiciales investigaciones, ahora en poco tiempo se ha puesto en estado de dar leyes á la física, á la historia natural y á la medicina. Todas las ciencias en suma se ven ahora tratadas con mas conocimiento, sutileza y solidez, todas han adquirido en pocos años mayores luces de los europeos, de las que habian podido obtener en tantos siglos de todas las mas estudiosas y cultas naciones. El ingenio humano, que por tanto tiempo habia estado entorpecido y ocioso, parece que ahora haya querido reparar las pérdidas

das de su pasada ociosidad, y se haya apresurado á recompensar en breves años los largos siglos consumidos en una vergonzosa y deplorable inércia: y no será facil decidir si debe causar mas admiracion el ver al espíritu humano yacer por tantos siglos en un ocioso sopor, ó el observarlo despues, despierto apenas del profundo letargo, hacer en pocos años tan maravillosos progresos. Ciertamente dan honor á la humanidad un Galileo, un Cassini, un Cartesio, un Leibnitz, un Newton, un Boerahave, un Morgagni, un Aller, un Lineo, y tantos otros hombres grandes, y por decirlo así sobrenaturales, que puede contar como dados á las ciencias en el breve transcurso de dos siglos: y la inmensa provision de tantas máquinas, y de tantos instrumentos quirúrgicos, anatómicos, químicos, físicos y astronómicos, fabricados en estos dos siglos; y la continua y no interrumpida serie de tantos y tan ruidosos descubrimientos hechos en estos tiempos en todas las ciencias, prueban un vigor y una feracidad del espíritu humano, que de algun modo lo elevan á participar del divino. No, la copiosa fecundidad de la naturaleza no quedará exhausta con la produccion de tantos ingenios ; las fuerzas del espíritu humano no se debilitarán con los repetidos y vehementes esfuerzos de tan sublimes y dificiles inventos , podemos esperar que continuen naciendo la Granges , la Places , Buffones , Bonets , Tissots , y otros ingenios semejantes , como los tenemos ahora; y que siempre se irán enriqueciendo las ciencias con útiles y gloriosos descubrimientos, sin que podamos temer que presto deberémos lamentarnos de ver perderse el ingenio humano tras vanas y sofisticas inepcias , ó sepultarse en una vergonzosa ociosidad. Nosotros entretanto consolándonos con tan alegres pronósticos entraremos gustosos á contemplar separadamente los progresos que hasta ahora ha hecho cada una de las ciencias , y bosquejaremos de todas una historia, aunque muy superficial é imperfecta.

LI-

LIBRO PRIMERO.

DE LAS MATEMATICAS.

CAPITULO I.

De las matemáticas en general.

¡Quan diverso no es el espectáculo que nos presenta la historia de las matemáticas , del que nos ofrece la historia de las otras ciencias! Vese en estas nacer hipótesis y sistemas , cambiar opiniones , suceder errores á errores , y descubrir no mas de quando en quando alguna indubitable verdad : solo en las matemáticas camina la mente humana libre y segura , adelanta con mas ó menos velocidad , pero adelanta de una en otra invencion , y siente casi de continuo la inexplicable complacencia de hacer nuevos descubrimientos. En ninguna ciencia se han padecido menos equivocaciones que en esta , en ninguna se han descubierto tantas y tan sublimes verdades , y en ninguna parte se ve tan lleno de

Preeminencia de las matemáticas.

piosa fecundidad de la naturaleza no quedará exhausta con la produccion de tantos ingenios; las fuerzas del espíritu humano no se debilitarán con los repetidos y vehementes esfuerzos de tan sublimes y dificiles inventos, podemos esperar que continuen naciendo la Granges, la Places, Buffones, Bonets, Tissots, y otros ingenios semejantes, como los tenemos ahora; y que siempre se irán enriqueciendo las ciencias con útiles y gloriosos descubrimientos, sin que podamos temer que presto deberémos lamentarnos de ver perderse el ingenio humano tras vanas y sofisticas inepcias, ó sepultarse en una vergonzosa ociosidad. Nosotros entretanto consolándonos con tan alegres pronósticos entraremos gustosos á contemplar separadamente los progresos que hasta ahora ha hecho cada una de las ciencias, y bosquejaremos de todas una historia, aunque muy superficial é imperfecta.

LIBRO PRIMERO.

DE LAS MATEMATICAS.

CAPITULO I.

De las matemáticas en general.

¡Quan diverso no es el espectáculo que nos presenta la historia de las matemáticas, del que nos ofrece la historia de las otras ciencias! Vese en estas nacer hipótesis y sistemas, cambiar opiniones, suceder errores á errores, y descubrir no mas de quando en quando alguna indubitable verdad: solo en las matemáticas camina la mente humana libre y segura, adelanta con mas ó menos velocidad, pero adelanta de una en otra invencion, y siente casi de continuo la inexplicable complacencia de hacer nuevos descubrimientos. En ninguna ciencia se han padecido menos equivocaciones que en esta, en ninguna se han descubierto tantas y tan sublimes verdades, y en ninguna parte se ve tan lleno

Preeminencia de las matemáticas.

de gloria el espíritu humano, como corriendo los vastos campos de las matemáticas. Y tal vez esta preeminencia, esta pureza é incontaminacion de errores, esta capacidad de mas energica y clara demostracion, esta mayor certidumbre y evidencia han dado á aquellas ciencias, á distincion de las otras, el nombre de matemáticas, quando no quiera decirse que les conviene este nombre, por haber sido las primeras disciplinas que se enseñaban en las escuelas, y por ello las llama Platon (*a*) *Propedia*, y Senócrates (*b*) *Basa de la filosofía*, ó bien por haber sido las primeras que se reduxeron á ciertos y determinados principios, y se elevaron al honor de verdaderas ciencias. Nosotros darémos ahora una mirada en general sobre el curso de las matemáticas para exâminarlas despues distintamente en cada uno de sus ramos.

Matemáticas de los antediluvianos.

Si las dos columnas descriptas por Josefo hebreo (*c*), donde los hijos de Set expresaban sus conocimientos astronómicos, tuviesen algun sólido fundamento; si fuese

(*a*) *De Rep.* VII. (*b*) Laer. in *Xenocr.* VI.
(*c*) *Ant.* lib. I. c. IV.

legítimo el libro de Enoc, ó á lo menos pudiese apoyarse sobre algun antiguo monumento la tradicion citada por Eusebio (*a*), de haber sido Enoc el inventor de la astronomía; deberia tomarse de aquellos antiguos antediluvianos el origen de las matemáticas: la ciencia astronómica que parece haber sido la primera que cultivaron las naciones, ademas de que es una parte de las matemáticas, exîge los conocimientos de todas las otras, por lo qual puede justamente referirse el origen de aquellas ciencias, adonde se descubren los primeros vestigios de la astronomía. Pero aquellas tradiciones hebráicas no son mas que fábulas muy despreciadas de todos los críticos, para que nos detengamos á hablar de ellas. Ni podrémos hacer mas aprecio del saber matemático del antiquísimo pueblo de la Atlantida, ingeniosamente imaginado por Bailly, y sostenido con tanto aparato de eloqüencia y de erudicion: son tantas y tan fuertes las impugnaciones que ha sufrido aquel pueblo de cé-

De los Atlantides.

(*a*) *Præp. ev.* lib. IX.

célebres escritores, y singularmente del eruditísimo Carli (*a*), que ahora seria temeridad el querer recurrir á él para encontrar el origen de las matemáticas. Su mismo autor Bailly parece haberlo ya abandonado y olvidado; puesto que en su reciente tratado de la astronomía indiana procura, si, dar á esta una antigüedad superior á quanto pueda imaginar la mas erudita cronología; pero no piensa ya en sus atlantides, ni intenta derivar de sus escuelas á la indiana los conocimientos astronómicos. Pero no por esto deberémos fiar mas de la pretendida antigüedad y perfeccion de la astronomía indiana, á quien parece haber vuelto ahora aquel docto astrónomo sus eruditos obsequios. Bailly es un gracioso mago, que con su encantadora facundia nos arrebata y transporta donde le da la gana; y hora nos hace correr á las eladas regiones del septentrion para encontrar allí el origen de las ciencias, hora nos detiene en las amenas riberas del Ganges para mostrarnos los mas antiguos vestigios de las mismas; y en todas partes

De los indios.

(*a*) *Lettr. amer.* t. III.

tes nos hace creer que descubrimos lo que él quiere presentar á nuestra imaginacion. Es preciso estar muy alerta contra todas sus proposiciones, es preciso dexar sosegar la fantasia agitada por su mágica voz, es preciso apartar la ilusion causada por su seductora eloqüencia; y entonces tal vez se verá reducida á nada, ó á mera casualidad aquella exâctitud de resultados, que ciertamente no puede ser obra de una tan rústica astronomía, dirigida solo á pronósticos astrológicos (*a*); entonces tal vez se descubrirán equivocaciones cronológicas, facilísimas de padecerse en una historia tan remota de tiempo y de lugar, y tan falta de monumentos; entonces tal vez caerá por tierra la gran máquina de la astronomía indiana, levantada por aquel sagaz arquitecto sobre una ingeniosa combinacion. Nosotros exâminaremos el mérito de esta quando tratemos particularmente de la astronomía; y ahora solo diremos, que por mas que quiera darse grande antigüedad á las ciencias de los indios, cier-

(*a*) V. Cassini *Ac. des sc. de* 1666 *jusques à* 1699, t. II, y VIII.

ciertamente podrán contarse pocos progresos de ellas, y poquísima será su influencia en las de los europeos. Mas distantes estuvieron aun los chinos, separados de nosotros no menos que de lugar de toda literatura, y aun civil comunicacion; y por mas que se glorien de tener de tiempo de Yao, esto es, de mas de quarenta siglos ha, un tribunal de matemáticas; por mas que á una igual, ó á lo menos poco menor antigüedad, refieran observaciones astronómicas, ó teoremas geométricos, en nada han contribuido al adelantamiento de las matemáticas, ni pueden tener derecho alguno á nuestro reconocimiento. A regiones mas cercanas, á los caldeos, á los egipcios, á los fenicios debemos recurrir para encontrar el principio de nuestras matemáticas. Aristóteles lo atribuye generalmente á los egipcios, y dice (*a*), que en Egipto se formaron aquellas ciencias, porque allá los sacerdotes estaban libres de otros negocios y ocupaciones, y podian vacar á las meditaciones y al estudio. Estrabon (*b*) deri-

De los chinos.

(*a*) Metaph. I. (*b*) Lib. XVI.

riva, sí, de los egipcios la geometría de los griegos; pero la aritmética y la astronomía de los fenicios; y dice que estos eran excelentes en tales ciencias, porque el continuo comercio y navegacion los obligaba á cultivarlas, como las inundaciones del Nilo hicieron pensar á los egipcios en la invencion de la geometría. Porfirio divide este honor literario entre tres naciones diversas, y dexando á los egipcios la institucion de la geometría, y la de la aritmética á los fenicios, da á los caldeos la gloria de la cultura de la astronomía. (*a*). Y en efecto los caldeos han comunicado á los posteriores mas luces astronómicas, que aritméticas los fenicios, y geométricas los egipcios: y la astronomía caldaica, no solo tuvo influxo en la egipciaca, y en la griega, sino que hay gran probabilidad, como cree Gentil (*b*), de que tambien lo haya tenido en la indiana, y que los conocimientos astronómicos de los bracmanes les viniesen de los caldeos. De estos, ó de los fenicios, ó

De los caldeos.

E 2 bien

(*a*) *In Vita Pythag.* (*b*) *Voy. aux Indes, prém. part.*, ch. III.

bien de los egipcios, pasaron algunos rayos de luz astronómica á los antiguos griegos de los tiempos aun rústicos; y Lino escribió entonces de la esfera (*a*), y poco despues Homero y Esiodo manifestaron en sus poemas no ser desconocidas en la Grecia las observaciones celestes.

Verdadero principio de las matemáticas.

Pero el verdadero principio de las matemáticas solo puede tomarse de los griegos posteriores, quando se vieron por estos establecidos teoremas, fixados métodos para resolver problemas, y reducidas á principios generales, y á leyes estables algunas particulares y vacilantes verdades. Y esto sucedió cabalmente quando la Grecia se gloriaba de sus sabios, y empezaba á ver elevar sus escuelas filosóficas. Beda quiere llamar á Tales autor de la física, y por física entiende la aritmética, la geometría, la música, y la astronomía (*b*). Pero Beda, escritor muy moderno, que vivió en tiempo de poca crítica, no puede tener en esta parte autoridad alguna, y no tenemos otro fundamento para decir que Ta-

(*a*) Laerc. *in Proœm.* (*b*) *Opp.* tom. I. *De arithm. num. Lib.*

Tales se dedicase ni aun ligeramente á la aritmética, ni á la música. Pero sinembargo no carecia de todo derecho para obtener los honores de matemático; y Laercio (*a*) nos da noticia de algunas investigaciones suyas geométricas y astronómicas. El mismo Laercio cita tambien á un Euforbo anterior á Tales, que trabajó ya en la geometría, é hizo en ella varios descubrimientos: y alguno, leyendo en Plutarco (*b*), que Licurgo despreció la proporcion aritmética, y adoptó la geométrica, tal vez querrá dar aun harto mayor antigüedad á las matemáticas griegas. Pero Plutarco no habla en aquel pasage de la teoría de Licurgo en el estudio sobre las proporciones, sino de su práctica en el gobierno de la república. Si es cierto, como quiere Suidas, autor á la verdad muy reciente (*c*), que Anaxîmandro, sucesor de Tales, compuso un compendio de geometría, ¿quantas serian ya en aquel tiempo las investigaciones y los descubrimientos geométricos, quando habia necesi-

Tales.

(*a*) *In Thalete.* (*b*) Sympos. VIII, quæst. II. (*c*) *In Anassim.*

sidad de reducirlos á compendio, y merecian un abreviador del saber de Anaximandro? Pero sinembargo la verdadera aurora del esplendor de las matemáticas solo despuntó en las escuelas de los pitagóricos; y podremos decir con razon, que el verdadero principio de este estudio debe atribuirse á las meditaciones de aquellos filósofos. *Los pitagóricos*, dice expresamente Aristóteles, autor á la verdad el mas grave que puede citarse en esta materia (*a*), *los pitagóricos fueron los primeros que se dedicaron al estudio de las matemáticas.* Estos por cierto método general, y por ley de la escuela, no por curiosidad privada, como Tales, Anaximandro y algun otro filósofo de su secta, se aplicaron á las especulaciones matemáticas, y no á una sola parte, sino que extendieron su estudio á toda la enciclopedia matemática; y los pitagóricos fueron en realidad los primeros que obtuvieron, y que verdaderamente merecieron el nombre de matemáticos. Así se ve en efecto en A. Gelio (*b*), que entre las varias clases de estu-

Los pitagóricos.

(*a*) Metaph. I. (*b*) Lib. I. c. IX.

tudiantes que componia la escuela pitagoriaca, la segunda era la de los matemáticos. Aun posteriormente refiere de sí san Justino martir (*a*), que jamas pudo obtener el ser admitido á la filosofía de los pitagóricos, y que no se lo impidió otra cosa que la precisa é indispensable obligacion de haber de pasar antes por la clase de las matemáticas. Y á la verdad toda la doctrina aritmética, y quanto antiguamente se sabia de los números, todo se debia á Pitágoras, todo salia de su escuela; de la misma salian tambien las qüestiones algo mas arduas, y los mejores descubrimientos de geometría y de astronomía, á los quales no llegaban los filósofos de las otras escuelas; y á Pitágoras, á Hiparco y á otros de aquella secta debe particularmente la música el estar sujeta á cálculos matemáticos, y de un arte de mero solaz y divertimiento verse reducida á exâcta ciencia. Así que parece que con harto fundamento podremos decir con Aristóteles, que el principio del estudio matemático debe tomarse de la escuela de Pitágoras. Y esta tal vez habrá si-

(*a*) *Dialog. cum Tryph.*

sido la única razon de una restriccion del nombre de matemáticas, introducida en los tiempos posteriores entre los griegos y entre los latinos, que puede parecer estraña, y hecha solo por capricho. Como la aritmética y la música, la geometría y la astronomía eran las ciencias predilectas de los pitagóricos, y estas se enseñaban en su secta á los discípulos, que ocupaban la clase de los matemáticos, estas solas obtuvieron posteriormente en las escuelas el nombre de matemáticas; y aunque Anaxâgoras, Demócrito, Euclides y otros hubiesen escrito de óptica; aunque Archîtas, Archîmedes, Eron, y muchos mas hubiesen ilustrado la mecánica; aunque Aristóteles hubiese colocado repetidas veces la óptica y la mecánica en la clase de ciencias exâctas, no menos que la música y la astronomía (*a*), sinembargo estas solas con la aritmética y la geometría gozaron, con preferencia de todas las otras, la honrosa distincion de entrar en el quadrivio latino, y en la griega enciclopedia, y de formar el estudio matemático de muchos siglos. Pero dexando es-

(*a*) Post. anal. I, et al.

estas y otras semejantes investigaciones para quien mas oportunamente pueda emplear en ellas sus eruditos ocios, nosotros volviendo á tomar el curso que siguieron las matemáticas, las veremos levantar rápidos vuelos con las alas de los griegos, y de los pequeños descubrimientos de Tales y de Pitágoras elevarse á las analisis de Platon, á atrevidos problemas geométricos, y á vastas y sublimes teorias astronómicas, y las hallaremos cortejadas por Architas, Timeo, Filolao, Platon, Eudoxio y tantos otros célebres geómetras y astrónomos, capaces de hacer respetable é ilustre qualquier ciencia por poco apreciable que fuese. Tantos fueron y tan grandes estos cultivadores de las matemáticas, tantas y tan nobles sus investigaciones, y los felices descubrimientos, que desde luego llamaron la curiosidad de los eruditos, y en tiempo de Alexandro dieron ya copiosa materia á dos historias de las matemáticas en varios libros compuestas por Eudemo y por Teofrasto.

¿Pero que era todo esto sino los primeros principios de las matemáticas griegas, y pequeños crepúsculos de la clara luz, Adelantamiento de las matemáticas griegas.

luz, que en los tiempos posteriores se esparció por aquella docta nacion? La escuela de Alexandria, erigida y soberanamente protegida por los Tolomeos, fue la fecunda madre de los héroes de aquellas ciencias. Los Aristeos, los Euclides, los Eratóstenes, los Apolonios, los Hiparcos las elevaron á aquel grado de dignidad, que hizo que los posteriores las mirasen con respeto y con admiracion, y el grande Archîmedes fue el dios de las matemáticas griegas, ante quien inclinan respetuosamente la cabeza los Leibnitz y los Newtones, los venerados oráculos de las modernas. Este noble ardor é intenso estudio de los griegos se manifestó en su mayor esplendor baxo el imperio de los Tolomeos, pero continuó haciéndose conocer en los siglos posteriores; y Tolomeo, Diofante y Papo pueden acreditar bastantemente que la escuela alexandrina no queria tan presto abandonar su gloriosa prerogativa de amorosa madre, y fecunda inventora de todas las clases de las matemáticas; y despues Teon, Ipacias, Proclo y Eutocio mostraron que todavía se conservaba una plena inteligencia de las su-

sublimes teorias de los maestros griegos, y un profundo conocimiento de aquellas ciencias; y aun mas recientemente Marino napolitano, Isidoro milesio, Diocles, Eron, Filon, Esporo y algun otro, que pueden ser tenidos como las últimas reliquias de aquella escuela, supieron encontrar nuevas verdades, ó ilustrar con nuevas demostraciones las ya descubiertas, é hicieron aun saltar alguna chispa del fuego inventor de sus maestros. Pero cayendo hácia la mitad del siglo séptimo la escuela alexandrina, se extinguió tambien en los griegos el genio matemático, y no se vieron ya doctos inventores, que acarreasen á aquellas ciencias algun adelantamiento. Los árabes destructores de la escuela de Alexandria, los árabes conquistadores en gran parte del imperio de los griegos, los árabes estudiosos y émulos de su saber, los árabes procuraron reemplazarlos en la cultura de las matemáticas, y pretendieron de algun modo recompensar con su estudio las pérdidas que habian causado á las mismas. Los árabes en efecto conservaron los conocimientos de los griegos, y aun en algunas partes los au- Matemática de los árabes.

 men-

mentaron no poco, y los transmitieron á los europeos enriquecidos con algunos descubrimientos suyos. Carecian entonces los europeos de todo conocimiento matemático, y necesitaban de las luces y de la enseñanza de los sarracenos para poder entrar con alguna felicidad en el estudio de aquellas ciencias. Su estudio en aquellos tiempos mas tenia por objeto el uso de los ritos eclesiásticos, que la propia erudicion, ó el adelantamiento de sus estudios; y se reducia á saber calcular los movimientos de los astros para formar un buen kalendario, y fixar oportunamente las fiestas eclesiásticas. Las disputas agitadas desde los primeros siglos de la iglesia sobre el verdadero tiempo de la celebracion de la pasqua, y la costumbre de usar del canto y de la música en los oficios divinos, excitaron el estudio de muchos santos padres para dedicarse á las matemáticas, como útiles para formar los ciclos pasquales, y para regular las fiestas y el canto de la iglesia. Así que san Hipolito estudió la astronomía para componer un canon pasqual, san Agustin escribió de música, y otros padres griegos y latinos

De los europeos.

nos se aplicaron á estos estudios, para dar mayor decoro, y mas exâcto arreglo á las fiestas, y al canto de los oficios divinos. Este espíritu eclesiástico de los santos padres, mas que el geométrico de los Archîmedes y de los Hiparcos, estimuló á los griegos posteriores y á los latinos á la lectura que á veces hicieron de algun libro geométrico, y al manejo del astrolabio. Y de un estudio emprendido con tan pequeños objetos, y con miras tan reducidas, ¿que provecho podian sacar las matemáticas, aquellas ciencias sublimes y divinas destinadas á caminar por los vastos campos de la naturaleza, y á pesar sus cuerpos, á remontarse á los cielos, y medir el curso de los astros, y á entrar de algun modo á la parte con Dios en el orden del universo? Veamos por mayor qual fuese en aquellos tiempos baxos el estado de las matemáticas entre los griegos, y entre los latinos. Desterradas estas de la Grecia por la irrupcion de los sarracenos, fueron de nuevo llamadas á principios del siglo X por Constantino Porfirogénito, de quien dice Cedreno (*a*), que res-

De los griegos de los tiempos baxos.

(*a*) *Comp. hist.*

restableció con su industria la aritmética, la geometría, la música y la astronomía, que por el descuido é ignorancia de los emperadores precedentes estaban arruinadas mucho tiempo habia. Pero no se vió fruto alguno de este restablecimiento, ni hubo ningun griego escritor, que tratase de aquellas ciencias, y renovase entre sus nacionales la antigua inclinacion á cultivarlas. Vino finalmente en el siglo XI Pselo el joven, y adquirió tanto crédito su saber, que á una voz fue llamado por los griegos coetaneos doctísimo y sapientísimo; y despues se ve alabado por Alacio (*a*), como superior á quantos griegos le precedieron y le subsiguieron en aquellos tiempos. ¿Pero qual es este decantado saber de Pselo, tan superior á los de su edad? Tenemos todavía sus obras matemáticas, y no descubrimos en ellas mas que ensayados los primeros elementos de aquellas ciencias; y un tratado suyo astronómico, que se conserva inédito en la real biblioteca de Madrid, y del qual nos ha dado individual noticia Yriarte (*b*), hace

(*a*) De Psellis XXXIII. (*b*) *R. Bibl. Matr. codd. gr. ms.* p. 175.

ce ver suficientemente, que todas las miras del grande estudio de Pselo se dirigian principalmente á encontrar el legítimo tiempo de la pasqua, de la septuagésima, y de otras fiestas eclesiásticas. No parece que el nombre y las fatigas de Pselo formasen muchos prosélitos en el estudio de las matemáticas; y ni en aquel siglo, ni en los subsiguientes, se vió entre los griegos ningun escritor, que pudiese dar algun movimiento y calor á aquel estudio. Solo en el XIV se vieron algunos doctos, que parecia quisiesen volver á la Grecia las desterradas ciencias, tan cultivadas por sus gloriosos antepasados. Barlaamo é Isac argino son tal vez los dos griegos, que mas justamente han merecido el nombre de matemáticos despues de la destruccion de la escuela alexandrina; pero si hemos de decir la verdad, estos mismos, tanto como eran superiores en los conocimientos geométricos á sus coetaneos, otro tanto quedaban inferiores á los antiguos mas mediocres; y el libro de Barlaamo citado por Fabricio (*a*), sobre el

(*a*) *Bibl. gr.* tom. X.

el verdadero método para conocer el tiempo de celebrar la pasqua, y los dos de Isac referidos por Petavio (*a*), para encontrar los ciclos del sol y de la luna, y por consiguiente la pasqua, la quaresma y otros dias eclesiásticos, nos hacen ver claramente qual fuese el verdadero objeto de sus estudios. Teodoro Metoquita, Nicéforo, Grégora, Nicolas Cabasila y otros pocos, que con algun cuidado se aplicaron á tales ciencias, todos tomaron por objeto el ciclo pasqual y el kalendario; ninguno intentó entrar en mas sublimes teorias, ninguno pensó en enriquecer el espíritu humano con nuevas luces.

De los romanos.

Si tal era el estado de aquellas ciencias entre los griegos, que habian sido por muchos siglos excelentes maestros, ¿que miserable destrozo no habrán sufrido de los latinos, que jamas hicieron profesion de cultivarlas? Sabemos que Sexto Pompeyo tuvo crédito de matemático entre los romanos, que C. Sulpicio Gallo trató de los eclipses, que L. Aruncio y Julio Cesar escribieron sobre los astros, y que Varron

(*a*) *Uranol.*

ron y Nigidio Fígulo compusieron algunas obras matemáticas. Pero en medio de todos estos escritores se lamentaba el juiciosísimo Ciceron de los estrechos confines á que reducian los romanos el estudio de las matemáticas, y de los pocos progresos que entre ellos habian hecho aquellas ciencias (*a*). Nosotros no tenemos ahora los escritos matemáticos de los romanos; pero sinembargo podemos creer, que no contribuyesen mucho al adelantamiento de sus estudios. Varron, erudito universal como era, habrá escrito como erudito, no como geómetra; y de Nigidio Fígulo, tambien versado en varia erudicion, dice A. Gelio (*b*), que tenia tal sutileza y obscuridad, que no era leido de nadie. En efecto, ¿donde se ven citados Varron, ó Nigidio Fígulo ú otro romano por nuevos descubrimientos, ó nuevas demostraciones, por observaciones sutiles, ó por qualquiera ilustracion de alguna parte de las matemáticas? Solo Julio Cesar ocupará siempre un honroso lugar en su historia, no tanto por sus obras,

(*a*) *Tusc.* l. II. (*b*) Lib. XIX, c. XIV.

obras, aunque estas tal vez habrán sido superiores á todas las de los romanos, y ciertamente mas estimadas de los griegos que todas las otras, quanto por la correccion del kalendario, bien que aun en esta tuvo gran parte Sosígenes. Si Vitruvio, Columela, Frontino y otros romanos manifestaron haber hecho algun estudio de las matemáticas, esto servia solo para la propia cultura y erudicion, y para poseer mas plenamente las materias que se proponian ilustrar, no para acarrear algun adelantamiento á aquellas ciencias. Pero este mismo amor á la erudicion empezó á decaer entre los latinos; y ni Apuleyo (a), ni Macrobio (b), ni Casiodoro, ni Marciano Capela, ni el verdadero ó supuesto san Agustin, ni el enciclopédico san Isidoro, dan muestras en sus obras matemáticas de haberse internado en aquellas ciencias, mas allá de la mera inteligencia de las primeras palabras técnicas.

De los latinos de los tiempos baxos.

Boecio puede ser tenido por el maestro de las matemáticas de los latinos; y en efecto lo reconocieron como tal Casiodoro, san Isidoro, Beda y todos los otros.

Boecio.

Pero Boecio con todo su magisterio no hizo mas que traducir con alguna libertad las obras mas elementares de los griegos, como lo confiesa él mismo de las de aritmética, geometría y música, que nos han quedado, y lo dice Casiodoro de las de astronomía y de mecánica, que se han perdido. Estas traduciones de Boecio, aunque citadas como libros clásicos y magistrales por san Isidoro, y por Beda, los dos hombres mas eruditos que hubo despues de él, fueron sinembargo en los tiempos posteriores abandonadas, y casi perdidas; y vemos que Gerberto (a) parece estar muy contento por haber encontrado ocho libros suyos de astronomía, que ya no tenemos, y su geometría. El único libro, en que despues estudiaban los latinos las matemáticas eran las etimologías de san Isidoro, del qual ciertamente podian aprender poco; pero lo poco que se sabia, que estaba reducido á la inteligencia de algunas voces propias de aquellas ciencias, todo provenia de la fuen-

(a) *De Mundo.* (b) *In Somn. Scip.*

(a) Ep. VIII. *Adalb. Rhem. Archiep.*

fuente de aquel santo doctor. Seame lícito hacer aquí una breve reflexîon en defensa de san Gregorio, que infundadamente es acusado como ignorante enemigo de las matemáticas, y bárbaro exterminador de los matemáticos. Viendo estos estudios en manos de san Agustin, de Casiodoro, de Boecio, de san Isidoro, hermano de san Leandro íntimo amigo de san Gregorio, y de otros obispos y personas eclesiásticas y piadosas, contemplándolos empleados en regular las fiestas de la iglesia, y servir al culto divino, ¿podrá creerse que aquel gran santo, todo atento á los oficios eclesiásticos, y al culto del Señor, desterrase las matemáticas, y prohibiese su estudio? ¿Aquel santo, tan empeñado en promover el canto, y la música de la iglesia, era posible que condenase las matemáticas, de quienes la música era una parte? ¿Aquel santo, zeloso observador de las instituciones de los concilios, y de la práctica de la iglesia, habrá desterrado la astronomía, tenida en mucho aprecio por el concilio niceno, por los papas, y por toda la iglesia, y empleada en la regulacion de la pasqua, y de las fiestas eclesiásticas? Si en algun sentido es cierto lo que dice solo Juan Sarisbery, autor posterior de seis siglos, que el santo *Mathesim jussit ex aula recedere* (a), no puede entenderse mas que de la astrología judiciaria, desterrada repetidas veces baxo el mismo nombre por los emperadores, pero de ningun modo del verdadero estudio de aquellas ciencias abrazado por los santos padres; y san Gregorio, amante de la música, y cuidadoso de la regularidad y exâctitud en el culto divino, lejos de ser reputado como enemigo de las matemáticas, deberá ser tenido por su protector. Pero volviendo á seguir el curso de este estudio, entre los pocos que en aquellos siglos lo cultivaron, solo Beda es el que de algun modo puede llamarse matemático, y ponerse al lado de Boecio; y antes bien sus obras aritméticas, muy superiores á los informes tratadillos de Casiodoro, de Marciano Capela, de san Isidoro, y de los otros latinos para poderse comparar con ellos, son de algun modo preferibles á los mismos libros

San Gregorio falsamente creido perseguidor de los matemáticos.

Beda.

(a) Policrat. lib. II, c. XXVI.

bros aritméticos de Boecio, porque internándose un poco mas que estos en la parte práctica de aquel arte, pueden interesar mas nuestra curiosidad: é igualmente los conocimientos astronómicos de Beda, aunque dirigidos, segun el uso de todos los latinos y griegos, á formar ciclos pasquales, y á regular el kalendario, fueron tambien superiores á los de los otros, porque llegaron á descubrir la precedencia, que despues del concilio niceno se habia seguido en los equinoccios, y la necesidad que habia de reformar el kalendario. Pero este estudio de Beda, tenido mas como eclesiástico, que como científico, no era bastante eficaz para inspirar en el ánimo de los latinos el amor á las matemáticas; ni vemos despues de él mas que algun kalendario algo mas exâcto que los vulgares y comunes (a), y los superficiales tratados del quadrivio de Alcuino, que de algun modo pueden reputarse como fruto de sus luces.

El verdadero principio de nuestro estu-

(a) V. Ximenez *Intr. istor. del vecchio é nuovo gnomone.*

Influxo de los árabes en las matemáticas de los europeos.

dio matemático proviene de los árabes, como lo hemos probado en otra parte con bastante extension. Si Gerberto encontró en España un maestro de matemáticas en el obispo Aiton, un escritor de aritmética en Josef, y otro de astronomía en Lupito; si fueron muchísimos los escritos matemáticos de los españoles, de los quales, como dice Burriel (a), se conservan todavía algunos volúmenes en la biblioteca de Toledo; si corrieron dentro y fuera de España, con particular crédito de doctrina, la fama y las obras de Juan de Sevilla; si en España se compusieron las tablas alfonsinas, que aunque poco exâctas é imperfectas, fueron el origen de la astronomía de los europeos, todos son frutos del magisterio y del influxo literario de los sarracenos. No de Beda, ni de Alcuino, sino de los árabes, quisieron aprender las matemáticas Atelardo godo y Morley; y en la misma fuente bebió posteriormente sus conocimientos físicos y matemáticos el célebre Rugero Bacon, que de

De los españoles.

De los ingleses.

(a) Carta al P. Rábago, y Paleogr. Españ.

de algun modo puede ser tenido como el glorioso padre de los muchos y nobles físicos y matemáticos, que despues ha dado á las ciencias la Inglaterra. De Alfragano y de los árabes, y de las traducciones arábigas de los griegos, formó Juan de Sacrobosco su celebrada *Esfera*, que por tantos siglos ha sido tenida por la obra clásica de la astronomía de los europeos; y ademas él mismo tal vez no contribuyó menos al adelantamiento de las matemáticas propagando, como lo hizo, la aritmética de los árabes. ¿A quien sino á los árabes debe la óptica el verse gloriosamente colocada en la clase de las matemáticas? Aunque ilustrada por Euclides, y por otros griegos, se veia sinembargo excluida de la enciclopedia griega, y del quadrivio latino; y hubiera quedado desconocida de los europeos, á no ser por Vitelion, que instruido en las escuelas arábigas, y embebido en la doctrina de Alhacen se la hizo conocer y gustar.

De los alemanes.

De los árabes igualmente se derivan los progresos de las matemáticas en Alemania, donde verdaderamente se han formado y crecido en perfectas ciencias. ¿No se vieron

ron estas cultivadas en Alemania, quando Gerberto volvió de España instruido en las disciplinas arábigas? Fruto de aquella instruccion pueden ciertamente reputarse, no solo las varias obras geométricas, astronómicas y de todas clases, que compuso Gerberto, sino tambien el zelo que él manifestó en sus cartas por el adelantamiento de tales ciencias, y el ardor que excitó en el ánimo de los alemanes por la cultura de ellas. El mismo emperador Oton escribió á Gerberto rogándole que le comunicase sus luces sobre la aritmética. El obispo de Utrech, Adelboldo, dirigió á Gerberto ya papa un opúsculo sobre el modo de encontrar la solidez de una esfera. Escribió poco despues en el siglo XI Ermano Contrado sobre la quadratura del círculo, sobre la medida, y sobre la utilidad del astrolabio, sobre los eclipses, y sobre otros puntos astronómicos, y en todo hizo mucho uso de los conocimientos arábigos, y manifestó quan general fuese entonces el magisterio de los sarracenos. Federico segundo mandó hacer muchas traducciones del árabe tanto de autores griegos como arábigos, y de este modo hizo mas comunes y extensas las noticias de aquellas ciencias, que antes eran muy limitadas, y estaban reducidas á poquísimos particulares. Vinieron despues Alberto Magno, venerado por muchos siglos, y no sin fundamento, por un portento de conocimiento de la naturaleza, y Jordan Nemorario, estimado aun en tiempos mas ilustrados; y de este modo se fué preparando la Alemania para producir con el tiempo á Purbach, Regiomontano y Copérnico, que pueden ser tenidos como verdaderos restauradores de la astronomía, y de todo el estudio matemático.

De los italianos. Este no debe menos á la Italia que á la Alemania, y la Italia aun mas que la Alemania recibió sus primeras luces de las escuelas de los sarracenos. Gerardo, bien sea carmonés ó cremonés, fué ciertamente discípulo en las matemáticas de los árabes en España, y maestro en las mismas de los italianos, y de otros europeos, y su *Teórica de los Planetas*; fué por muchos siglos, como la *Esfera* de Juan de Sacrobosco, el libro copiado y vuelto á copiar, leido y estudiado de todos los astrónomos, como dice su mismo impugnador Regio-

mon-

Campano de Novara. montano (*a*). Harto mayor fué el mérito de Campano de Novara, no tanto por su *Teoría de los Planetas*, estimada como la de Gerardo, y como la *Esfera* de Sacrobosco, quanto por sus *Comentarios sobre los elementos de Euclides*, estudiados hasta en los tiempos mas ilustrados, alabados, y en gran parte abrazados por el célebre Clavio (*b*), y citados con aprecio aun posteriormente por el sublime geómetra Viviani (*c*). Y Campano, como todos los matemáticos de aquel siglo, fué, como dice Montucla (*d*), á aprender de los árabes los conocimientos matemáticos; siguió en todo la tradicion de estos, como observa el mismo Clavio (*e*), y nos dió el Euclides, que él tomó de los mismos, y fué en todo un matemático arábigo. Campano, y Gerardo contribuyeron ciertamente con sus obras al adelantamiento de

Leonardo de Pisa. aquellos estudios. ¿Pero que son estos mé-

H 2 ri-

(*a*) *Disp. contr. crem. in plan. theor. deliramenta.* (*b*) *Comment. in Euclid.* Præf.

(*c*) *In Anistæum.* Præf. (*d*) *Hist. des Math.* tom. I, part. III. lib. I. (*e*) Ibid.

ritos respecto del grande y singular de Leonardo de Pisa de haber introducido el álgebra en Europa? Desconocida era la obra de Diofante, perdidos los comentarios de Ipacias y de otros griegos, y borrada enteramente toda idea de esta ciencia: si tenemos ahora una álgebra, si esta es fecunda madre de los mas sublimes descubrimientos, si se ha hecho el mas útil y oportuno instrumento para el adelantamiento de las ciencias, y para la cultura del espíritu humano, todo se debe á los árabes, que con las luces de Diofante formaron este arte, y á Leonardo, que habiendolo aprendido de los árabes lo comunicó generosamente á sus nacionales. De aquí provino que por mucho tiempo fuese toscana el álgebra, y despues se esparció por el resto de Italia, y se hizo comun á toda la Europa; y esta, aun mas que la óptica, es un ramo de las matemáticas, que ha dado á los europeos copiosos frutos, pero que ellos deben mirar como debido enteramente á la penetracion, y al saber de los musulmanes. Profesemos pues gratitud y reconocimiento á los árabes nuestros maestros, y atribuyamos á sus escuelas,

las, á sus escritos, y á sus traducciones el primer origen de nuestras ciencias, y el verdadero restablecimiento de las matemáticas. Pero sean los que se fuesen los progresos hechos por los europeos con las luces de los árabes, no fueron mas que los primeros pasos, aun languidos y lentos, que dieron sus estudios; ni podian tampoco esperarse notables adelantamientos con el auxîlio solo de tales guias. A los griegos, padres y creadores de aquellos estudios, á los griegos maestros de los árabes y de los latinos, á los griegos dueños del verdadero saber, á los griegos era preciso sujetarse para poderse remontar con sublimes y rapidos vuelos. Los autores griegos que entonces manejaban los europeos, todos venian por las manos de los musulmanes, los Euclides y los Tolomeos que estudiaban, no eran aquellos matemáticos griegos, que tan claras luces habian comunicado á sus nacionales, sino que eran, por decirlo así, escritores arábigos, hechos tales en las traducciones arábigas, de las quales se habian hecho las latinas. Era pues preciso buscar los autores griegos en sus mismas fuentes, estudiarlos en su propio idioma, y tra-

Restablecimiento de las matemáticas.

traducirlos del texto original; y esto empezaron á hacer en el siglo XV los alemanes, y los italianos. Seria una empresa no menos enfadosa y molesta á los lectores, que dificil y penosa para nosotros el querer texer un catálogo de los muchísimos traductores, que vertieron del griego al latin los matemáticos griegos: solo Montucla, que suele ser parco en tales enumeraciones, trae mas de los que son menester para manifestar que hubo excesiva abundancia de ellos: y nosotros únicamente diremos que Regiomontano, Maurolico, y Comandino, fueron los mas estimables, que casi todos los mejores matemáticos de aquellos tiempos fueron tambien los mejores traductores, y que á las traducciones que entonces se hicieron del griego deben referirse los rápidos progresos que despues se han hecho en las matemáticas. Tanto sirve en estas no solo la proposicion de las verdades, sino tal vez aun mas la misma forma y manera de proponerlas, la conexîon y el orden en la exposicion, la elegancia, claridad y fuerza en la demostracion.

Adelantamiento de las matemáticas modernas.

Y en efecto ¿que inmenso salto no se ve desde los pocos y débiles matemáticos de

de los tiempos baxos á aquellos egregios y célebres héroes, que en tanta copia se han presentado despues del mas íntimo conocimiento y trato con los maestros griegos? Regiomontano puede ser llamado el autor de esta feliz revolucion: nueva casta de matemáticos se vió salir despues de él de otra imaginacion, de otro ingenio, de otro ardor de investigacion, de otro espíritu de invencion, que parecia tuviesen otra alma, y fuesen de una índole, y de una naturaleza diversa de la de los precedentes. Mas vale un Copernico, un Ticon, un Vieta, un Galileo, un Keplero, que todos quantos latinos, árabes y griegos florecieron despues de Tolomeo, Diofante y Papo. Y no solo con estos, sino con los mismos antiguos griegos sus maestros empezaron á competir los modernos en el siglo XVI, y disputarles el principado matemático, de que por tantos siglos habian estado en quieta y pacífica posesion. ¿Y por que no podian Ticon y Galileo mirarse como superiores á Hiparco y á Tolomeo? ¿Vieta y Keplero no emularon la gloria de los Archîmedes y de los Apolinos? ¿No sobrepujaron á los an-

antiguos; aunque caminando todavia por los mismos caminos que ellos habian abierto, Guldin, Gregorio de san Vicente, Evelio, Bayero, y tantos otros astrónomos y geometras de aquella edad? ¿Quantas verdades antes celosamente encubiertas no se manifestaron espontáneamente, quando fueron investigadas con el nuevo método de Cavalieri, y de Robelbal? Preséntase nueva escena á las matemáticas al comparecer Cartesio, Fermat, Wallis, Huingens; y empiezan á verse la tierra y los cielos en un aspecto diverso, y baxo mas grandioso y mas verdadero semblante. Pero crece aun el honor de aquellas ciencias á fines del siglo pasado, y á principios del presente. Libnitz, Newton, Casini, Flamsted, Hallejo, y los Bernoullis con sus cálculos han cogido á la naturaleza en sus operaciones, han penetrado sus arcanos, y la han sujetado á sus científicas leyes. Esta es la época de la verdadera gloria de las matemáticas, este es el punto de su mayor elevacion: desde entonces no corrieron, sino que volaron, é hicieron en pocos años mas progresos que habian hecho antes en muchos siglos: no ha habido provincia alguna que

no haya producido algun gran matemático, no ha pasado dia alguno que no se haya señalado con algun célebre descubrimiento. Bradley, Simson, Bouguer, Clairaut, d'Alembert, Daniel Bernoulli, Eulero, Boscovich, la Grange, y otros muchos han hecho en pocos años, que el cálculo, la mecánica, la hidráulica, la óptica, la astronomía, la náutica, y hasta la acustica, que parecia la mas descuidada, se vean no solo enriquecidas con nuevas verdades, sino tambien aumentadas con nuevos ramos de ciencias. ¡Quanto no se engrandece la idea del espíritu humano al considerar el espacioso y noble estado, á que desde los pequeños descubrimientos de Pitágoras y de Tales se ven al dia de hoy elevadas las matemáticas! Entrarémos ahora á exâminar distintamente cada una de sus clases, y verémos los gloriosos adelantamientos que todas han hecho con el trabajo de tantos y tan nobles ingenios.

CAPITULO II.

De la Aritmética.

Origen de las matemáticas.

Qualquiera que haya sido el primer pueblo ilustrador de la aritmética, ó el Egypto, como creian Platon (*a*), Ecáteo y Aristágoras (*b*), ó la Fenicia, como dicen Estrabon (*c*), Porfirio (*d*) y Proclo (*e*), y como parece mas natural atendida la necesidad que tenia de cálculos aritméticos para su comercio, ó bien algun otro pueblo que pueda pretender esta gloria; nosotros ciertamente no tenemos ahora noticia alguna ni del origen de esta ciencia, ni de sus primeros progresos. Solo sabemos que ya en su tiempo observó Aristóteles (*f*), que casi todas las naciones, con maravillosa uniformidad, se han convenido en reducir el modo de contar á un mismo sistéma de nume-

(*a*) In *Phædro.* (*b*) Laert. in *Proœm.* (*c*) Lib. XVI. (*d*) In *Vit. Pythag.* (*e*) *Comm. in Eucl.* (*f*) Probl. XV.

meracion, y en abrazar casi todas la progresion decupla. Buscando la razon de esto el citado Aristóteles, cree poderse congeturar que haya nacido esta decupla numeracion de empezar á contar, como todos lo hacen comunmente, por los dedos de las manos, los quales, siendo solo diez, pueden haber dado motivo á esta combinacion (*a*). A cuyo propósito oportunamente reflexîona Hervas, en su *Aritmética de las naciones* (*b*), que varios pueblos de América dan el nombre de una mano al número cinco, y de dos al diez; y aun añade para mayor confirmacion, que aquellos poquísimos que cuentan por veintenas, casi todos son salvages, los quales llevando tambien desnudos los pies, pueden añadir los diez dedos de estos á los de las manos, y formar así la vigesimal numeracion. Lo cierto es que no solo los pueblos conocidos en tiempo de Aristóteles, quien solamente exceptua uno de los traces que no sabia pasar del quatro, sino casi todos los otros descubiertos posteriormente siguen un sistéma seme-

 jan-

(*a*) Ibid. (*b*) Art. I.

-ante de contar. Y esta universalidad puede probar suficientemente no haber sido esta una invencion aritmética de Pitágoras, como algunos quieren creer, sino una muy antigua y general tradicion, fundada en alguna razon natural, como podria justamente creerse la arriba dicha de Aristóteles. Pero á lo menos Pitágoras ha sido el primero que sépamos haber hecho estudio sobre las diversas combinaciones de los números; y el que, acarreando mucha perfeccion á toda la matemática, se dedicó singularmente á una parte suya, qual es la aritmética, como leemos en Laercio (*a*). Y aunque los críticos puedan tener razon para dudar que escribiese de los números, como quieren Malata (*b*), san Isidoro (*c*) y Cedreno (*d*), es sin embargo cierto que enseñó muchas cosas á sus discípulos acerca de esta materia, y que la doctrina de los números toda es pitagórica. No tiene duda que la aritmética de Pitágoras era en gran parte simbólica y misteriosa, y que él se ocupaba demasiado en

Aritmética de Pitágoras.

(*a*) In *Pythag.* XI. (*b*) *Chron.* t. I. (*c*) *Orig.* III, c. II. (*d*) *Comp. hist.*

en dar á los números muchos sentidos alegóricos. Meursio (*a*), siguiendo el exemplo de otros muchos, ha recogido los varios sentidos que á cada número daban los pitagóricos, y ciertamente causa admiracion que hombres grandes, como en realidad lo eran Pitágoras y muchos de sus sequaces, pudiesen perderse tras imaginaciones tan vanas. Pero sin embargo el exâminar tanto los números, el contemplarlos, el resolverlos, el combinarlos debia producir varias útiles especulaciones; y si fueron vanos aquellos estudios para su soñada teología, sirvieron á la aritmética para descubrir muchas é importantes verdades, que sin tales investigaciones hubieran quedado por mucho tiempo desconocidas y ocultas. Algunos quieren que Pitágoras, venerador de la *tetractys*, ó del número quaternario, contase solo con quatro números, volviendo al uno despues del quatro, como lo hacemos nosotros con el diez. Y en efecto Weigelio (*b*), Wallis (*c*) y algunos otros, han procurado hacer

Tetractys pitagórica.

(*a*) *De denario Pythag.* (*b*) *Tetract. Pythag.* (*c*) *App.* tom. I.

cer todas las cuentas usando solo de quatro números, y formar una aritmética quaternaria, qual creia Weigelio que fuese la pitagórica. Pero por mas ingeniosas y laudables que sean estas combinaciones, no parece que puedan atribuirse fundadamente á Pitágoras, quien, segun todas las memorias que nos quedan de los antiguos, usaba como nosotros de diez números, y encontraba, no solo en los quatro primeros, sino en todos los otros curiosos y particulares misterios. Y si miraba el quaternario con alguna particular consideracion, habrá sido solo porque en los primeros quatro números combinados de diversos modos se pueden encontrar todos los diez, y no porque se quedase en el quarto sin usar de los otros. Si Pitágoras hubiese contado solo con quatro números, ¿podria creerse que Aristóteles no lo hubiese dicho, donde buscando (*a*) las razones porque todos generalmente usan los diez números, exceptua no mas un pueblo de Tracia, el qual usaba cabalmente solo de quatro, pero por incultura y estupidez? El mismo cita en aquel

(*a*) Probl. XV.

aquel lugar á los pitagóricos, pero por una razon enteramente contraria, y que supone el modo de contar por diez números. Archîtas tarentino, célebre pitagórico, escribió una obra citada por Teon esmirneo con el título *De la decena*, Περι δέκαδος; y Boecio (*a*) dice, que por el amor que Pitágoras tenia al número decenario constituyó Archîtas pitagórico diez predicamentos. Todo esto prueba suficientemente que Pitágoras no usase solo el número quaternario, sino que siguiese como todos los demas el decenario. Un pasage de Boecio al fin del primer libro de la geometría baxo el título *Euclidis Megarensis Geometría ab Anitio Severino Boetio translata*, nos refiere la institucion del abaco inventado por los pitagóricos, y ha hecho creer á muchos que estos hubiesen conocido y usado las cifras, y la aritmética arábiga. „Los pitagóricos, dice Boe„cio, para no engañarse en las multipli„caciones, en las particiones, y en las me„didas (así parece que deba entenderse el „*podismis*), como en todo eran muy inge„nio-

Abaco pitagórico.

(*a*) *Arith.* lib. II, c. XLI.

„ niosos, y sutiles, inventaron cierta fór„ mula que en honor de su maestro lla„ maban *Tabla pitagórica*, y que los de„ mas dicen *Abaco*." Despues de haber referido esta tabla, entra á explicar el modo como la usaban, y dice que tenian ciertos ápices diversamente formados, ó ciertos caractéres, que correspondian á los números, y que puestos en diversas líneas hacian que resultase mayor, ó menor número. Por esta tabla, y por esta doctrina quieren muchos reconocer entre los antiguos las cifras que llamamos arábigas, y el uso de la aritmética arábiga. En efecto en muchos códices antiguos se ve una tabla con las cifras arábigas bastante bien expresadas; y la doctrina que del uso de aquella tabla deduce Boecio, quieren muchos que plenamente convenga á nuestro modo de contar. ¿Pero es realmente así? ¿y de aquella tabla, y de aquel pasage puede inferirse claramente el uso de las cifras, y de la aritmética arábiga? Tres copias diversas he visto de esta tabla, sacadas de tres diversos códices antiguos, uno de la Vaticana del siglo X, núm. 3123, otro de la Ottoboniana Vaticana del XIII, núm. 1862, y

Cifras numerales no conocidas de los pitagóricos.

y el otro de la Barberina del XII, núm. 830, y todas tres enteramente diversas del abaco comun, ó de la tabla impresa en la edicion de Basilea, y tambien todas discrepantes entre sí, y de ningun modo coerentes con la adjunta doctrina del mismo Boecio. Se ven en ellas en la primera línea números semejantes á los arábigos; pero en las otras no se encuentran mas que los romanos, con alguna letra, que puede parecer griega, y con ciertos signos, que son para nosotros ininteligibles. Los números de la primera línea estan acompañados de ciertos nombres, como *Igin*, *Andras*, *Ormis*, *Arbas*, *Quimas*, *Caltis*, *Zenis*, *Zemenias*, *Scelentis*, que en parte son árabes, y en parte hebreos, y pueden creerse alterados por los árabes, pero no tienen la mas mínima semejanza con los griegos. El mismo órden, y la colocacion de los números de la diestra á la siniestra manifiesta desde luego un origen oriental. Y todo prueba que la tabla descripta en los códices de Boecio ciertamente no es de los discípulos de Pitágoras, ni aun del mismo Boecio, sino introducida posteriormente por alguno que habia recibido de los ára-

árabes, ó de los hebreos sus discípulos, las cifras arábigas. En efecto en otros códices no se ven tales cifras, sino solo los caractéres romanos, como de algunos lo asegura Wallis (a), y como se observa en una tabla semejante que se vé en un códice de la Laurenciana, y contiene, no la obra de Boecio, de que ahora hablamos, sino su pequeña geometría con el título *Liber de Geometria*, pero harto mas extensa que la impresa, enriquecida con figuras geométricas, y aumentada con tres libros. Y si al principio del arriba citado códice de la Barberina se juntan á aquellas notas, y á su alterado nombre oriental las correspondientes letras griegas, como me hace observar el célebre abate Marini en un papel suyo, esto no prueba que de las letras griegas se hayan derivado los números arábigos, como han pretendido Huet (b) y algun otro, sino solo que el copiante quiso manifestar su erudicion, haciendo ver que sabia quales eran los signos griegos que

(a) In *Alg.* tom. II, p. II. (b) *Demonst. evang.* prop. IV.

que correspondian á aquellos números; puesto que en todo lo demas de aquella tabla no se hallan usados los caractéres griegos, ni se ven mas que los romanos. Ni puedo comprehender como haya quien quiera decir que la doctrina que se trae de Boecio pueda adaptarse á la aritmética arábiga. ¿Como en esta será posible esparcir como polvo aquellas notas en las multiplicaciones, y en las particiones, como él dice que lo hacian los pitagóricos? ¿Que dirémos despues del diligente exâmen que él exîge, para saber á que página deben añadirse los dígitos, ó bien sean las unidades, á qual los artículos ó las decenas? ¿Que de aquellos multiplicadores singulares, decenos, centenos, &c. y de sus diversos dígitos y artículos? ¿Que uso podrémos nosotros hacer de toda esta doctrina en las multiplicaciones y particiones? ¿Como se puede adaptar una sola línea de todo aquel pasage á nuestro modo de contar? Quanto mas exâmino todas las palabras del texto de Boecio, tanto mas lo encuentro mal entendido de quien quiere reconocer en él la aritmética arábiga. En mi concepto es una prueba evidente de no haber hablado de ella Boecio el ver que san Isidoro, que habia visto sus obras, dice (*a*), que las letras entre los griegos componen las palabras, y forman los números, pero jamas dice cosa alguna de las cifras; que Beda erudito aritmético, y versadísimo en las obras de Boecio, habla de los números y de las notas numéricas, pero solo de las siete letras romanas con las sabidas combinaciones, y nada dice de las cifras vulgares, nada del referido pasage, que ciertamente hubiera debido citar, si contuviera una doctrina enteramente diversa de la explicada por él en sus opúsculos aritméticos; y que ninguno en suma de quantos despues de Boecio escribieron de notas romanas y de aritmética, hizo jamas mencion de tales cifras, ni pensó en referir aquel pasage. El ver un número hora *dígito*, hora *artículo*, ó, como explica el mismo Boecio, hora unidad, hora decena, ha preocupado á aquellos escritores, y les ha hecho creer que reconocian en ellos, como en nuestras cifras, el mismo número elevado á decena con la añadidura de un

(*a*) *Orig.* lib. I, c. III.

un cero, y á centena con dos. ¡Pero quan diverso es el sentido de Boecio, y quan distante de nuestra práctica la doctrina para nosotros inutilísima, y para los antiguos no muy importante de todo aquel largo pasage! Esta parece solo dirigida á enseñar donde deban ponerse en los diversos multiplicadores y multiplicados las unidades y las decenas, ó los dígitos y los artículos, y que si el 2 por exemplo se multiplica por diez será dígito en las decenas, y artículo en las centenas; pero si se multiplica por ciento, será dígito en las centenas y artículo en los millares, y así en todos los demas; doctrina que tal vez podria contribuir á la inteligencia de la aritmética digital, en que se ocupaban los antiguos, como se ve en Beda (*a*), y en otros escritores, pero que nada sirve para la doctrina práctica de las multiplicaciones y particiones, ni para el buen uso de la tabla pitagórica, como la explican otros escritores, y como la conocen todos comunmente. Así que parece poderse concluir sin nota de temeridad, que no ha sido bien enten-

(*a* *De loq. per gest. dig.* &c.

tendido de aquellos escritores el pasage de Boecio, ni justamente explicada, ni tal vez entendida del mismo Boecio la tabla pitagórica, á la qual de ningun modo le conviene su adjunta doctrina; lo que no podrá causar mucha admiracion á quien tenga algun conocimiento de las obras de los latinos en estas materias. Pero sea como se fuese por este pasage de Boecio, como por otros de otros escritores, podemos ver, que si los pitagóricos no son los inventores de nuestras cifras, á ellos ciertamente debe referirse la invencion del abaco, que tanto ha servido para las operaciones de la aritmética, y que á Pitágoras, y á los pitagóricos es deudora aquella ciencia de sus mayores progresos. No hablaré de las obras aritméticas de Telauges (*a*), de Archîtas, y de otros pitagóricos, referidas por Fabricio (*b*), que ciertamente habrán contribuido á hacer mas comunes las luces de aquella ciencia, pero que se han perdido ya. Todavía vemos en Platon, tambien sequaz de la doc-

Griegos aritméticos.

(*a*) Suid. in *Thel.* (*b*) *Bibl. gr.* lib. II, c. XIII.

trina de Pitágoras, en quantas sutiles y útiles combinaciones se habian internado ya en aquel tiempo las especulaciones de los aritméticos. El célebre árabe Alkindi, que escribió mucho sobre la aritmética, nos dió una obra en particular sobre los números armónicos referidos por Platon en su *Timeo* (*a*): y este ademas en el *Teeteto* y en otros muchos diálogos hace ver como se poseía entonces la doctrina de las proporciones, y de muchas operaciones numéricas. Tambien Aristóteles, aun en obras donde menos parece que debian esperarse, hace freqüentes alusiones y llamadas á las doctrinas aritméticas, y nos manifiesta con bastante claridad quan conocidas y comunes fuesen ya entonces entre los griegos sus lectores. De todo esto con razon podrá inferirse, que ya entonces daria aquella ciencia digna materia para muchos libros de historia, como en efecto sabemos haber escrito algunos Eudemo y Teofrasto (*b*). Pero la primera obra que tenemos, realmente digna de llamarse aritmética, se escribió despues de Eu-

(*a*) *Arab. phil. bibl.* (*b*) Laerz. in *Theoph.*

Eudemo y Teofrasto, y son algunos libros de los elementos de Euclides (a), los quales versan sobre esta materia, y prueban quanto se hubiese adelantado ya en aquel tiempo esta ciencia, quantas ingeniosas y útiles combinaciones se hubiesen hecho sobre las propiedades de los diversos números, y de las varias proporciones, y de los muchos resultados que se derivan de ellos, y quantas justas y prudentes reglas se hubiesen prescripto para encontrar los números que se buscaban, y contar las cantidades propuestas.

Euclides.

Archîmedes.

Archîmedes dió poco despues una clara prueba de los progresos de aquella ciencia. Su *Psammite*, ó sea del número de los granos de arena, es un esfuerzo de la aritmética, en que para desengaño de los ignorantes en tales materias, que creian no haber números bastantes para expresar la cantidad de los granos de arena que se encuentran en las playas del mar, prueba que aun quando estuviese lleno de tales granos un espacio mayor que todo el universo

(a) VII, VIII, IX.

verso entonces conocido, el quinquagesimo término de una progresion decupla ascendente hubiera sobrado para expresar la buscada cantidad. Vigor y solidez de ingenio se requeria en Archîmides para llegar á tales determinaciones, pero tambien era menester no poco primor y perfeccion del arte para poder conseguir tanta exâctitud; y una tan vasta y dificil operacion manifiesta los muchos progresos y adelantamientos que habia hecho ya la aritmética. En este estado de perfeccion del arte procuró Eratóstenes añadirle la facilidad en las operaciones, é inventó un tablero aritmético, mencionado por Nicomaco (a) y por Boecio (b), que con razon puede ser tenido como la primera invencion de la aritmética instrumental. Este tablero es una tabla de números impares, con la añadidura de divisores comunes y compuestos, para distinguir los números primeros y simples, de los segundos y compuestos; operacion ahora comun, y de poca utilidad, pero entonces no poco sublime,

Nicomaco.

(a) *Arithm.* (b) *Arithm.* lib. I, c. XVII.

me, y siempre muy ingeniosa. A esta invencion de Eratóstenes hizo sus anotaciones aun en el siglo pasado Juan Fello obispo de Oxford, como dice Fabricio (a), y mas recientemente trabajó no poco sobre la misma el docto matemático Pell, como se comprehende por una carta de Leibnitz (b); lo que prueba quanta estimacion se hubiese adquirido aquel tablero de Eratóstenes de los justos conocedores de las prendas matemáticas. Pero por grandes que fuesen los méritos en la aritmética de Euclides, de Archîmedes y de Eratóstenes, el que obtuvo la mayor celebridad, el que de algun modo es llamado por antonomasia *el aritmético*, no es otro que Nicomaco escritor de tiempo incierto, pero que puede decirse de principios de la era christiana. Los comentos é ilustraciones de los griegos, las traducciones, compendios, y tambien ampliaciones y explicaciones de los pocos latinos que podian entenderlo, y de los árabes, harto mas inteligentes que los latinos en tales materias, son una evidente prueba del aprecio en que fueron tenidas de todos las obras aritméticas de Nicomaco. Y á la verdad aunque ahora sea poco importante su doctrina, causa mucho placer el observar el ingenio de los primeros filósofos griegos, que supieron formar tantas y tan graciosas combinaciones de números pares é impares, primeros y segundos, simples y compuestos, perfectos é imperfectos, y tantos otros diversos, producir tantos y tan curiosos números poligonos, encontrar tantas proporciones, y descubrir en todo tan agradables, y tan sutiles y maravillosas propiedades. Mas util y mas ventajosa para el adelantamiento de la aritmética ha sido la doctrina de Diofante, el Leibnitz, ó el Newton de los antiguos en esta parte. El no se pone como Nicomaco á explicar la propiedad de los números diversos, sino que suponiendo en breves definiciones las doctrinas teóricas de los aritméticos, pasa á la práctica, y corre rápidamente de qüestion en qüestion, decidiéndolas todas con solidez y agudeza de ingenio, y esparciendo copiosas luces para resolver otras mu-

Nicomaco.

Diofante.

(a) *Bibl. gr.* lib. IV. c. XXI, §. III. (b) Ad Oldemburg, 27. Aug. 1676.

muchas. En cada libro se va internando en investigaciones mas arduas y difíciles, y manifestando en sus doctísimas resoluciones métodos ingeniosos y seguros de explicarlas; y tanto mas debemos lamentarnos de la pérdida de los seis libros que nos faltan, quanto que por los que exîsten podemos creer fundadamente que se encontrasen en aquellos mucho mas ampliados los confines de la aritmética. Lo cierto es que en ninguno de los antiguos se descubre como en Diofante una libre franqueza, un pleno dominio, y una vista penetrante y segura para volver y revolver á su arbitrio las qüestiones de aquella ciencia. Pero su aritmética es algebráica, y deberemos volver á hablar de ella quando tratemos del álgebra. Despues de Diofante poco mas tenemos en esta materia que un fragmento de Teon esmirneo, el qual mas sirve para entender los escritos de Platon y de los otros antiguos, que para el adelantamiento de la aritmética; y algunos pedazos de los primeros libros de las *Colecciones matemáticas* de Papo, donde doctamente se refieren las doctrinas aritméticas de los antiguos. Así que

que á Pitágoras y á los pitagóricos, á Euclides, á Archîmedes, á Eratóstenes, á Nicomaco y á Diofante podemos justamente atribuir toda la doctrina aritmética de los griegos.

Esta misma sirvió tambien para los latinos, quienes no tenian obra alguna aritmética mejor que la de Boecio; y esta, como el mismo confiesa (*a*), no es otra cosa que la doctrina, y aun la obra misma de Nicomaco, traducida en latin libremente, á veces abreviada, á veces ampliada, como á él mas le place, para darnos la justa inteligencia de la materia; de cuya obra de Nicomaco tenian ya antes los latinos otra traduccion debida al africano Apuleyo. Ni Marciano Capela, ni el verdadero ó supuesto san Agustin, ni Casiodoro, ni san Isidoro, ni otro alguno de aquellos latinos, que para formar su *quadrivio* escribieron tratados de aritmética, merecen ser colocados entre los escritores de aquella ciencia. Solo el célebre Beda á principios del siglo VIII trató de

(*a*) *Arithm.* præf.

de los números, y del modo de contar, propuso qüestiones numéricas, y las dió solucion, y escribió de modo de aquellas materias, que pudo ayudar al estudio del que quisiese aprender este arte, y dar alguna luz á nuestra curiosidad, para conjeturar despues de tantos siglos las operaciones aritméticas de los antiguos. Estos usaban tambien un arte llamado *datilonomia*, abandonado despues por los modernos, esto es de contar con los dedos, adoptando en vez de caractéres las varias inflexîones y situaciones de ellos, y formando de este modo varios cálculos, de cuyo arte escribió mas distintamente que todos los antiguos el mismo Beda, y despues ha sido seguido por el Nebrisense (*a*), por Wover (*b*) y por otros modernos.

Aritmética de los árabes.

Harto mas que á Beda, y que á todos los latinos debe la aritmética á los árabes, únicos poseedores por muchos siglos de los conocimientos matemáticos. Infinitos son los sarracenos que ilustraron con sus escritos estas materias, y se hicieron en ellas

(*a*) *De digit. supput.* (*b*) *Polymath.*

ellas singularmente célebres. Gran crédito se adquirió Thebit ben Corrah, y sus obras aritméticas de los números poligonos, y de los que se multiplican hasta el infinito, de la proporcion compuesta, y del epítome de los libros de Nicomaco, eran estudiadas como clásicas y magistrales en aquella ciencia. Abi Abdalla Moamad fue llamado por antonomasia el *aritmético*. Abu Barza obtuvo particularmente el nombre de *calculador*, se distinguió tanto en el conocimiento y ciencia de los números, como en el arte de manejarlos, y en la erudicion que pertenece á los mismos; y no solo supo ver las propiedades y las relaciones de los números, sino que tambien inventó nuevos modos de combinarlos, y enriqueció la aritmética, con nuevas noticias, y nuevos métodos. Nosotros usamos aun en nuestros cálculos la regla de *falsa posicion*, llamada tambien de *elcatain*, en la qual tomando á nuestro arbitrio un número, y viendo su resultado, se hace despues la regla de tres, y se halla el verdadero número que se busca; y esta regla se debe á los árabes, como el nombre mismo lo manifiesta, y co-

como lo atestigua Lucas de Borgo (*a*), quien siguiendo á Leonardo de Pisa, la trae como invencion arábiga, juntamente con algunas otras sobre las mismas materias.

Cifras numéricas venidas á nosotros por los árabes.

Pero la mayor obligacion de nuestra aritmética á los sarracenos proviene de la introducion que se les debe de las cifras numerales, y de la manera de usarlas; sería todavía imperfecta y balbuciente la aritmética práctica, sino tuviese la facilidad y el auxîlio de tales cifras. Y es de advertir, que no solo se han de considerar en las cifras los signos ó las figuras, sino el facil uso, el expedito manejo, y el claro y seguro método de hacer con ellas las operaciones mas difíciles, lo que hace util, preciosa, é importante su invencion. Lo vasto y abundante de las materias no nos permite texer aquí una breve historia de los signos numéricos de los antiguos, la qual, aunque no importuna para el presente tratado, podria sin embargo parecer mas filológica que matemática; y la tenemos ya formada con bastante extension por Be-

(*a*) *Somm. d' Aritm. e di Geom.*

veregio (*a*), y por otros, bien que aun tal vez podria añadirse á sus tratados alguna noticia, y alguna no inutil reflexîon.

Pasaremos pues á tratar directamente de las cifras llamadas por nosotros arábigas, que deben interesar mas la curiosidad de los matemáticos. Hemos hablado ya en otra parte sobre este punto con tanta difusion (*b*), y hemos alegado tantas razones y tantos monumentos, para probar que las cifras han venido de los indios, y por medio de los árabes transmitídose á los europeos, que seria inutil el volver á hablar ahora sobre esta materia, si casi al mismo tiempo que se imprime esto no hubieran salido á sostener un origen diverso de aquellas cifras dos célebres escritores, Villoison (*c*) y Adler (*d*), y no hubieran sido alabados y seguidos por otros. Todo el fundamento de estos escritores se apoya sobre los argumentos de la *Disertacion matemático-crítica* de un anónimo, impresa en la *Coleccion calogeriana*, en

(*a*) *Arithm. chronol.* lib. I. (*b*) Tom. II, c. X. (*c*) *Anecd. gr.* &c. p. 152. &c. (*d*) *Mus. Cuf. Borg.* p. 37. &c.

en Venecia 1753 (*a*); y debe causar admiracion que razones tan débiles, y aun á veces falsas, hayan podido inducir á hombres verdaderamente eruditos á una tan decidida aseveracion. En las siglas lapidarias, y en las notas librarias, dice el anónimo que usaban los antiguos aquellas cifras. Sí; pero basta leer á Valerio Probo, y á los muchos antiguos, que por siete ó mas siglos escribieron sobre la interpretacion de las notas romanas, los quales se refieren en la *Coleccion de gramáticos latinos* de Gotofredo; basta leer á Nicolai, Orsato y los otros modernos que explican las siglas lapidarias de los antiguos, para concluir que no puede con razon traerse á este propósito el exemplo de las notas lapidarias y librarias: se usan, sí, las señales 3, 7, 9 y otras de las nuestras numerales para muchos y diversos significados, pero jamas para señalar los números. Antes bien donde se habla de las notas numerales, se traen las acostumbradas letras romanas, con otros signos, que no son mas que alteraciones de aquellas

(*a*) *Racc. d'Opusc.* &c. tom. XLVIII.

llas letras, pero de ningun modo las cifras vulgares; y para poder dar á tales cifras la naturaleza romana se requiere, no la mera apariencia y figura, sino la aplicacion y el uso. Tambien los árabes tenian en su alfabeto 79, en la *nunnacion* 69, y algunas otras letras muy semejantes á las cifras; pero sinembargo nosotros no derivamos de los árabes las cifras numerales por aquella semejanza, sino solo por el uso posterior de la práctica aritmética. Y si el erudito anónimo trae algunas inscripciones, en las quales el 7 parece tomarse por un número, ademas de que todas sufren alguna excepcion con que poder rebatir su autoridad, puede decirse con fundamento no ser aquel signo mas que un V latino malamente formado, segun el uso sobrado comun entre los grabadores de corromper muchos caractéres. Al argumento del uso de tales cifras en las notas romanas añade el anónimo el del conocimiento de las mismas en los antiguos aritméticos; pero con la misma insubsistencia, y sin mayor apariencia de verdad. Cita á Diofante (*a*), como no ig-

 no-

(*a*) Pag. 70.

norante de tales notas, quando poco antes (*a*) lo habia citado como quien jamas hubiese tenido de ellas la menor noticia. Cita (*b*) todos los pasages de la aritmética de Boecio, donde vemos las cifras en los impresos y en los códices recientes, como que estas tienen tanta conexîon con las operaciones hechas por él, que seria imposible el pretender separarlas; pero quien quiera hacer la prueba de formar las mismas operaciones sin cifras, y con los números romanos, verá quan facil es superar el imaginado imposible. Al pasage de la geometría de Boecio, referido tambien por él, hemos respondido antes suficientemente, y no queremos causar nueva molestia á los lectores repitiendo las cosas dichas una vez. Con mas extension hablaremos ahora de Gerberto, citado tambien con poca oportunidad por el erudito anónimo como conocedor de las cifras numéricas, y como sequaz en esta parte de Boecio, y no de los árabes. ¿Pero es cierto que Gerberto conoció las cifras, y nuestra aritmética? Yo he leido todas las cartas, y las obras matemáticas im-

(*a*) Pag. 54. (*b*) Pag. 47.

impresas de Gerberto, y no descubro en ellas indicio alguno. Las instancias con que el emperador Oton le pide que le enseñe el libro de la aritmética, tal vez podrán hacer creer que Gerberto tuviese una superior á la que entonces se conocia, y esta fuese la arábiga. Pero en su respuesta (*a*) reflexîono, que Oton solo hacia tan vivas instancias porque padecia alguna equivocacion sobre el supuesto valor de los números. El único pasage que suele citarse á este propósito, es la carta CLXI de Gerberto á Constantino, porque en ella dice, que un mismo número hora es simple, hora compuesto, hora dígito, hora artículo. Pero es de observar lo que no veo reflexîonado ni por los matemáticos, ni por los críticos, que dicha carta puesta entre las de Gerberto, es cabalmente la misma que se encuentra en las obras de Beda al principio del libro *De numerorum divisione ad Constantinum.* No quiero decidir si deba ponerse entre las obras de Gerberto, ó entre las de Beda; pero sí diré, que si ninguno en tantos siglos ha pen-

(*a*) Ep. CLIV.

pensado jamas en atribuir á Beda el conocimiento de las cifras por las expresiones de aquella carta, ¿por que se ha de querer dar tanta fuerza á las mismas en la pluma de Gerberto? Hemos dicho antes, hablando del pasage de la geometría de Boecio, de que modo un mismo número es á veces artículo, y á veces dígito, sin que intervengan las cifras: ¿y como podrán estas hacer un número á veces simple, y á veces compuesto, que no lo hagan igualmente los caractéres romanos, y qualquier otros? Aun puede probar mas en este asunto el pasage de Guillermo de Malesbury (*a*), donde refiere los muchos conocimientos que adquirió Gerberto en España, y pasó á las Galias, uno de los quales era el abaco, arrebatado por él á los sarracenos, con ciertas reglas, que hacian sudar á los abaquistas. Tal vez este abaco, y estas reglas habrán sido las cifras y la aritmética arábiga, lo que por otra parte no me atrevo á determinar; pero si es así realmente, ¿quien dudará que estas las adquirió de los árabes, y no de

(*a*) *Hist. Angl.* lib. II.

de Boecio? Pero él mismo nos dice (*a*), observa el ánimo (*b*), que sigue en la aritmética á Boecio, y no á los sarracenos. ¡Como se dexan llevar ciegamente los hombres de la propia opinion, hasta hacer decir á los autores lo que jamas pensaron decir! Gerberto en todo aquel pasage no dice otra cosa sino que la geometría ocupa el tercer lugar en el orden de las matemáticas; pero que él no dará la razon de este orden de las matemáticas, porque Boecio en el principio de su aritmética lo habia explicado ya con bastante claridad. ¿Como pues de este pasage tan distante de nuestro argumento se podia inferir que Gerberto para las cifras numerales *Boethium non vero arabes magistros esse secutum?* No aseguraré que Gerberto conociese y enseñase á los europeos nuestra aritmética, como se dice comunmente; pero diré, que si en realidad fue así, ciertamente la aprendió de los árabes, ó de los españoles sus discípulos. No seguiré refutando las equivocaciones y errores en que incurre el anonimo, é hizo in-

(*a*) *Geom.* in præf. (*b*) Pag. 84.

incurrir á Villoison y á Adler, que ciegamente abrazaron casi todas sus palabras, y solo diré que con toda justicia podemos dexar á los árabes el mérito de habernos comunicado las cifras numéricas, que son tan útiles para las operaciones aritméticas; y podemos tambien con igual derecho conservar á los indios el honor de la invencion de las mismas, que les hemos atribuido (*a*) con la autoridad de los mismos árabes, de los griegos y de los latinos. Resta finalmente para concluir este discurso, que podrá parecer sobrado largo, el fixar el tiempo en que empezaron los árabes á usar de estas cifras.

Epoca de la introduccion de estas cifras entre los árabes.

Adler dice (*b*), que se quiere comunmente que los árabes las tomasen en las guerras con los indios en el siglo XI; pero que él cree, por una medalla del museo borgiano, donde lee las cifras 585 ó 679, poderse con mucha verisimilitud determinar el tiempo de la introduccion de aquellas cifras entre los árabes, y que sea el año 1189 ó 1280. Si he de decir la verdad,

(*a*) Tom. II, c. X. (*b*) *Mus. Cuf. Borgian.* &c. p. 37.

dad, no sé, ni que comunmente se señale dicha época en el siglo XI, ni con que monumentos ó razones pueda hacerse esto. Pero sí diré, por lo que mira á la época imaginada por Adler en vista de la medalla borgiana, que ni en ella se puede leer absolutamente lo que él quiere, y en efecto él mismo está incierto sobre si debe leer 585 ó 679, y ciertamente en vista de la estampa de la moneda, donde probablemente habrá hecho expresar con mas claridad lo que en el metal estará mas obscuro, no puede leerse ni lo uno, ni lo otro; ni leyéndose en ella realmente 585 ó 679, corresponderia con exâctitud á 1189 ó 1280, como él dice (*a*); y aun quando fuera así, no por ser esta la primera moneda que él haya visto con las cifras numéricas, puede servir de prueba de haber sido aquella la época de la introduccion de tales cifras entre los árabes. ¿Quien no sabe que en las monedas y en los monumentos públicos se siguen los usos y las fórmulas establecidas y constantes, y no se admiten facilmente las no-

(*a*) Pag. 73.

vedades? ¿Quantos siglos no se han usado entre nosotros en los escritos privados las cifras arábigas, sin que jamas se adoptasen en los diplomas, ó en los monumentos públicos? No me atreveré á fixar con precision el tiempo de la introduccion de tales cifras entre los árabes; pero se podrá conjeturar con alguna probabilidad, que en tiempo de Aroun Raschid, y mucho mas en el de Almamon, quando se emprendian expediciones literarias á la India para adquirir las luces científicas que conservaban los bracmanes; quando se traducian los libros astronómicos y otros de los indios; en suma quando se abrazaba con empeño quanto podia contribuir á la cultura y á la instruccion de los estudiosos árabes, entonces cabalmente con la astronomía, y con otros muchos conocimientos filosóficos de los indios adquiriesen tambien su aritmética. Vemos en efecto que Alkindi en el mismo siglo IX escribió ya *De la Aritmética indiana*; que en el siguiente dió Almogetabi un tratado mas difuso *Del Arte de los números indianos*, y otro Alkarabisi del *Modo de contar de los indios*; que á principios del XI entró ya el célebre Alhassan á examinar,

no solo la mera práctica de aquella aritmética, sino tambien los *principios* mismos *del modo de contar de los indios*; que en suma era ya harto comun á todos los árabes la aritmética indiana, mucho antes de todas las épocas insinuadas por Adler; y que con razon podremos referir al siglo VIII la introduccion de la misma en aquella docta nacion. De los árabes tomaron los españoles el uso de aquellas cifras; y Terreros en la *Paleografía española* (*a*), ó Burriel que le suministró los materiales, explicando un escrito del año 1136 de una traduccion de Tolomeo, referido en la lámina XII, dice, que este es uno de los escritos mas antiguos, en que se descubren las cifras arábigas, las quales, añade, se ven en casi todos los escritos matemáticos de aquella edad, pero no en los otros libros ó instrumentos, y ni aun en las mismas cuentas, en que se continuaban usando los números castellanos, que eran los romanos, con poquísima variacion. De los árabes tomó tambien las mis-

Propagacion de las cifras arábigas.

(*a*) Pág. 102.

mismas cifras Leonardo de Pisa á fines del siglo XII, é hizo docto uso de ellas en su precioso códice, que exîste en la Magliabecchiana. De los árabes las recibieron igualmente los griegos; y Máxîmo Planudes escribió una obra para enseñar el arte de usarlas. En suma toda la Europa debe á los árabes el beneficio de estas cifras, que tan útiles, y aun necesarias han sido para los progresos de la aritmética. ¿Que adelantamientos podia esta hacer sujeta á las embarazosas trabas de los números romanos, imprópios, como justamente reflexîona Huet (*a*), para las operaciones aritméticas? ¿Como podia esperarse, que sin el auxîlio de tales cifras llegase jamas á los sublimes cálculos, y á las complicadísimas series, que ahora forman las delicias de los matemáticos? Por falta de estas, dice Vossio (*b*), no podian los griegos, ni los romanos ser perfectos aritméticos; y si nuestros modernos han llegado á tal perfeccion, debemos profesar eterno reconocimiento á los árabes, que nos han

(*a*) *Dem. Evang.* prop. IV. (*b*) *De sc. math.* c. IX. *Addenda.*

han comunicado el auxîlio de aquellas cifras. Solo este mérito de los sarracenos debiera bastar para hacer inmortal su nombre en los anales de la aritmética; pero tuvieron varios otros, y con infinitos escritos, con útiles inventos, y de mil modos diversos ilustraron aquella ciencia. Abdulhamid Abulphadhl, ademas de un libro de la propiedad de los números, y de una obra de toda la aritmética dividida en seis tomos, escribió un libro de las ingeniosas invenciones aritméticas, donde se ven muchas que son propias de sus nacionales; y él mismo con esta obra hizo á su nacion benemérita, no solo de las teorías, sino tambien de la historia de la aritmética.

Griegos modernos escritores de aritmética.

Mientras los árabes promovian tan utilmente aquella ciencia, volvieron igualmente los griegos á cultivarla. Escribió Psello de la aritmética en el siglo XI; pero con mucha superficialidad. Escribió en el XIV Berlaamo con mayor profundidad, y Wolfio encuentra los seis libros de su logística harto sublimes, y muy superiores á la inteligencia de los lectores principiantes. Escribió como hemos dicho de la la aritmética Máxîmo Planudes, y explicó á los griegos las reglas de contar con las cifras arábigas ó indianas; y escribieron de aquellas materias varios otros griegos, que pueden verse en Fabricio (*a*). Nosotros solo hablaremos de Manuel Moscópulo, autor de fines del siglo XIV, ó de principios del XV, no sabiendo si es el tio ó el sobrino el Moscópulo, de quien ahora hablamos, escritor de la obra aritmética de los *quadrados mágicos*, que se conserva manuscrita en la real biblioteca de Paris. A él debemos la invencion, ó á lo menos la primera noticia del *quadrado mágico*; invencion ciertamente curiosa, y tambien util á la aritmética por las varias combinaciones de números que ha hecho descubrir. Todos los números que componen un quadrado, v. g. 1, 2, 3 &c. hasta 25; si están dispuestos en progresion aritmética, forman un *quadrado natural*; pero aquel quadrado se hace *mágico*, si los números se escriben con tal orden, y se combinan con tal método, que sumándose los números de cada uno de los lados, tanto ho-

Quadrados mágicos.

(*a*) *Bibl. gr.* lib. IV, c. XXII.

horizontales y verticales, como diagonales, por cada uno resulta la misma suma. El primer autor que sepamos haber hablado de tales quadrados, llamados *mágicos*, no tanto por esta propiedad suya aritmética ó mágica, quanto por el uso que se hacia de ellos en los talismanes, es este Moscópulo en el citado códice de Paris, exâminado por la Hire, y él nos presenta, aunque solo en los números impares, dos métodos de formarlos, explicados por el mismo la Hire (*a*), y estimados justos é ingeniosos, pèro reducidos á dos casos particulares de los métodos propuestos por él en la sexta y en la décima proposicion de su primera disertacion. Estos quadrados fueron despues adoptados prácticamente; y Agripa formó quadrados de siete números, que son desde el 3 hasta el 9, para aplicarlos á los planetas. El docto aritmético Bachet de Meciriac habiendo visto los quadrados de Agripa, y no encontrando en autor alguno reglas para formarlos semejantes, propuso una pa-

(*a*) *Ac. des Sc.* an. 1705.

para los números impares (*a*), pero no supo encontrarla para los pares; y su método no es otro que el primero de los dos de Moscópulo, pero no tan sencillo. Célebre se hizo tambien en este punto de combinaciones numéricas el ingenioso Frenicle, que tanto crédito se habia adquirido con tantos otros descubrimientos aritméticos; y dió métodos para quadrados de raices pares é impares; y enseñó á variarlos de infinitas maneras que los otros no habian imaginado, y se determinó felizmente á disponerlos de modo, que algunos, aun quitado uno ó mas contornos de los lados horizontales y verticales, queden siempre mágicos, y otros al contrario dexen de ser tales, siempre que se quiera quitar uno ó mas contornos sea el que se fuese; y manifestó su ingenio y su gran pericia numeral en aumentar las circunstancias de los quadrados, y por lo mismo las dificultades, y en superarlas gloriosamente (*b*). Quando causaban estrépito en Francia los quadrados mágicos, la Lou-

(*a*) *Probl. plaisans.* (*b*) Anc. *Mém. de l'Acad. des Sc.* l. V.

Loubere, que transmitió á la Europa tantos conocimientos de los indios, traxo tambien de ellos un método para formar los quadrados mágicos, no muy diferente del primero de Moscópulo, y dió tambien de él una ingeniosa, pero dificil demostracion (*a*). A principios de este siglo el flamenco Poignard publicó un tratado de estos quadrados, que quiso llamar *sublimes*, donde explicó muchas novedades ingeniosas y agradables. En vez de tomar todos los números de la serie de los números naturales, que llenasen un quadrado, como se habia hecho hasta entonces, toma solamente tantos números consecutivos, quantas son las casillas de cada lado, y los coloca de modo que ninguno se halle dos veces en un lado, y hagan todos los lados la misma suma. En vez de tomar los números en progresion aritmética solamente, los toma en progresion geométrica, y en armónica, y forma en todas diversas suertes de ingeniosos quadrados. Vino finalmente la Hire, y en dos di-

(*a*) V. la Hire *Mém. &c. Ac. des Sc. an.* 1705.

disertaciones leidas en la Academia de las ciencias superó mucho los descubrimientos de Frenicle, y de Poignard; propuso tantos métodos, no solo para los quadrados impares, sino tambien para los pares, é hizo de ellos tan sólidas é ingeniosas demostraciones; varió de tantos modos todos los quadrados, los adornó con tantas circunstancias, los travó con tantas dificultades, los formó con tanta facilidad, y seguridad, y dió tantas resoluciones á un problema, al qual hubiera sido bastante glorioso el encontrarle una sola, que pareció no dexar mas campo á los otros aritméticos para exercitarse en esta materia. Pero sin embargo en 1710 propuso Sauveur en la misma Academia nuevos descubrimientos para semejantes quadrados: para hacerlos mas generales los compuso no en números, sino en letras, formó quadrados por *analogía*, por *reciprocacion*, por *exceso*, y por *defecto*: los cortó no solo en contorno, sino en cruz, y de otros modos; dió formulas algebráicas para todos los que eran capaces de ellas; y no contento con tantos quadrados, hizo tambien cubos mágicos; y Fontenelle en la historia de aquel año

año se lisonjeaba de que este seria el último que hablase de una materia, que le parecia ya exhausta, y no muy importante, y de la qual, si hemos de decir la verdad, nos parece estar él ya fastidiado, como tememos que lo esten tambien nuestros lectores. Pero se engañó Fontenelle, y posteriormente en 1750 presentó d'. Ons-en-Bray otra memoria, en la qual propuso un método, no para añadir nuevas condiciones á los quadrados, y por consiguiente nuevas dificultades; sino para simplificar la resolucion del problema, dexando en pie las condiciones de que los demas lo habian cargado. Varios otros, ademas de los nombrados hasta aquí, han tratado tambien de estos quadrados; pero lo que llevamos dicho bastará para hacer ver en quanto aprecio hayan tenido los célebres aritméticos la invencion del griego Moscópulo: si ésta no ha acarreado alguna sólida ventaja, ni provechoso uso á las ciencias, no ha dexado de ser útil á las mismas. El ingenio se aguza, se dilata el entendimiento, se fortifica la fantasia con tantas y tan sutiles combinaciones de números, las ciencias se aprovechan de las nue-
 vas

vas ideas que presentan estas investigaciones, y es siempre una honesta diversion, y un laudable entretenimiento el descubrir, aunque en materia tan esteril y seca, tantas nuevas, y á veces agradables verdades.

Aritméticos latinos. Aun antes que los griegos empezaron los latinos á abrazar el estudio de la aritmética. En el siglo X habia ya escrito el Español Josef un libro de la multiplicacion, y de la particion de los números, muy buscado por Gerberto (a), y por aquellos pocos, que entonces podian gustar de estas materias. Gerberto. La aritmética puede tal vez decirse que fué el estudio que mas cultivó Gerberto. El habla de ella con freqüencia en sus cartas, y se muestra bastante práctico en las otras obras matemáticas; él, segun el testimonio antes citado de Guillermo de Malesbury, entre todas las adquisiciones científicas hechas en España hacia principalmente alarde de la de las reglas del abaco, y de las cuentas, y su aritmética estaba tenida en tanto aprecio, que el emperador Oton creia poder competir con el vivaz in-

(a) Ep. ad Ger. Aur.

ingenio de los griegos si llegaba á conseguir de Gerberto que le instruyese en ella. Pero ni de Gerberto, ni de los españoles sus maestros, ni de otro europeo alguno de aquellos tiempos exîste ya escrito alguno sobre la ciencia numeráica, que se haya dado á luz. El primer escritor de quien se conservan monumentos es el célebre Leonardo Fibonacci de Pisa, de quien todavia tenemos el precioso códice intitulado *Liber abaci*, tantas veces citado. Este pisano llevado á Africa por su padre hácia fines del siglo XII, empleado en una aduana, se dedicó con empeño á aprender de los árabes la aritmética indiana, que nosotros llamamos arábiga, á la qual daba la preferencia sobre la griega, sobre la romana, y sobre todas las otras; y despues de algunos años, en 1202 publicó esta obra, que puede ser tenida como magistral en aquella materia, y en la qual explica tambien la aritmética algebráica. Y no fué esta la única obra de Leonardo sobre el arte de contar, puesto que de un grueso códice en folio, exîstente en la biblioteca del hospital de santa María la Nueva de Florencia, se infiere haber él compues-

Leonardo de Pisa.

puesto tambien un *Tratado sobre los números quadrados*, que se halla copiado en el libro XVI de aquel códice (a): de cuyo tratado habla tambien con mucho elogio Lucas Pacioli (b). Por grande que haya sido el mérito de Leonardo en la aritmética, y por algun respeto superior á todos los otros, sin embargo han sido conocidos mas generalmente de los matemáticos Jordan Nemorario, y Juan de Sacrobosco, autores tambien del siglo XIII. La aritmética de Jordan conservó aun su crédito entre los posteriores mas ilustrados, puesto que vemos que el docto Regiomontano, juez el mas autorizado en estas materias, queria dar á la prensa sus obras aritméticas (c), que despues en efecto publicó é ilustró Jayme Fabro sus *Elementos aritméticos*, y que Clavio y otros matemáticos hicieron uso de ellos, y los citaron con aprecio. Juan de Sacrobosco mas conocido por el tratado de la *Esfera*, escri-

Jordan Nomorario.

Juan de Sacrobosco.

(a) V. Taxgioni *Viag. Tosc.* t. II. (b) *Somma* &c. distinct. I, tract. IV, art. VI. (c) Gassend. in *Vita Regiomont.* ex ejus Catálogo.

cribió tambien de la aritmética, y tanto con esta obra, como con la de la esfera contribuyó mas que todos á propagar el uso de las cifras, y de la aritmética arábiga. De este modo se esparcian por todas partes las luces de aquella ciencia, los conocimientos de los números se hacian mas comunes, y se poseia mas y mas el arte de manejarlos. Lo vemos en la Toscana donde se conservó siempre viva y fecunda la doctrina de Leonardo; y á principios del siglo XIV floreció con singular crédito de saber aritmético Pablo de Dagomari, del qual dice Felipe Villani, que fué *peritísimo aritmético, y en las equaciones superó á todos los antiguos y modernos*, y Ximenez crée por varias razones (a) que sea el mismo Pablo, el que por su peridia en el arte de contar fué distinguido con el sobrenombre *del abaco*. En el siguiente siglo escribió un anónimo el grosísimo códice antes citado, intitulado *Tratado del abaco*, conservado entre los códices de dicho hospital de Florencia, donde siguiendo la doctrina de Leonardo trata copiosamente es-

Pablo del Abaco.

(a) *Del gnom. fior. Introd. stor.* par. II, §. 6.

esta materia (a); floreció un Benedicto, alabado por Verino en su *Ilustracion de Florencia* como maestro universal de contar; y finalmente Lucas Pacioli de Borgo san Sepolcro escribió la primera obra de aritmética, que se ha dado á la prensa, esto es, su *Suma de aritmética, geometría, proporciones, y proporcionalidad*, en la qual, dice Targioni (b), se adornó con la obra de Leonardo, y en la qual, sea de esto lo que se fuese, ciertamente reduxo á mayor brevedad las operaciones aritméticas de dicho Leonardo, de Nemorario, de Sacrobosco, y de otros maestros alabados por él mismo, y enseñó no solo las reglas aritméticas, sino tambien las algebráicas. Entonces empezó á ser conocida y estimada el álgebra, la qual era toda numérica, criada, puede decirse, para auxîlio de la aritmética, y sujeta á su servicio. Y en efecto entonces con el auxîlio y socorro del álgebra creció mucho la aritmética, y se elevó á sublimes y dificiles operaciones, á que ántes ciertamente no hubiera podido llegar. Todas las ciencias están unidas entre sí con vín-

Lucas Pacioli.

(a) Targ. ibi. (b) Ibi.

vínculos de hermandad, y no puede promoverse una sin que todas se muevan y desfruten alguna ventaja. De la cultura del álgebra sacó mucha utilidad la aritmética, y esta debe mirar á los Tartaglias, á los Cardanos, y á los otros algebrístas como sus verdaderos bienhechores. El amor á los griegos y á la antigüedad le fué tambien provechoso: buscando y estudiando á los antiguos griegos se hicieron traducciones, ilustraciones y comentos de Euclides, de Archîmedes y de Diofante; y con ellos se enriqueció de nuevas luces la aritmética. El estudio de los astros era el predilecto de los matemáticos de aquellos tiempos, como lo ha sido de casi todos, y este estudio era tambien útil á la aritmética, puesto que la vana astrología se ocupaba para sus pronósticos en grandes cálculos, y en diversas combinaciones de números, y de este modo acarreaba no pequeños adelantamientos á los conocimientos numéricos; y la verdera astronomía, necesitando á cada paso de grande inteligencia de los números, promovia mucho su estudio; y la aritmética de las fracciones decimales ha nacido, ó á lo menos crecido por el influxo de los astros con

Otros escritores de aritmética.

con la cultura de los astrónomos, singularmente de Regiomontano. Y de este modo promoviendose las otras ciencias adelantaba siempre la aritmética, y crecian todas con el mutuo fomento, y con el recíproco auxîlio adquirian nuevo vigor. En efecto entonces Stifels, Pelletir, Maurolico, Clavio, Vieta y otros muchos escribieron del arte de contar con luces mas justas, y mas finas, que quantos les habian precedido.

Invencion de los logaritmos.

Pero la invencion que ha sido mas gloriosa á la aritmética, y el mayor regalo que esta ha hecho á las otras ciencias, se debe al escoces Neper, que á principios del siglo pasado inventó los *logaritmos*, con los quales ha hecho inmortal su nombre, y ha merecido que se le coloque entre los bienhechores de las ciencias, y de la humanidad. La geometría, la mecánica, la astronomía, y todas las ciencias deben profesar á la invencion de Neper el mas grato reconocimiento. El ardor que se habia excitado en los siglos XV y XVI de adelantar en toda clase de conocimientos, no podia sujetarse á la lentitud de las operaciones aritméticas conocidas entonces, y exí-

gia métodos mas faciles, mas seguros y mas prontos: las investigaciones haciéndose mas profundas y mas finas, necesitaban de cálculos numéricos muy extensos, y estos robaban todo el tiempo que debia emplearse en llevar adelante las intentadas especulaciones. Todo estaba lleno de subtensas, de tangentes, de senos y de otras líneas, que no podian medirse con exâctitud, ni determinarse con puntualidad y con verdad sin descender á largas fracciones decimales, entrar en dificiles proporciones, engolfarse en intrincadísimas operaciones; era preciso multiplicar y partir muchos números por otros muchos, consumir mucho tiempo, sufrir molestas fatigas, y quedar sin embargo expuestos á incurrir en errores. ¿Que gracias, pues, no deberemos dar á Neper, que nos ha proporcionado el medio de evitar tantos tropiezos, y llegar al mismo fin con brevedad, seguridad y facilidad? La idea de dos líneas tiradas con diversas velocidades, variable la una, la otra uniforme, y de las relaciones, y razones que se encuentran entre aquellas líneas, hizo que le ocurriese el pensamiento de formar dos tablas de números en proporciones, geométrica la una, y aritmética la otra, y de substituir á las multiplicaciones y particiones de los números, por decirlo así, geométricos, la suma y la substraccion de los aritméticos, haciendo encontrar con estas el mismo número que antes debia buscarse por medio de la multiplicacion y particion de los números geométricos, y despues pensó aplicarlas á las operaciones trigonométricas. De este modo es tanto mas facil encontrar los buscados números de la multiplicacion, de la particion, de la extraccion de raices, de la formacion de potestad, y de qualquiera operacion quanto es mas facil, breve y seguro el operar por sumas y restas, que por multiplicaciones y particiones, por números baxos, como serán siempre respectivamente los aritméticos, que por altos, como los geométricos. Y no solo la aritmética obtuvo por los logaritmos expedicion y facilidad, sino tambien la geometría, y singularmente la trigonometría, y por consiguiente todas las ciencias exâctas sacan de aquella invencion grandes ventajas; y antes bien el primero y principal uso de los

los logaritmos fué buscado por Neper para las operaciones trigonométricas. Dando un arco de círculo, y aun de otras curvas de tantos grados y minutos facilmente se determinan con las tablas logaritmicas, las subtensas, los senos, las tangentes, las secantes, las areas, como tambien el arco, dado el seno &c. quando antes de tener este auxîlio se exîgian inmensas fatigas. A este fin deben tenerse muchas consideraciones en la formacion de tales tablas: es preciso buscar en cada una que principio y que progresion se deba tomar; es preciso ver á que corsesponda el cero, y que número deba darse á cada logaritmo. Por habersele escapado estas consideraciones á Neper no salió en la formacion de sus tablas con la felicidad deseada. El mismo fué el primero que conoció los inconvenientes que resultaban de aquella forma, y pensó desde luego en la correccion, dando otra á sus logaritmos, como propuso en una obra póstuma publicada por su hijo. El método propuesto por Neper fué felizmente executado por Brigio, su docto discípulo, quien en la obra intitulada *Aritmética logaritmica* publiblicó una larguísima tabla de los logaritmos de los números naturales, y empezó otra de los de los senos, y de las tangentes por todos los grados y centenas de los grados del quarto de círculo, la qual fué despues concluida y publicada por Gellibrand. El holandés Ulacq acarreó aun mas perfeccion, y dió mayor finura á la tabla de Neper y de Brigio, y siguiendo su exemplo otros muchos geómetras y aritméticos han trabajado, y todavía trabajan para construir tablas logarítmicas mas y mas exâctas y completas, de mas uso, y de mayor facilidad. Ademas de la invencion de los logaritmos debemos tambien á Neper el hallazgo de una maquinita, propuesta por

Rabdología. él en su *Rabdología*, y que puede verse en muchos libros aritméticos, entre otros en Wolfio (*a*), con la qual, por medio de ciertas varitas, ó laminitas ingeniosamente combinadas, presenta á la vista qualquier multiplicacion, y particion sin trabajo del calculador. Esta máquina, con alguna mejora para la firmeza de las varitas, y para la distincion de los números, fué en 1730 pre-

(*a*) *Elem. ar.* c. II.

presentada por Roussain á la Academia de las ciencias (*a*). El ardor que se excitó en el siglo pasado de promover los adelantamientos de la aritmética hizo que se pensase tambien en buscar los medios de facilitar las operaciones, y enriquecer con nuevos hallazgos la aritmética instrumental. Otra máquina inventó Pascal despues de Neper de uso mas universal; pero sobrado complicada y compuesta para que pudiese ser de alguna utilidad. Otra mas simple presentó Leibnizt en 1673 á la real Sociedad de Londres, de la qual él mismo nos habla con complacencia, y refiere la aprobacion que obtuvo de Tschirnaus, de Huingens y de otros (*b*); pero que igualmente habia quedado abandonada y olvidada; bien que, como dice Dutens (*c*), fué en estos años pasados puesta nuevamente en uso por Kæstnero. Otra máquina habia inventado Moreland, de la qual dió él ya la descripcion en 1666: otras

(*a*) *Hist. de l' Acad. des Sc.* an. 1370. (*b*) *Op. Leibn.* tom. II. *Brev. descr.* &c. (*c*) *Op. Lecibn.* tom. cit. *Præf.*

otras se han presentado en este siglo á la Academia de las ciencias por l' Epine, y por Boitissendeau, y otras inventadas por otros; pero todas han sido abandonadas, y yacen llenas de polvo, é inutiles, y la aritmética instrumental jamas ha podido estar en alguna reputacion. Son muy nobles y elevadas las matemáticas para que quieran servirse de tales medios, dexan para los muchachos estos juegos de manos, y exîgen en sus adoradores intension de mente, y fuerza de imaginacion. Mas honor acarreó á Pascal la invencion de su triángulo aritmético, en el qual señalando á la punta un número á su arbitrio, se forman sucesivamente todos los números figurados, se determinan las razones que tienen entre sí los números de dos casillas, sean las que se fuesen, y las diferentes sumas que resultan por la adicion de los números de una misma fila, y despues se hacen de ellas varias aplicaciones. Al mismo tiempo que Pascal trabajaba Fermat sobre los números figurados, y descubria en ellos muchas y muy bellas propiedades, de las quales su ingenio geométrico sabia aprovecharse; se aplicaba á la contemplacion de

Pascal.

Fermat.

de los números *primeros*, esto es, de los que no pueden dividirse en otros números enteros, y encontraba en ellos muy sutiles y verdaderos teoremas, que han llamado la atencion de Eulero (*a*), de la Grange (*b*), y de otros modernos; promovia mucho la analísis numérica de Diofante, puesta antes en reputacion por Bachet de Meciriac, como diremos despues mas extensamente (*c*), y daba honor á la aritmética con su nombre, y con sus descubrimientos. Al mismo tiempo florecia en aquella ciencia Frenicle, que se distinguió singularmente por la destreza y maestría en el cálculo numérico. Los quadrados mágicos, como hemos dicho arriba, ocuparon mucho su atencion, y dexó un largo tratado de ellos, que sino contribuye á la mejora de las ciencias, ciertamente le habrá servido á él mismo para disponer su mente á toda suerte de combinaciones numéricas. Otro dió mas útil sobre los *triángulos rectángulos en números*, y otro de una *abreviacion de las* com-

Frenicle.

(*a*) *Ac. Petr. Nov. Comm.* tom. V. al.
(*b*) *Ac. de Berl.* tom. XXXI, al. (*c*) Cap. III.

combinaciones, en los quales se leen curiosas y útiles especulaciones de toda suerte de números en general, pero particularmente de los figurados. No habia en aquellos tiempos problema alguno sobre los números, de quien no se viese una resolucion de Frenicle, y esta de la mayor elegancia. Fermat y Cartesio, opuestos entresí en tantos otros puntos, solo convenian en alabar las soluciones de Frenicle, y en preferirlas muchas veces á las suyas propias: ocupados, como dice Condorcet (*a*), en disputarse la superioridad en los grandes objetos, daban voluntariamente á Frenicle esta prueba de justificacion, que era nada violenta á su amor propio. El *Método de las exclusiones* le daba tal facilidad para la resolucion de semejantes problemas, que tenia admirados á los aritméticos, hasta que con la impresion de este y de otros tratados suyos se vieron los caminos que él se habia abierto, y que felizmente habia seguido. Ahora han dexado de ser de moda estos problemas, y merecen poca atencion tales teorías; pero noso-

(*a*) *Eloq. de Frenicle.*

sotros observando que Beguelin presenta con freqüencia á la Academia de Berlin los problemas numéricos en que se habian ocupado Bachet, Fermat y Frenicle (*a*): oyendo resonar tan amenudo los nombres de estos aritméticos en las Academias de Petersburgo y de Berlin en las bocas de Eulero y de la Grange (*b*); viendo á estos dos consumados aritméticos de nuestros dias, agitar con tanto ardor y constancia las investigaciones sobre los números primeros y enteros, sobre los divisores, y sobre otros puntos semejantes (*c*), no podemos dexar de aplaudir las especulaciones de Frenicle, y de Fermat, y profesar grato reconocimiento á sus doctas fatigas. Quando estos, y otros célebres matemáticos se empleaban en tales teorías, otros pensaban en mudar todo el sistema de la aritmética, y formar otros enteramente diversos. Weigel observando que los

Aritmética quaternaria.

(*a*) Tom. XXVIII, XXXI, al. (*b*) *Nov. Comm. Ac. Peter.* tom. II, al; *Academ. de Berl.* t. XXIV, XXVIII, XXXI, al. (*c*) *Academ. Peter.* ibid. *Ac. de Berl.* tom. cit. XXVI, al.

los pitagóricos tenian en particular aprecio la *tetractys*, ó el quaternario, se imaginó que fuese esta una aritmética quaternaria, esto es, una aritmética, que solo usase el periodo de quatro, como nosotros usamos el de diez, y no tuviese mas caractéres que 1, 2, 3, 0, y creyó encontrar grandes ventajas en este modo de contar; así que quiso exponer el método, y la utilidad en dos obras sobre la *tetractys pitagórica*, publicadas hácia el año 1670. Si Weigel por una soñada imitacion de los pitagóricos intentó formar una aritmética *tetractyca*, ó quaternaria, Leibnitz con estudio para mayor comodidad en el exâmen de los números, inventó una aritmética del mas breve y simple periodo que pueda darse, qual es la *dyadica*, ó binaria, que con solos los caractéres 1 y 0, puede expresar todos los números. Estos tienen dos especies de propiedades; algunas esenciales, qual es, que los números impares puestos en serie, y sumados dan la serie natural de los quadrados; otras accidentales, que dependen de una arbitraria colocacion, qual es por exemplo, que en todos los multiplices de 9, las cifras que los expresan juntandolas dan siempre 9, ó una multiplicacion de 9, lo que proviniendo unicamente de ser 9 el penultimo número del periodo decuplo, colocado arbitrariamente, no es mas que una propiedad accidental, pero que sin embargo acarrea sus comodidades á la aritmética. Ahora pues de semejantes propiedades accidentales encontró Leibnitz mas en su aritmética binaria, que en la nuestra decimal, añadiendo ademas mayor facilidad para todas las comunes operaciones; y en 1702 dió parte de este invento suyo á la Academia de las ciencias, y en seguida de todas las ventajas que creia pudiesen resultar. Al mismo tiempo Lagny, profesor de hidrografía en Rochefort, sin tener noticia del descubrimiento de Leibnitz, para evitar algunos inconvenientes que encontraba en los logaritmos, pensó tambien en una aritmética binaria, con la qual las multiplicaciones y las particiones se hacen necesariamente por simples adiciones y substracciones, y como él dice, las multiplicaciones y las particiones son los *logaritmos naturales* (a). Dagincourt, en una me-

(a) *Hist. de l' Ac. des sc.* an. 1703.

memoria sobre esta aritmética leibnitciana, hace ver quanto mayor sea la facilidad de encontrar con ella las leyes de las progresiones, que con qualquiera otra de mas caractéres, ó de mas largo periodo (*a*). Una utilidad de la aritmética binaria, en la qual ciertamente no pensaron ni Leibnitz, ni Lagny, ni Dagincourt, que fué enviada por el mismo Leibnitz al P. Bouvet en la China, pareció oportuna para hacer entender los antiquísimos caractéres de Fohi, que eran muchos siglos habia ininteligibles á los mismos chinos, y podian con esta combinacion de números recibir alguna luz (*b*). Pero sean las que se fuesen las ventajas de estas aritméticas quaternarias y binarias, no bastan á compensar los embarazos que requeririan con la multiplicacion de caractéres, de que tendria necesidad para expresar los números algo altos; y antes bien, queriendose introducir alguna novedad, en vez de abreviar el periodo de los números á 4, ó 2, seria

(*a*) *Misc. Ber.* t. I. (*b*) Leibn. *Ac. des sc.* an. 1703.

ria mucho mas útil el prolongarlo á doce ó diez y seis, que sufren mas divisiones en números enteros sin necesidad de quebrados. Pero es muy dificil el abandonar los métodos antiguos adoptados generalmente de todos, para recibir otros nuevos imaginados de pocos, singularmente quando las ventajas no son patentes, y pueden ser justamente contrastadas. Así que las aritméticas quaternaria y binaria, no han encontrado sequaces que las abrazasen, ni podia esperarse que encontrasen mas si se quisieran introducir la de doce, ó la de diez y seis números, aunque tuvieran mas manifiestas utilidades.

Aritmética de los infinitos de Wallis.

En mas sublimes teorías aritméticas pensaban entonces los profundos ingleses. Nada menos que una aritmética de los infinitos se atrevió á formar Wallis; las mas largas é intrincadas series de números se reducian á sus exâctas sumas, y sujetándose á las leyes que les imponia aquella nueva aritmética, dexaban descubrir sus mutuas razones; la fraccion continua de Brounker, de la qual han manifestado tan bellos usos Eulero (*a*) y la Grange (*b*), ha nacido de la

(*a*) *Ac. Petr.* 1737. (*b*) *Ac. de Berl.* t. XXIV.

la aritmética de Wallis; el infinito mismo, y las inexplicables series de números infinitos no se escapaban de sus reglas, y se dexaban desenvolver y contemplar, quando estaban en las delicadas manos de Mercator, de Barrow y de otros, aunque pocos, dirigidos de algun modo por la doctrina de Wallis. Todo quanto pertenece á cuentas y cálculo, sea por medio de cifras numéricas, ó de signos algebráicos, sea definido y particular, ó indefinido y universal, sea de razon de números á numeros, ó de quantidad á quantidad, todo lo abrazó el gran Newton en su *Aritmética universal*: él reduxo á un cuerpo la aritmética y el álgebra, para formar con ellas un cuerpo perfecto del arte de calcular, y dió de este modo á la aritmética la mayor extension y dignidad á que jamas pudiera aspirar. Pero de las series numéricas, tan manejadas por los modernos matemáticos, y de las aritméticas de Wallis y de Newton, hablarémos con mas extension en el capitulo siguiente, como de materias enteramente algebráicas. Tambien por otro camino se ennobleció la aritmética á fines del siglo pasado aplicandose á diversos usos,

Aritmética universal de Newton.

Usos diversos de la aritmética.

usos, á que antes jamas se habian aplicado. Pascal (*a*), Sauveur (*b*) y algun otro francés habian ya insinuado alguna aplicacion de la aritmética á las combinaciones de los juegos; Huingens escribió expresamente un tratado (*c*), donde buscó el modo de discurrir acertadamente en los juegos que mas dependen de la suerte que de la razon. Leibnitz aplicó tambien el cálculo á la jurisprudencia y á la moral, y determinó por su medio la usura, ó el fruto del dinero que puede ser conveniente en diversas circunstancias (*d*). Petry reduxo á cálculo el número de los habitantes de una nacion, las mercaderías que deben consumir, las labores que pueden hacer, la cultura de los terrenos, la navegacion, el comercio, y quanto puede interesar al gobierno público, y dió de este modo principio á la aritmética política. Así se fué aplicando la aritmética á todas las materias; y en breve todas las qüestiones fueron

En los juegos.

En la jurisprudencia.

En la política.

(*a*) *Triang. aritm.* (*b*) V. Fonten. *Eloge de Mr. Sauveur.* (*c*) *De ratioc. in ludis aleæ.* (*d*) *De interus simpl. in Act. cr. Lyps.* an. 1683.

ron reducidas á qüestiones de mero cálculo. Pero estos no fueron mas que ligeros ensayos de los grandes esfuerzos, que despues han hecho los mas profundos matemáticos para levantar la gran fábrica del arte de conjeturar, de la doctrina de la suerte, del cálculo de la probabilidad. Pero todas estas materias y probabilidades, aunque pueden decirse nacidas baxo la jurisdicion de la aritmética como dependientes de las combinaciones numéricas, fueron despues transferidas al álgebra, y han quedado sujetas á su dominio. Entretanto las especulaciones aritméticas eran miradas con indiferencia por los matemáticos: estos consideraban como esteriles las verdades pertenecientes á los números, y las dexaban abandonadas, como poco dignas de sus meditaciones, segun nos asegura Eulero (*a*). Sin embargo no faltaron ilustres matemáticos, que gustasen de entretenerse en tales qüestiones, é hiciesen su corte á la aritmética. Vemos á Carré ocupado en explicar una curiosa propiedad del número 6, que tomándose por di-

Aritméticos modernos.

vi-

(*a*) *Ac. Petr. Nov. Comm.* t. I.

visor de todos los números cúbicos, dexa en cada uno una resta, que es la raiz de aquel cubo; y á la Hire con sutiles é ingeniosas combinaciones encontrar la misma propiedad en todos los números elevados á qualquier potestad (*a*). Vemos á Krafft trabajar sobre las multiplicaciones del 7; y no contento con la regla que nos dieron Stifels, y Juan Krafft en el siglo XVI, propone otra á la Academia de Petersburgo, la qual, evitando los inconvenientes que descubria en la antigua, tuviese mayor claridad y sencillez (*b*). El mismo Krafft trató de los números *compuestos*, esto es, de aquellos cuyo menor se forma con la suma de los números aliquotes del mayor, como 220, y 284 (*c*), y encontró en ellos ingeniosas y útiles novedades. Winsheim escribió sobre los números perfectos (*d*). Hanschio propuso á los matemáticos la teoría de una aritmética enriquecida por él con nuevos inventos (*e*).

R 2 en-

(*a*) *Hist. de l' Ac. des Sc.* an. 1704. (*b*) *Ac. Petr.* t. VII. (*c*) *Ac. Petr. Nov. Comm.* t. II.
(*d*) *Ac. Petr.* ibid. (*e*) *Ep. ad Math. de theor.* &c. 1738.

Goldbach expuso un teorema perteneciente á los divisores de los números (*a*), y el antes citado Krafft trató de estos con bastante mas extension. Kruger en sus *Pensamientos sobre el álgebra* ha publicado tablas de los números *primeros*; Lambert las ha aumentado despues. Moulieres presentó á la Academia de las ciencias en 1704 (*b*) un método para encontrar los números *primeros*; y Rallier des Ourmes envió á la misma en estos años otro fácil para descubrir todos aquellos, que se contienen en un curso ilimitado de la serie de los impares, y para distinguir al mismo tiempo los divisores simples de aquellos que no lo son (*c*). Buffon (*d*), Lambert (*e*), Beguelin, Bernoulli (*f*) y otros geómetras de crédito, no se han dexado llevar de la comun opinion, y han abrazado las especulaciones numéricas que

(*a*) *Act. Erud. Lyps. Suppl.* t. VI. (*b*) *Hist. de l' Ac.* 1705. (*c*) *Mém. de Math. & de Phys. présent. á la R. Ac. des Sc.* t. V. (*d*) *Ac. des Sc.* an. 1741. (*e*) *Act. Helvat.* t. III. (*f*) *Ac. de Berl.* XXVII, XXVIII, al.

que otros habian empezado á abandonar: ¿Pero que mas? Los dos oráculos de las modernas matemáticas, Eulero (*a*) y la Grange (*b*), no solo no se han desdeñado de dirigir sus pensamientos á tales qüestiones, sino que las han agitado tan repetidas veces, y las han exâminado con tanto ardor, que parece que hayan encontrado en ellas sus mayores delicias, y ciertamente han hecho ver que no miraban las doctrinas numéricas como esteriles verdades, ó como poco dignas de ocupar su geométrica atencion. Pero sin embargo es preciso confesar que estos mismos argumentos, aunque todos versan sobre los números, y por lo mismo son enteramente aritméticos, se hallan por la mayor parte tratados algebraicamente, y casi todos los escritos insinuados ahora, aunque citados por nosotros en este capitulo, mas pertenecen al álgebra que á la aritmética. El álgebra que por tantos siglos solo habia sido auxîliadora y sierva de la aritmética, se

(*a*) *Ac. Petr.* t. XIV, *Novi Comm.* t. I, II, IV, al. (*b*) *Ac. de Berl.* t. XXIX, XX, XI, al.

se ha elevado despues á formar por si misma una ciencia, y ha sojuzgado, por decirlo así, á su principal y señora: la facilidad y expedicion que ofrece para los mas sublimes cálculos, y para las mas dificiles operaciones, ha llamado la atencion de los mas ilustres matemáticos: todas las qüestiones pertenecientes á los números, que antes eran de la inspeccion de la aritmética se han sujetado á la decision del álgebra; esta se ha enriquecido con el caudal mismo de aquella, y aun para mejorar la aritmética se han dirigido al álgebra los estudios de los matemáticos. Nosotros pues dexando á aquella pasarémos á exâminar el origen y los progresos de esta.

CAPITULO III.

Del Algebra.

Origen del álgebra. El álgebra, mirada primero como un método de la aritmética, y despues como una aritmética de signos aplicables á los números, ó como una aritmética mas universal y abstracta, ha sido finalmente aplicada, no menos que á los números, á las magnitudes, y

y á las quantidades geométricas, y se ha formado una ciencia media entre la aritmética y la geometría, y distinta de una y de otra, ó por mejor decir, que comprehende y abraza á ambas á dos. El nombre de álgebra viene del árabe ألجبر que significa *restitucion*, ó *union en un entero*; y por esto creen muchos que deba tomarse de los árabes el origen de una ciencia, á quien ellos han dado el nombre. Pero el álgebra reconoce un origen harto mas antiguo, y trae de la docta Grecia su literaria nobleza. Los árabes mismos se la confirman espontaneamente; y la obra *De los aritméticos* de Diofante es un incontrastable monumento, que prueba mucho á favor de los griegos, para que se les pueda disputar este honor. ¿Pero á que griego deberémos atribuir la gloria de la invencion de aquella ciencia? ¿Fué Diofante el autor del álgebra, ó solo fué ilustrador y propagador de la misma, conocida ya antes, y usada por otros griegos? Algunos creen descubrir en Euclides (*a*) los fun- Diofante inventor del álgebra.

(*a*) *Elemen.* lib. II, c. IX, prop. VII.

se ha elevado despues á formar por si misma una ciencia, y ha sojuzgado, por decirlo así, á su principal y señora: la facilidad y expedicion que ofrece para los mas sublimes cálculos, y para las mas dificiles operaciones, ha llamado la atencion de los mas ilustres matemáticos: todas las qüestiones pertenecientes á los números, que antes eran de la inspeccion de la aritmética se han sujetado á la decision del álgebra; esta se ha enriquecido con el caudal mismo de aquella, y aun para mejorar la aritmética se han dirigido al álgebra los estudios de los matemáticos. Nosotros pues dexando á aquella pasarémos á exâminar el origen y los progresos de esta.

CAPITULO III.

Del Algebra.

Origen del álgebra.

El álgebra, mirada primero como un método de la aritmética, y despues como una aritmética de signos aplicables á los números, ó como una aritmética mas universal y abstracta, ha sido finalmente aplicada, no menos que á los números, á las magnitudes, y

y á las quantidades geométricas, y se ha formado una ciencia media entre la aritmética y la geometría, y distinta de una y de otra, ó por mejor decir, que comprehende y abraza á ambas á dos. El nombre de álgebra viene del árabe ألجبر que significa *restitucion*, *ó union en un entero*; y por esto creen muchos que deba tomarse de los árabes el origen de una ciencia, á quien ellos han dado el nombre. Pero el álgebra reconoce un origen harto mas antiguo, y trae de la docta Grecia su literaria nobleza. Los árabes mismos se la confirman espontaneamente; y la obra *De los aritméticos* de Diofante es un incontrastable monumento, que prueba mucho á favor de los griegos, para que se les pueda disputar este honor. ¿Pero á que griego deberémos atribuir la gloria de la invencion de aquella ciencia? ¿Fué Diofante el autor del álgebra, ó solo fué ilustrador y propagador de la misma, conocida ya antes, y usada por otros griegos? Algunos creen descubrir en Euclides (a) los fun-

Diofante inventor del álgebra.

(a) *Elemen.* lib. II, c. IX, prop. VII.

fundamentos del álgebra (*a*). Pero si he de decir la verdad ni en Euclides, ni en ningun otro griego anterior á Diofante puedo encontrar manifiestos indicios de aquella ciencia, aunque tal vez ahora que tenemos la mente algebráica, nos parecerá alguna rara demostracion suya regulada por sus principios; y Diofante es el primero que nos haya dado á conocer el álgebra, y el único, que yo sepa, que la haya tratado con extension y con maestría. El mismo habla de modo, que parece manifestar con bastante claridad haber sido invencion suya la doctrina propuesta por él, y explicada en su obra. El llama tentativa, prueba, conato suyo la formacion de aquel método para la resolucion de los problemas numéricos: él dice, que este modo suyo parecerá mas difícil y trabajoso por ser aun enteramente desconocido; él expone las palabras de que ha de usar, forma difiniciones, de las cosas que ha de tratar, y explica individualmente las doctrinas preliminares, como el que va á hablar de una

(*a*) Bettini Appiar. XI, c. II.

una ciencia nueva, y que aun no es conocida de otros. Observo ademas, que ni Diofante en los muchos problemas que se propone y resuelve, cita jamas á ningun otro matemático, que haya buscado la solucion; ni se ve citado por los griegos posteriores otro escritor de esta ciencia anterior á Diofante; ni los árabes, que en esta parte pueden tener tanta autoridad como los mismos griegos que nos han quedado, hablan de otro griego algebrista que Diofante. Y todo esto me induce á concluir, que Diofante haya sido realmente el autor del álgebra, y que por ella deba coronarse de gloria su nombre con el de los mas ilustres griegos, de los mas famosos inventores, y de los mas beneméritos de las ciencias. Ninguna ciencia ha sido perficionada al mismo tiempo que inventada, y no podia el álgebra aspirar á este lisonjero privilegio, ni llegar desde sus principios á una madura perfeccion. La doctrina de Diofante versa solo sobre las equaciones del primer grado; pero sin embargo él manifiesta acá y acullá, que tambien sabia la fórmula para las del segundo; y por mejor decir desde el principio promete (*a*) enseñar despues el modo de resolver los problemas, que parecen pertenecer á las equaciones del segundo grado. Pero sean los que se fuesen los problemas que él se pone á resolver, ciertamente debe causar maravilla la sagacidad y maestría con que los maneja, y la ingeniosa aplicacion que hace del analisis algebráica para su resolucion. El método y el arte de Diofante de evitar los valores irracionales por medio de ciertas equaciones fictas; la destreza en resolver equaciones simples y dobles, y aun mas altas, y otros bellos inventos del griego algebrista, son mirados con respeto por los mas doctos modernos, y juzgados dignos de ser no solo abrazados, sino ilustrados, y llevados á mayor perfeccion con sus doctas fatigas. Hemos perdido muchos libros de Diofante; pero aquellos que se conservan bastan para darnos una ventajosa y gloriosa idea de su agudo ingenio, y de su profundo saber (*). Estos son tambien

los

(*a*) Lib. I. de fini. XI.

(*) Para no interrumpir el hilo de la historia, darémos aquí alguna ligera idea de las palabras y de

los

los únicos monumentos de la doctrina algebráica de los griegos antiguos. La célebre é infeliz Ipacia, acostumbrada á manejar las mas escabrosas espinas de la geometría y del cálculo, era la mas oportuna para ilustrar el álgebra, y las obras de Diofante; y en efecto hizo de ellas un comentario, como sabemos por Suidas (*a*); pero tambien este precioso monumento del álgebra griega se ha perdido mucho tiempo

S 2 ha,

los signos del álgebra de Diofante. El llama (*Defin. II.*) el quadrado *potestad*, ó δύναμις, y lo señala con el δ, añadiendole un υ de este modo δ^υ; así el cubo κ^υ, el quadri-quadrado δδ^υ, que es δυναμοδύναμις, y el quadrado cubo δκ^υ. El número que no es mas que simple número, ó, como se dice ahora, primera potencia, es llamado *número*, y señalado con el ς'; la unidad con el μ añadiendole un ο, μ^ο. El *mas* se llama ὕπαρξις, el *menos* λεῖψις; y se señala el *menos* con el ↓ al reves, ó ↑; pero del *mas* no se ve signo particular. En las ciencias, como en todas las cosas grandes, las mas pequeñas antigüedades interesan mucho la curiosidad de los doctos y verdaderos filósofos: pero lo vasto de la materia no nos permite tratar distintamente cada cosa de por sí.

(*a*) V. Ὑπατία.

ha, y no nos ha quedado vestigio alguno para poder descubrir qual fuese su doctrina.

Arabes cultivadores del álgebra.

Despues de Diofante los árabes son los únicos, que deban llamar nuestra atencion. Algunos como hemos dicho arriba, quieren dar á los árabes la gloria de la invencion del álgebra; y si es cierto, como ingeniosamente dice Fontenelle (*a*), que los descubrimientos pertenecen á quien les da el nombre, ¿de que derecho no podrán gloriarse los árabes sobre aquella ciencia, que en su mismo nombre se manifiesta ya árabiga? Cárdano en efecto no duda asegurar (*b*), que este arte tomó su principio del árabe Moamad, hijo de Moyses, y cita como testigo irrefragable á Leonardo de Pisa. Tartaglia igualmente llama inventor de esta ciencia al citado Moamad (*c*). Otros, llevados solo de la semejanza del nombre, quieren atribuir el origen del álgebra al médico y filósofo Giaber, ó á Geber famoso astrónomo de Sevilla. Wallis (*d*) cree, sí, que el álgebra fue-

(*a*) *Elog.*. (*b*) *Artis magn.*, *seu De regul. alg.* cap. I. (*c*) *Pref. all' Euclid.* (*d*) *Algebra.*

fuese ya conocida y explicada por los griegos; pero que sin embargo pueda darse á los árabes la gloria de haberla inventado por sí mismos sin recibirla de la Grecia. Porque si fuese griega el álgebra arábiga, seria griega igualmente la denominacion de las potestades; pero vemos al contrario que el quadrado cubo, que en Diofante no es mas que el quadrado multiplicado por el cubo, entre los árabes es harto mas alto, y es el quadrado del cubo, ó el cubo del quadrado; y de este modo toman los árabes otros nombres en diverso sentido del que tenian entre los griegos: por lo qual no cree Wallis, que los árabes hayan recibido de los griegos aquella ciencia, que tan diversa es entre unos y otros en el significado de las palabras. Por mas fuerza que se le quiera dar á la congetura de Wallis debe ceder á las razones contrarias mas poderosas, y al testimonio mismo de los árabes, mas fuerte en esta parte que todas las razones. Los árabes tomaron de los griegos la aritmética, la geometría, la astronomía, y todas las partes de las matemáticas, ¿y dexarian solo el álgebra, y se tomarian el tra-

trabajo de buscarla por sí mismos, quando la tenian en los libros griegos? ¿Y no será mas poderosa razon para inferir la identidad del origen del álgebra arábiga y de la griega la semejanza de muchos nombres, que la desemejanza de algunos pocos para probar que sean diversas? Tambien Lucas Pacioli, y los otros primeros algebristas europeos tenian ciertos nombres de números *relatos*, *pronicos* y otros, no usados por los griegos, ni por los árabes, y sin embargo no podrá dudarse que su álgebra no sea de origen sarraceno. ¿Pero para que buscar conjeturas quando los mismos árabes atestiguan haberla recibido de los griegos? „ Diofante (se lee en la *Biblioteca* „ *arábiga de los filósofos*) compuso una „ obra muy alabada del arte algebráica, „ que ha sido traducida en árabe; y quan„ tos han escrito despues de álgebra, to„ dos se han elevado sobre los fundamen„ tos de aquel." Del mismo modo habla Abulfarage en su historia, y generalmente todos los árabes confiesan honradamente deber á Diofante y á los griegos esta útil ciencia. Pero si aquellos no dieron el origen al álgebra, le acarrearon ciertamente mu-

muchos adelantamientos, y la conduxeron á mayor perfeccion. El primero, segun el testimonio de Cazuineo como dice Casiri (*a*), que enseñó á los árabes aquella ciencia, fué Moamad ben Musa, ó hijo de Moyses, nombre célebre tambien entre los latinos, llamado por los primeros europeos, como hemos dicho, inventor del álgebra, y celebrado particularmente por Cárdano (*b*) como uno de los doce ingenios mas grandes que han venido al mundo. Discípulo de Moamad fué Thabit ben Corrah, el qual no solo escribió de aritmética y de álgebra, sino que dió tambien una obra de problemas algebráicos dignos de comprobarse con demostraciones geométricas. Montucla (*c*) cita un códice de Omar ben Ibraim existente en la biblioteca de Leiden, el qual teniendo el título de *Algebra de las equaciones cúbicas*, manifiesta que los árabes llegaron gloriosamente á las equaciones del tercer grado. Del álgebra escribió tambien en aquellos tiem-

Moamad.

Thabit ben Corrah.

Otros árabes algebristas.

(*a*) *Bibl.* &c. t. I, p. 37. (*b*) *De subt.* lib. XVI. (*c*) *Hist. des Math.* par. II, t. I, §. IX.

tiempos Ahmad Altajeb, discípulo del célebre Alkindi; del álgebra el famoso calculador Ebn Albanna de Granada; del álgebra escribieron Kosein, Jahia, Tejoddin, é infinitos otros, y fué tan universal el deseo de escribir del álgebra, que hasta poemas se compusieron de ella, encontrandose, que yo sepa, uno de Ibn Jasmin, sobre el qual exîsten los comentos en la biblioteca Bodleyana (*a*), y otro de un anónimo en la biblioteca del Escorial (*b*). Nosotros no gozamos ya, ni hacemos caso de las luces algebráicas de los maestros sarracenos: los ulteriores adelantamientos que le han acarreado los modernos analistas nos hacen olvidar los conocimientos arábigos; pero siempre debemos reconocernos obligados á quien nos comunicó las primeras luces, y nos allanó el camino para podernos internar en mas grandes y útiles descubrimientos.

De los árabes pasó á nuestras escuelas la ciencia algebráica; pero no sabemos quienes hayan sido los primeros europeos que

(*a*) Heilbronner *Hist. math.* p. 611.
(*b*) Casir. t. I. p. 379.

que comunicaron á sus nacionales tan precioso don. Tal vez aquel Josef Español, cuya aritmética apreciaba tanto Gerberto, habrá conocido igualmente la aritmética especiosa, como suele tambien llamarse el álgebra. Tal vez algunos de los muchos libros matemáticos del Archivo de Toledo, en los quales, segun dice Terreros, ó Burriel (*a*), se ven adoptadas las cifras arábigas, habrán tambien tratado el álgebra arábiga. Lo cierto es que allí se veian traducidas en latin algunas obras de Thabit ben Corrah, el qual es mirado como uno de los padres de esta ciencia. Tal vez Gerberto, que tan magistralmente habla de la aritmética, que aprendió en España, habrá comprehendido baxo este nombre el álgebra. Tal vez Juan de Sevilla, tal vez...... ¿Pero de que sirve el ir en busca de inutiles conjeturas, que no pueden darnos luz alguna sobre los progresos de aquel arte? Sean lo que se fuesen aquellos antiguos matemáticos, nosotros no tenemos ya monumento alguno, ni seguro indicio de su álgebra. El primer europeo de quien se hayan

Europeos cultivadores del álgebra.

(*a*) *Paleog. esp.* pag. 102.

Leonardo de Pisa. yan conservado es Leonardo Fibonacci de Pisa, en su obra citada arriba del *Abaco*, en la qual todo el capítulo XV de la parte IX es de reglas y proporciones pertenecientes á geometría, y de qüestiones del álgebra, y de almuchabala, ó *Introductoria àlgebrae, et Almuchabale*. En cuyo largo capítulo, dice Targioni (*a*), se sirve Leonardo de las letras a, b, c, &c. y de otros signos algebráicos. Y aunque en lo poco que he podido leer de aquel códice, ni he visto signos algebráicos, ni creo que las letras a, b, c, &c. se usen para otra cosa que para señalar cantidades geométricas; sin embargo no dudo que él tratase del álgebra con bastante doctrina, segun lo que podia esperarse en aquellos tiempos, y ciertamente merece la veneracion de todos los posteriores, como el primer maestro que se conozca de aquella ciencia. No me atreveré á colocar positivamente entre los algebristas al antes citado Paulo de Dagomari, ó del *Abaco*, porque el llamarlo Villani superior á todos

(*a*) *Relaz. d' Alc. Viag.* &c. tom. II.

dos los otros en las equaciones, y el cantar de él Verino *Velox qui computat omnia signis*, no basta para darle, como quiere el docto Ximenez (*a*), la gloria de algebrista, pudiendo entenderse el dicho de Villani no de las equaciones algebráicas, sino de las astronómicas, como dice la edicion italiana, y el de Verino, no de los signos algebráicos, sino de los numéricos, los quales en efecto son lo que él alaba como traidos del Ganges por este Paulo. Pero sí diré que hácia la mitad del siglo XV eran ya harto comunes los conocimientos algebráicos, no solo en Italia, sino tambien en Alemania, y en otras naciones, puesto que el célebre Regiomontano no solo se sirve utilmente de ellos para resolver varios problemas (*b*), sino que proponiendo una equacion del segundo grado, dice sencillamente, como de cosa nada nueva, y bien conocida, *fiat secundum cognita artis precepta*, como á este propósito observa Montucla (*c*). Esta general propagacion

T 2

(*a*) *Del gnom. fior.*, *Intr.* (*b*) *De triangul.* lib. V. (*c*) *Hist. des Math.* par. III, lib. II, §. I.

cion del álgebra puede tambien deducirse evidentemente de la obra misma de Lucas Paccioli, aunque la primera sobre esta materia que se haya dado á luz; puesto que en ella vemos desde el principio, que no solo era conocida de algun erudito y profundo matemático, sino que hasta del vulgo era distinguida y nombrada con tres nombres diversos, y hora era llamada *arte mayor*, hora *regla de la cosa*, hora *álgebra y almucabala* (a); y sus reglas se exponen en el discurso del libro como cosas comunes, y sin ninguna señal de novedad, ni jamas se descubre en el autor expresion alguna de vanagloria, ó de complacencia, como si creyera esparcir nuevas doctrinas aun no conocidas de otros.

Pero sea lo que se fuese de esta general propagacion del álgebra, lo cierto es que la primera obra dada á luz, que contenga esta doctrina, ha sido la sobredicha *Suma de aritmética, geometría, proporciones, y proporcionalidades* de Lucas Paccioli del Borgo de san Sepolcro. Toda la dis-

Lucas Paccioli.

(a) Dist. VIII, *Præf.*

distincion octava comprehendida en seis largos tratados versa sobre este arte, llamada por él, qual es en realidad, *muy necesaria á la práctica de la aritmética, y tambien de la geometría*, y explica sus principios y sus reglas, y forma, por decirlo así, un curso harto completo del álgebra, qual se hallaba en su tiempo. El no pasa de las equaciones del segundo grado, y aun para estas no considera mas que tres casos, para los quales da sus reglas, verdaderas sí, pero no bastante generales y completas, que no abrazan las raices negativas, sino solo las positivas. El mérito de Lucas no fué otro que el de haber expuesto á la pública inteligencia los descubrimientos de otros, y no se le puede atribuir la gloria de haber hecho alguno por sí mismo, ni de haber extendido los confines de su arte. Lo hizo poco despues Scipion del Ferro encontrando las equaciones del tercer grado, que Lucas no solo creia, sino que abiertamente aseguraba que no se podian encontrar; invencion que Cárdano ensalza con las mayores alabanzas, y la llama bella y maravillosa, superior á toda humana agudeza, y á las lu-

Scipion.

luces de todo ingenio mortal (*a*). Esta invencion comunicada secretamente por Ferro á Antonio María del Fiore, le dió gran facilidad para resolver muchos problemas creidos hasta entonces irresolubles, y le animó á intimar al famoso Tartaglia un desafio aritmético. Entonces Tartaglia estimulado de la emulacion y del deseo de vencer en aquella lid, aguzó su ingenio, é inventó una regla para la resolucion de tales problemas, que tenia el mérito de ser mas general, y de comprehender muchos casos, á los quales no era aplicable la de Scipion. Era costumbre en aquellos tiempos ocultar los métodos hallados, y tener así un medio para resolver muchas qüestiones, de que carecian los demas. En efecto el arriba citado del Ferro no quiso comunicar mas que á un discípulo suyo muy amado, y aun á este baxo riguroso secreto, su estimable descubrimiento. Así que Cárdano, en la breve historia que texe del álgebra, aunque refiere todos los pasos, y los descubrimientos hechos hasta entonces, no conoce los auto-

Tartaglia.

(*a*) *Art. magn.* cap. I.

tores de ellos, ni sabe nombrar á otros que al árabe Moamad, y á estos dos coetáneos suyos. Pero Tartaglia era en esta parte mas zeloso que todos los demas; y Nuñez (*a*) lo acusa particularmente de aquella, por decirlo así, literaria avaricia: y Cárdano refiere que no quiso resolverse á darle parte de su descubrimiento sino sacandoselo á pura fuerza, y obligado de repetidas é importunas instancias. Fortuna ha sido para nosotros que la activa y obstinada importunidad de Cárdano llegase á sacarle de la boca el deseado arcano, y que su ambicion de gloria le hiciese superar el escrúpulo de faltar á la palabra de guardar el secreto, y complacerse de comunicarlo al público. Tartaglia era tal vez matemático mas profundo, y de mas agudo ingenio que Cárdano; pero de un estilo y discurso rústico é inculto correspondiente á su vulgar educacion, no pulida con los buenos estudios, y de una índole altiva é inquieta que le conciliaba muchos enemigos; por lo qual si él hubiese publicado sus descubrimientos, como lo hizo despues en ver-

Cárdano.

(*a*) *Lib. de Alg.*

versos bárbaros, ciertamente no hubieran llamado la atencion de los matemáticos, y tal vez hubieran quedado sepultados en su misma obscuridad, y en general abandono. Así que Cárdano siendo erudíto y culto, si faltó al secreto prometido á Tartaglia, y le causó disgusto, contribuyó por ello mejor á la celebridad del descubrimiento, al provecho de los estudiosos, y á los progresos de las ciencias. El expuso el método de Tartaglia, ó las fórmulas de las equaciones del tercer grado en clara latinidad, y con expresiones fáciles é inteligibles; él encontró las demostraciones en que no habia pensado Tartaglia; él amplio y extendió á todos los casos las reglas, que solo eran aplicables á aquellas, en las quales falta el segundo término, lo que entonces no podia hacerse comun á todas; él en suma ilustró y enriqueció con tantas mejoras y aumentos las fórmulas de Tartaglia, que con razon mereció la gloria que le ha concedido la posteridad de dar á aquellas el nombre de *Fórmulas de Cárdano.* Gua, ocupado en las investigaciones del número de las raices, que pueden encontrarse en las equaciones de todos

dos los grados, explica distintamente la doctrina de Cárdano perteneciente á estas raices (*a*); pero parece que no haya sido bastante cauto en decidir, que así él como el mismo Paccioli ignoraron de todo punto las raices negativas, al paso que en muchas partes de su libro (*b*) manifiestamente hace uso de tales raices. Una observacion, que da mucho honor á la prespicacia algebráica de Cárdano, es la limitacion que él hace de las reglas de las equaciones del tercer grado, en el caso que la extraccion de la raiz quadrada, que debe entrar en tales equaciones, no sea posible, ó sea como se dice, *imaginaria.* Este es el célebre caso *irreducible*, en el qual se encuentran tres raices sordas; y han sido vanos todos los esfuerzos hechos hasta ahora para expresar estas raices en términos racionales, y no se ha podido señalar una regla general para mudar en reales asignables las magnitudes imaginarias, que presenta la fórmula, y baxo las quales se ocultan

Caso irreducible de las equaciones del tercer grado.

(*a*) *Acad. des sc.* an. 1741. (*b*) *Art. magn.* c. III, VII.

tan las raices reales de las equaciones. Este caso irreducible ha llamado por mas de dos siglos la atencion de los algebristas, y ha sido para el álgebra, lo que la quadratura del círculo para la geometría, ó el escollo en que han naufragado quantos han querido superar aquella dificultad; y es gloria de la agudeza de ingenio de Cárdano el haber encontrado desde el principio un caso tal, y reconocido la insuperable resistencia á todos los esfuerzos de los analistas. Estos méritos de Cárdano han transmitido su nombre con mucho crédito á la posteridad, y le han acarreado el honor de ocupar los pensamientos y los estudios de los matemáticos de todos los tiempos; y no solo Wallis (*a*), Baker (*b*) y otros en el siglo pasado, sino que tambien Eulero (*c*) y otros célebres matemáticos del presente, hasta estos dias, se han empleado, y se emplean en dar mayor ilustracion, y mas extension á su doctrina, y todos contribuyen á hacer mas y mas

(*a*) *Algeb.* (*b*) *Cardanus promotus.* (*c*) *Elem. de alg. reet.* IV, ch. XII.

mas ilustre y glorioso en las matemáticas el nombre de Cárdano, que no es muy respetado de los médicos, ni de los filósofos. Para mayor gloria suya tambien su discípulo Luis Ferrari contribuyó mucho al adelantamiento del arte algebráica. Luis Ferrari. El mismo Cárdano dice abiertamente que algunos descubrimientos referidos por él no son suyos, sino de su discípulo Ferrari, y á este particularmente refiere dos demostraciones (*a*). Atribuyase á Cartesio un *martillo cúbico*, con el qual se resolvian las equaciones quadri-quadradas; pero Leibnitz escribió espontáneamente á Oldemburgo, que esta invencion no era de Cartesio, ni de Vieta, sino del siglo antecedente, esto es, de Ferrari, y que este antes que ningun otro enseñó á los algebristas á reducir á equacion cúbica la quadri-quadrada (*b*). El grande mérito de Ferrari fué encontrar un método para resolver las equaciones del quarto grado; ni Ferro, ni Fiore, ni Tartaglia, ni Cárda-

(*a*) *Art. magn.* cap. VI. (*b*) *Op.* t. III, *Ep. ad Oldemb.* p. 41, *Ep. ad Wall.* p. 126.

dano, ni ningun otro matemático anterior habian podido llegar jamas á aquellas equaciones, ni los matemáticos posteriores han sabido pasar mas adelante, y encontrar equaciones para los otros grados. Tanto mérito de Ferrari no ha bastado para obtenerle de Wallis, y de Gua un mas elevado y honroso puesto en sus breves historias del álgebra, como correspondia á

Bombelli. sus descubrimientos. Suerte mas dichosa le ha cabido á Bombelli, cuyo nombre, como el de Cárdano, se ha hecho célebre con los propios méritos, y con los de otros. Aunque las fórmulas de las equaciones del quarto grado hayan sido realmente hallazgo de Ferrari, son sin embargo mas conocidas baxo el nombre de Bombelli (*a*), que las expuso con mas claridad, y les dió mayor extension. El mejor que ningun otro desenvolvió y explicó toda la doctrina algebráica; y sus libros de álgebra pueden ser tenidos como el mas completo y perfecto curso de aquella ciencia, que se publicó en todo aquel siglo. El tuvo ade-

(*a*) V. Euler. *Elem. d' Alg.* & al.

ademas, como Cárdano, el mérito de la invencion. Leibnitz dice, que Bombelli enseñó antes que ningun otro á extraer las raices racionales por los binomios de Cárdano en apariencia imaginarios (*a*). El fué en efecto harto mas cauto que Cárdano en el exâmen del caso irreducible, y no solo se atrevió á asegurar que la raiz irracional, aunque oculta baxo una forma imaginaria, es siempre posible, sino que demostró de algun modo la posibilidad, y pasó tambien á hacer sus esfuerzos para encontrarla, y lo consiguió en ciertos casos, aunque no pudo dar una regla bastante general. Gua (*b*) da á Bombelli la gloria de haber sido el primero que ha hablado del cálculo de los radicales, de haber hecho entrar en los cálculos las raices imposibles, y de haber enseñado una regla para la resolucion de las equaciones del quarto grado, en las quales ha desvanecido el segundo término, que dice será siempre mirada como uno de los principales descubrimientos que se han hecho en las matemáticas, y nos presenta la obra de

(*a*) Ubi supra. (*b*) Ubi supra.

de Bombelli como una obra muy importante para los progresos de esta ciencia. Así que el álgebra debe mucho á Bombelli, y su nombre ocupará siempre honroso lugar en la historia de las matemáticas. Hasta ahora el álgebra puede ser mirada como una ciencia italiana, aunque conocida y cultivada por las otras naciones. Leonardo de Pisa y Lucas del Borgo, los primeros escritores conocidos de esta ciencia, fueron italianos, como lo fueron tambien Ferro, Fiore, Tartaglia, Cárdano, Ferrari, Bombelli y todos los principales propagadores y promovedores del álgebra. El nombre mismo italiano, que se daba entonces á esta, puede servir de clara prueba de su naturaleza. Si damos á los árabes la gloria de padres del álgebra porque ella tiene el nombre arábigo, el oirla llamar con nombre italiano debe dar algun particular derecho á la Italia para ser considerada como maestra y señora suya. El álgebra, aunque llamada tambien *arte mayor*, y *arte magna*, era universalmente intitulada *Ciencia de la cosa*; y no solo los italianos le daban este nombre, sino que el aleman Rudolphs, y su docto edi-

editor Stifels dieron el título *Die coss* á una obra acerca del álgebra, y *cosici* se llamaban tambien en latin los números, y *cosicæ* las raices hasta en el siglo pasado. Pero sinembargo todas las naciones tuvieron hácia la mitad del siglo XVI sus escritores de álgebra. Ademas de los alemanes que acabamos de nombrar, Rudolphs y Stifels, habia franceses algebristas bastante célebres, Peletier y Buteon, y aun de este quieren algunos tomar el origen de señalar los números con las letras en las operaciones algebráicas; estaba en España el célebre Nuñez, mas conocido con el nombre de Nonio, de quien fueron abrazados y seguidos algunos métodos, que aun en el siglo pasado se ven referidos por Bachet de Meciriac (*a*), por Dechales (*b*), y por otros escritores; en Holanda Stevin, conocido y estimado aun posteriormente; y en toda la Europa habia varios estudiosos y cultivadores de aquella ciencia. Otros algebristas del siglo XVI.

Pero todos, tanto italianos como de otras Vieta.

(*a*) In *Diophant.* &c. lib. I, quest. XXXIII.
(*b*) *Alg.* lib. III.

otras naciones, todos deben ceder el puesto al francés Vieta, desde el qual empieza una nueva época para el álgebra, y puede decirse que para todas las matemáticas. Hasta entonces el álgebra, habiendo estado en manos, aunque de hombres ingeniosos, y doctos aritméticos, pero no bastante finos y delicados geómetras, no habia adquirido un grado de dignidad, que la hiciese ocupar un lugar respetable en la literatura. Vieta la elevó á este honor; en sus manos se formó aquel útil y glorioso instrumento, que ahora lo es de los mas dificiles y arduos descubrimientos, y produxo de este modo una memorable revolucion en las matemáticas, y en casi todas las ciencias naturales. Vieta puede ser tenido como padre de los mas profundos analistas de este siglo; y él en efecto abrió, ó á lo menos señaló todos los caminos que despues corrieron Arriot, Cartesio, Ougtred y los mas famosos autores de los progresos algebráicos. Mérito suyo fué una mas fácil y mas cómoda preparacion de las equaciones, que despues ha sido abrazada por los analistas modernos, imaginando él gran parte de las

las transformaciones que se hacen en las equaciones, y de los usos diversos que se pueden sacar de ellas: mérito suyo un método que él llama *Sincrisis*, para conocer, con el cotejo de dos equaciones diferentes solamente por los signos, la relacion que hay entre cada uno de los coeficientes, que son comunes entre sí, y las raices de una y de otra: mérito suyo la formacion de las equaciones compuestas por sus raices simples, quando son todas positivas; la resolucion numérica de las equaciones á imitacion de las extracciones de las raices numéricas; la construccion ingeniosa de las equaciones del tercer grado por medio de dos medias proporcionales; la descomposicion de las equaciones del quarto grado por las del tercero, y algunos otros hallazgos fueron méritos suyos en la analisis. Pero tal vez no menos que por todas estas ventajas se hizo Vieta acreedor al reconocimiento del álgebra y de la geometría, por el feliz descubrimiento de señalar con las letras del alfabeto las cantidades conocidas y las desconocidas. Este método, ademas de evitar el embarazo de la confusion de los números,

Descubrimientos diversos sobre los signos algebráicos.

ros, tiene la ventaja de ser mas general, dando resoluciones comunes á todos los casos, quando con el otro no se daban mas que para los casos particulares. Qualquiera que tenga práctica de tales cálculos facilmente comprehenderá la dificultad y los embarazos, en que deberian poner los números, y la intension de mente que exîgirian en las dilatadas operaciones; quando ahora multiplicando, ó substrayendo una letra, añadiendo otra, ó usando casi materialmente algunos caractéres del alfabeto se resuelven con la mayor facilidad los cálculos mas intrincados. ¿Como podrian tener lugar en los números tantos utilísimos métodos inventados por los algebristas posteriores, para executar todos los cálculos en las teorías geométricas? Este método de las letras fué aun reducido á mayor simplicidad por Arriot, el qual usó de los caractéres minusculos, mas fáciles, y mas expedítos que los mayusculos, los colocó de modo que señalasen los productos de las cantidades multiplicadas, escribiendo una inmediatamente despues de otra las letras que expresan los factores, y facilitó mucho las deseadas operaciones. Aun hi-

hizo mas en esta parte Cartesio: inventó el señalar las letras que expresan las potestades con el número correspondiente á las veces, que segun el método de Arriot deberian repetirse tales letras, ó, como se dice ahora, con el exponente; y á él debemos tambien la expresion tan necesaria de los polinomos sobreponiendolos en una línea superior, ó, como otros han usado despues, encerrandolos dentro de un parentesis. Tambien otros despues de Arriot y de Cartesio han pensado en la colocacion de las letras, y en la mejora de los signos algebráicos, y han sido tan varios los modos de usar las letras y los signos, que seria una no inutil curiosidad el formar una paleografía del álgebra, y una historia de su estenografía, la qual contribuiria no poco á facilitar la inteligencia de los primeros escritos sobre aquella ciencia, y de los principales maestros de la analisis moderna. Pequeños descubrimientos parecerán estos á quien no tiene práctica de las operaciones algebráicas; pero quien conoce la prontitud, facilidad y seguridad que ellos producen en la aspereza y confusion de los cálcu-

 los,

los, quien sabe la extension de las ideas, la vastedad de las miras, y la profundidad de los conocimientos, que cada uno de ellos requiere para ser establecidos sin peligro de error, y usados con seguridad y utilidad, nunca podrá alabar bastantemente el ingenio del que los ha sabido inventar, ni profesar el debido reconocimiento á los esfuerzos de imaginacion que le han costado. Pero volviendo á los progresos que hizo el álgebra, es cierto que los útiles inventos, y las gloriosas fatigas de Vieta excitaron los estudios de algunos grandes matemáticos á cultivarla con mucho ardor. Mas aunque muchos se adquirieron crédito con sus especulaciones, y acarrearon tambien algun adelantamiento á su ciencia, solo Arriot llegó á emular la gloria de su maestro Vieta. Los franceses y los ingleses no estan conformes en el aprecio del mérito algebráico de Arriot. El único paso, dice Gua (a), que propiamente parece haber dado Arriot en la analisis, es el haber empleado las raices ne-

Arriot.

(a) *Acad. des Sc.* an. 1741. *Recherches*, &c.

negativas en las equaciones del tercero y del quarto grado, y aun en esto lo acusa de algun error; y Montucla (a), no duda afirmar, que Arriot no tuvo mas que una idea algo clara é individual de dichas raices, y que dice poco mas que Cárdano, quien ya las habia conocido; pero Wallis (b) cuenta este como uno de los gloriosos inventos algebráicos, que debemos á Arriot. A él se debe tambien el método que muchas veces es cómodo y útil en las equaciones, de poner al mismo lado todos los términos, é igualarlos á cero, esto es, de hacer pasar al primer miembro todos los términos que estaban en el segundo, trasponiendo en ellos los signos positivos en negativos, y poner en el otro lado solo $=0$: lo que en algunos casos hace las equaciones mucho mas claras, mas fáciles, y mas expedítas. Pero el descubrimiento de Arriot, mas apreciable y mas importante para el álgebra, ha sido el observar que todas las equaciones de órdenes superio-

(a) *Hist.* par. IV, l. XI. (b) *Tract. hist. de Algeb.*

riores son producidas de simples equaciones, de donde se derivan para el adelantamiento de la analisis muchas y utilísimas verdades, que nosotros no podemos explicar aquí. Estos y otros no pocos méritos de Arriot hacen su nombre inmortal en los fastos de la ciencia algebráica, y le ponen al lado de Vieta, y de los mas ilus-

Otros algebristas.

tres analistas. Vivian tambien en aquellos tiempos Ougtred, Girard, Anderson y algunos otros, que con sus luces, y con sus especulaciones ilustraban y acrecentaban los conocimientos algebráicos. Entonces obtuvo tambien el álgebra de Diofante mayor esplendor, y mas noble extension.

Ilustradores del álgebra de Diofante.

Ya en el siglo XIV habia comentado el griego Planudes algunos libros del griego algebrista, que poco ó nada sirvieron para ilustrar su doctrina. En el XVI Xilandro, mas inteligente en la lengua griega que en las matemáticas, traduxo en latin, y comentó como supo los libros que habian quedado de Diofante. Mas célebre en aquel arte Van-Ceulen se adquirió crédito por la particular maestría en la analisis del griego maestro. Stevin hizo una especie de comentarios á las qües-

qüestiones de Diofante; unió con freqüencia estas á las suyas propias el arriba nombrado Bombelli; el mismo Vieta adoptó muchas veces los métodos del griego algebrista, y trató á su modo muchos problemas, y algunos otros honraron en aquel tiempo el nombre de Diofante. Pero en el siglo pasado se ve su álgebra elevada al mayor esplendor. Nueva traducion mas fiel, clara y exâcta, nuevos comentos mas doctos y profundos en penetrar el sentido del autor, y mas propios y correspondientes para aclararlo, hizo Bachet de Meciriac á los libros de Diofante; y no contento con esto acarreó tambien nuevas luces, ulteriores adelantamientos, y mayor extension y engrandecimiento á su doctrina. El fué el primero, dice la Grange (a), que encontró un método general para resolver en números enteros todas las equaciones del primer grado de dos ó mas incognitas; y despues nadie ha dado otro mas directo, mas general, y mas ingenioso que el de Bachet. Mas que todos adelantó la analisis de Diofante el con-

Bachet de Meciriac.

Fermat.

(a) *Ac. de Berl.* tom XXVI.

consumado geómetra Fermat. Nuevos caminos, y nuevas razones abrió él á su ciencia; dió nuevos métodos para la resolucion de las equaciones indeterminadas, superiores á quantos habian ideado los precedentes analistas, de mayor exâctitud, mayor extension y generalidad; resolvió problemas á los quales no habian podido llegar ni Bachet, ni Vieta, ni otro algebrista alguno; propuso muchos teoremas nuevos, sublimes, y fecundos de desconocidas é importantes verdades. Las academias de Petersburgo y de Berlin están llenas de memorias de Eulero, de la Grange, de Beguelin y de otros doctos académicos, para demostrar algunas proposiciones de Fermat, para seguir algunas ideas suyas, y para explicar y proponer á los ojos de los matemáticos las riquezas analíticas, que él nos ha dexado sin ostentacion, y esparcidas acá y acullá con descuido: aquellos célebres analistas han creido emplear utilmente sus fatigas ilustrando con dilatados escritos los pensamientos de Fermat propuestos en pocas líneas. Billy ha recogido de varias cartas que le escribió aquel gran-

grande hombre sus nuevos descubrimientos sobre la doctrina analítica (*a*); y tiene mucha razon para decir que Diofante es un pigmeo comparado con este gigante; que Vieta no llegó á tocar la cima de esta ciencia, donde tan tranquilamente reposaba Fermat, y que Bachet por mas que fuese en esta parte perspicaz y agudo, parecia tardo y confuso cotejado con este lince. Ademas de Bachet y Fermat estaba Frenicle, que apasionado en extremo, como hemos dicho antes, á todo lo que mira á qüestiones numéricas, contribuyó mucho á aumentar las luces de la doctrina de Diofante, é inventó nuevos métodos: estaba Pell, algebrista inglés, alabado en esta parte por Leibnitz (*b*): estaba el poco ha citado Billy, que en su *Diofante redivivo*, y en otras obras suyas trató qüestiones mucho mas arduas que las de Diofante, é ilustró su doctrina: estaba Ozanam, que tenia preparada una nueva edicion, y nueva ilustracion del griego algebrista, trataba acá y acullá

Frenicle.

 mu-

(*a*) *Doctr. analyt. Inv. novum*, &c. Edit. Tolos. *Oper. Diophanti* 1670. (*b*) *Comm. epist.* p. 65.

muchas qüestiones no tocadas por Diofante, ni por Bachet, y le añadia un libro lleno de qüestiones *paralipomenas*, como escribe con muchos elogios de esta obra Leibnitz (*a*); y estaban otros, que cultivaban la analisis de Diofante. De este modo se veian generalmente florecer en el siglo pasado todos los ramos del álgebra; y todas las partes de aquella ciencia, que podia decirse nacida pocos años antes, eran ennoblecidas y aumentadas con las fatigas de ilustres ingenios.

Pero por grandes y agudos algebristas que fuesen Arriot, Ougtred, Bachet, Fermat y otros coetáneos suyos, es preciso que todos cedan la gloria al inventor Cartesio. Este genio creador no se contentaba con trabajar en los inventos de otros, queria siempre crear por sí: y si alguna vez no podia levantar sólidas fábricas, se divertia con hacer castillos en el ayre, los quales sin embargo servian para albergar muchas útiles verdades, y para destruir y derribar muchos errores entonces dominantes. Casi no hay ciencia

Cartesio.

(*a*) *Oper.* t. II. ep. II. ad Oldem. p. 29 & 30.

cia alguna que no deba á Cartesio algun grado de perfeccion; pero el álgebra á la geometría fueron los campos donde cogió los mas sazonados frutos, y donde se adquirió la mas sólida gloria. Ademas de la expresion de los polinomos, y los signos de las potestades, ó de los exponentes, como hemos dicho arriba, debemos á él los primeros elementares del cálculo de las potestades, que es tan útil, y aun necesario para las operaciones analíticas. Si los anteriores algebristas, singularmente Arriot y Girard, habian conocido las raices negativas, Cartesio fué el primero que hizo de ellas el verdadero uso, y nos dió una justa idea de la naturaleza, y de las ventajas de tales raices. El ademas enseñó á conocer solo por la vista de los signos quantas sean las raices positivas, y quantas las negativas en qualquier equacion que no tenga imaginarias; descubrimiento que su ilustrador Gua, que tanto ha trabajado sobre las raices de las equaciones, prueba á la larga deberse enteramente á Cartesio (*a*), y no á este y á Arriot,

(*a*) *Ac. des Sc.* an. 1741. *Demonstration de la regle de Descartes*, &c.

riot, como pretendia Wallis, y como creian Wolfio y Saunderson. El ha sido tambien el primero que haya dado los medios para encontrar los límites de las raices de las equaciones, que no pueden resolverse exâctamente. El nombre solo de *analisis cartesiana* dado al método de las indeterminadas para las equaciones del quarto grado, usado aun al presente, puede servir de claro testimonio del mérito de Cartesio en esta parte, y de las ventajas que de aquel método suyo resultan á las matemáticas; pero el nombre de *álgebra cartesiana*, aplicado generalmente á la analisis de las quantidades finitas, nos manifiesta aun con mas gloria suya, quanta preeminencia y superioridad, y quanto dominio, por decirlo así, tuviese sobre toda el álgebra conocida antes de la invencion del cálculo infinitesimal. En efecto ¿que sublime y atrevido vuelo no le hizo él tomar manejandola á su modo? ¿Que revoluciones no produxo en todas las matemáticas aplicando el álgebra á la geometría? En los anteriores algebristas se habia visto ya alguna ligera aplicacion de una á otra de estas ciencias. La obra antes citada de

Aplicacion del álgebra á la geometría.

de Thabit ben Corrah, de problemas algebráicos dignos de comprobarse con demostraciones geométricas, y los exemplos de líneas ó figuras geométricas, que Leonardo de Pisa usa en su capítulo del álgebra, y otros aun mas decisivos de Regiomontano, de Tartaglia, y de otros analistas del siglo XVI, me parecen una prueba bastante clara de quan antigua sea alguna union de aquellas dos ciencias. Pero estos no hacian dicha aplicacion, sino señalando á las líneas dadas valores numéricos, y encontrando la buscada del mismo modo. Vieta habiendo introducido el uso de las letras para representar las cantidades conocidas, y las desconocidas, pudo tambien hacer una mejor aplicacion del álgebra á la geometría, y formar con ella alguna geométrica construccion. Pero todos estos no eran mas que pequeños ensayos de imperfecta aplicacion del álgebra á los problemas ordinarios, los quales aun sin tales cálculos se hubieran resuelto con la misma facilidad. Cartesio reduxo á arte esta aplicacion, formó el método, dió las reglas, y explicó el artificio: de la pequeña expresion de líneas rectas la elevó á las di-

dificiles teorías de la geometría de las curvas, é hizo una sublime y utilísima ciencia de la que no era mas que una reducida, poco usada, y casi inutil práctica. La geometría y el álgebra han recibido mutuamente de esta union notables adelantamientos; el álgebra se ha ennoblecido pasando de las expresiones numéricas á las demostraciones geométricas, la geometría ha adquirido mayor facilidad y señorío, pudiendo manifestar las propiedades de las curvas sin el embarazo de líneas paralelas, y formar con vna expresion algebráica un quadro mas suelto y mas enérgico, que presenta muchos auxîlios para sacar por las mas fáciles propiedades las mas dificiles é intrincadas. Los muchos y grandes adelantamientos del álgebra y de la geometría, que debemos á Cartesio por esta aplicacion, han hecho mudar de aspecto á aquellas ciencias, y dan al autor el honor de glorioso conquistador del reyno de las matemáticas. La geometría de Cartesio ha tenido la suerte de las obras originales, de encontrar hombres grandes que la ilustrasen, y que auxîliados de sus luces produxesen ellos

ellos mismos descubrimientos originales. Tal fué Beaune, quien ademas de las doctas y claras anotaciones á la obra de Cartesio, se adquirió distinguido crédito en el álgebra por su teoría de los límites de las equaciones, esto es, la determinacion de los dos números, entre los quales se encuentran la mas grande y la mas chica de las raices buscadas, con que se reducen con freqüencia á un pequeño número los divisores que se han de probar, y se minora mucho el trabajo de buscarlos; método que despues fué abrazado y aumentado por Newton (*a*): tal fué Hudde, que se distinguió por la reduccion de las equaciones, y por el método de los máxîmos, y de los mínimos (*b*): tal Schooten, docto comentador, y diligente explicador de la obra de Cartesio con sus propias ilustraciones y con las de otros, y autor de un tratado lleno de nuevas ideas del modo

(*a*) *Florimondi de Beaune Tract. posth. alter. de nat. & const. alter de limit. æquationum.*

(*b*) *Joan. Huddenii* epist. I. *De reduct. æqu.*, ep. II, *De maj. & min.*

do de formar las demostraciones geométricas con el cálculo algebráico (*a*): tal Sluse, inventor de un método de formar qualquier equacion sólida de infinitas maneras diversas, no solo por medio del círculo y de la parábola, como hacia Cartesio, sino de qualquier otra seccion cónica (*b*): tal Craig, tal Witt, tal Rabuel, tal Jacobo Bernoulli, y otros muchos célebres geómetras.

Despues de los adelantamientos que Cartesio y sus sequaces acarrearon al álgebra, parecia que nada quedase que hacer á los posteriores analistas; pero eran muy grandes y sublimes los ingenios, que entonces se dedicaron á aquella ciencia, para que pudiesen quedar esteriles y ociosos sin ocasionarle ulteriores mejoras. ¿Con quantos nuevos descubrimientos no supo

Wallis. enriquecerla Wallis en su álgebra, y mucho mas en su fecundísima *aritmética de los infinitos*? Brounker, Barrow, Mercator, y algunos otros en el siglo pasado acrecen-

(*a*) *Tract. De concinn. Demonstr. geom. ex calc. algebr.* (*b*) *Mesolab. seu duæ med.* &c.

centaron mas y mas sus riquezas. Pero entre tanta copia de profundos analistas, no solo de Inglaterra, sino de todas las otras naciones, es preciso mirar como príncipe de todos al incomparable Newton. Newton.

¿Quan ventajosas no han sido para el álgebra sus bellas y elegantes reglas para conocer los casos en que las equaciones pueden tener divisores racionales, y qué polinomios pueden en aquellos casos ser los divisores; para determinar de un nuevo y mas justo modo los límites de las equaciones, lo que no habia hecho Beaune; para la aplicacion de las fracciones al cálculo de los exponentes; para reducir las expresiones fraccionarias ó irracionales en series infinitas; su excelente método de aproxîmacion para determinar quanto mas próxîmamente se pueda las raices de las equaciones; el famoso teorema, que se llama del binomio, y es la fórmula general de expresar dos cantidades multiplicadas en sí mismas; la aplicacion de todos estos inventos analíticos á la quadratura, y á la rectificacion de las curvas, y á los mas arduos problemas geométricos; y otros mil útiles y gloriosos hallaz-

 gos

gos suyos para adelantar todas las partes, tanto del álgebra pura, como de la mixta, expuestos en su tratado de la *analisis para equaciones infinitas*, en su *Aritmética universal*, y en otros breves, pero completos, xugosos y profundos escritos, que son el mas autorizado código de las verdades matemáticas, venerable y sacrosanto para los estudiosos de estas ciencias? Pero sin embargo tantos y tan distinguidos méritos de Newton en las doctrinas matemáticas desaparecen de algun modo á la vista de su luminoso descubrimiento del cálculo de las fluxîones, conocido comunmente con el nombre de *cálculo infinitesimal*, del qual hablarémos despues con mas extension; pero todo prueba evidentemente quan vasta y sublime fuese el alma de aquel grande hombre, superior á las mentes mas elevadas de los otros mortales. Al mismo tiempo que el algebrista inglés, ilustraba el arte analítica el aleman Leibnitz, el único ingenio que pueda entrar con él en competencia. Casi igualmente profundo que Newton, era harto mas universal y extenso en sus conocimientos. Filósofo, jurisperíto, an-

Leibnitz.

ti-

tiquario, histórico, filólogo y matemático, no dexaba parte alguna de las ciencias que no ilustrase con las meditaciones de su ingenio, y en cada una de ellas se hacia respetar singularmente como un portento de erudicion. Pero viniendo á nuestro propósito del álgebra, en esta particularmente se hizo admirar su genio creador. Dexo aparte el hallazgo de un nuevo género de equaciones, llamadas por él *exponenciales* (a); dexo el método general é infalible, que él dice haber descubierto para encontrar las raices de todas las equaciones (b); dexo su ingenioso método para el caso irreducible; dexo sus sutiles especulaciones sobre la naturaleza de los logaritmos de las cantidades negativas, combatidas por Bernoulli, pero abrazadas por Eulero; dexo otros muchos descubrimientos algebráicos propuestos freqüentemente por él á la contemplacion de los matemáticos, aunque raras veces bastante explicados é ilustrados; y paso

Z 2 so-

(a) Ep. ad Oldemb. opp. tom. III, pag. 106.
(b) *Comm. ep.* p. 60.

solo á la nobilísima invencion del cálculo infinitesimal, que lo elevó sobre los otros analistas, y lo puso á nivel con el gran Newton.

Cálculo infinitesimal. El álgebra cartesiana no miraba mas que la analisis finita de las magnitudes curvilíneas; y para penetrar mas intimamente en los arcanos de la geometría, y despues de las otras ciencias, se requeria una analisis mas sutil, que conduxese hasta los verdaderos principios de las líneas curvas, y tomase por mira sus pequeñísimos é infinitésimos elementos. Estos infinitésimos tienen entre sí relaciones, que no tienen las magnitudes finitas, de las quales ellos son elementos; y cabalmente por estas particulares relaciones conducen á descubrir magnitudes semejantes, y hacen su analisis tan útil y tan fecunda de descubrimientos geométricos. El encontrar estas infinitésimas magnitudes, el calcular sus mutuas relaciones, operar sobre ellas, y descubrir por su medio otras magnitudes finitas es el objeto de la analisis infinitesimal, que ha producido en este siglo tan notables revoluciones en las ciencias; y esta analisis es la que baxo aspectos diver-

versos fué descubierta por Newton, y por Leibnitz. Es una curiosa y extraña combinacion, que no solo á un mismo tiempo viniesen al mundo dos ingenios tan profundos y maravillosos como Newton y Leibnitz, sino que ambos á dos en un mismo tiempo se dedicasen á un tan grande descubrimiento, y que ambos á dos por diversos caminos llegasen á encontrarlo con la misma felicidad. Como las afecciones de las curvas se conocen refiriendolas á las *variables* á ellas anexas y ordenadas, Newton y Leibnitz se ponen á exâminar las instantaneas variaciones, y los insensibles incrementos y decrementos, que en estas se producen, buscan sus relaciones, las manejan algébricamente, y forman las leyes de su cálculo. Leibnitz da á estos insensibles incrementos y decrementos el nombre de *diferencias infinitésimas*; y las considera como magnitudes infinitésimas, que pueden ser tenidas como ningunas respecto á las magnitudes finitas, y se pueden omitir en el cálculo sin peligro de error; y aun hace infinitésimos de infinitésimos de mas y mas órdenes inferiores, los quales tambien pueden omitirtirse al calcular los infinitesimos de órdenes superiores. Newton, sin introducir la idea de partes infinitas ni infinitesimas, considera las cantidades matemáticas como engendradas con el movimiento, llama *fluxîanos* las velocidades variables, con que son producidas ó descriptas aquellas cantidades, busca las relaciones de estas fluxîones, y forma mas y mas órdenes de ellas. El método de las fluxîones es el mismo que el de los infinitésimos; pero apoyado á principios exâctos, sin necesidad de la ficcion hipotética de las partes infinitésimas. Las diferencias del uno son las fluxîones del otro; las diferencias infinitésimas se señalan con la letra d, y dx es la diferencia de x; y los infinitésimos de órdenes inferiores se señalan repitiendo la letra d, y así ddx, d^3x, d^4x, &c. son infinitésimos de 2.º 3.º 4.º órden; las fluxîones se señalan con un punto, y $\dot{x}$ es la fluxîon de x, y $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, son fluxîones de 2.º 3.º 4.º órden, &c. uno desprecia en el cálculo ciertas partes de un elemento, porque las considera como infinitésimas, y las partes infinitésimas en una magnitud finita pueden despreciarse

sin peligro de error: el otro no las considera en su cálculo, porque cree que no le pertenecen; el resultado es el mismo, aunque en el uno, y en el otro provenga de razones diversas, como si un hombre, segun el exemplo de Maclaurin (*a*), que forma una cuenta, y pretende llevar la exâctitud hasta lo sumo, omite ciertos artículos como de ninguna importancia, quando el otro los dexa por no pertenecer á aquella cuenta. El cálculo infinitesimal se suele tambien llamar cálculo diferencial; pero realmente se divide en cálculo diferencial, é integral. El integral se opone al diferencial, y es una contínuacion del mismo como dice Fontenelle (*b*): el diferencial desciende del finito al infinitésimo, y el integral asciende del infinitésimo al finito, el uno, por decirlo así, descompone una magnitud, el otro la restablece. Hay tambien igualmente en el cálculo de las fluxîones el método directo, y el método inverso; aquel cor-

(*a*) *Traité des flux. Préface.* (*b*) *Hist. de l'Ac. des Sc.* an. 1700. *Sur la Quadr.* &c.

corresponde al cálculo diferencial, este al integral. Y así en todo convienen sustancialmente el cálculo leibnitziano, y el newtoniano: el método de los infinitésimos, y el de las fluxîones. Leibnitz fué el primero que participó al público su método, y dió de él una ligera noticia en las Actas de Lipsia (*a*); lo siguieron con mucho empeño los dos célebres hermanos Bernoullis, y despues toda la Europa abrazó el nombre y el método del cálculo infinitésimal ó diferencial, y solo los ingleses usaron el nombre y el método del cálculo de las fluxîones. Estos quisieron tambien conservar para su Newton toda entera la gloria del descubrimiento, sin dexarle parte alguna á Leibnitz; y primero Facio, y despues de algunos años Keil con mas dureza le acusaron de plagiario; y la real Sociedad de Londres, que de algun modo se erigió por juez de esta causa, sino se atrevió á condenarle como reo, tampoco quiso absolverle de esta acusacion. No podemos seguir la historia de esta famosa disputa, que interesaba la curio-

Disputas sobre el cálculo infinitesimal.

(*a*) 1684.

riosidad no solo de Inglaterra y de Alemania, sino de toda la culta Europa; pero puede verse referida brevemente por Fontenelle (*a*), expuesta individualmente por Jaucourt (*b*), é ilustrada con mayor profundidad de crítica y de doctrina por el juicioso y docto Montucla (*c*). Diré unicamente, que como no puede negarse que Newton encontró por sí mismo su método sin auxîlio alguno, y antes de tener noticia del de Leibnitz, tampoco puede decirse que Leibnitz haya formado el suyo con la guia de las luces de Newton; y confieso que leyendo la correspondencia epistolar de Leibnitz sobre estos puntos con Oldemburg, con Collins, con Wallis, y con el mismo Newton, se me desvanece toda sombra que pueda nacer de sospecha contra la verdad del descubrimiento de Leibnitz; y diré tambien que excepto Buffon traductor de Newton, y algun otro afecto por motivos particulares al partido inglés, todo el resto de la república ma-

(*a*) *Eloge de Leibnitz.* (*b*) *Vit. Leibnitz.*
(*c*) *Hist. des Math.* t. II, p. IV, lib. VI.

temática concede, sí, á boca llena á Newton todo el honor del descubrimiento, pero lo confiere tambien entero é intacto á Leibnitz. Otra disputa se movió tambien contra el nuevo cálculo, que solo tocaba á Leibnitz, sin herir ni en un ápice á Newton. Esta versaba sobre la introduccion de los infinitos y de los infinitésimos en la geometría, que se consideraba como un abuso intolerable, y un error perjudicial á la exâctitud y verdad geométrica. El mas fuerte y mas aguerrido adversario que encontró este cálculo, fué el célebre algebrista Rolle. Este despreciaba enteramente las quantidades infinitésimas, y rebatia su cálculo como falto de certeza rigurosa en los principios, como capaz únicamente de inducir á error en vez de conducir á la verdad, y como contrario á los conocidos y recibidos métodos de los geómetras magistrales. Pero sin embargo reflexîonando, que todas las verdades que se encuentran con la ordinaria geometría, se presentan igualmente, y aun con mucha mayor facilidad con el auxîlio del cálculo diferencial, que en todo un siglo en que los geómetras lo han usado en toda suerte

te de investigaciones, jamas se ha encontrado falto, y que antes bien apenas hay descubrimiento alguno hecho por su medio, que no haya sido confirmado por otros caminos diversos, es preciso concluir que son seguros y exâctos sus principios, y coherentes con los métodos de la mas exâcta geometría. Otra acusacion hacia al nuevo cálculo Niewentit, impugnador harto menos fuerte que Rolle. Admitia él de mala gana, pero sin embargo soportaba, las quantidades infinitésimas; mas no podia sufrir que admitidas tales quantidades se quisiesen admitir otras menores y menores, y se formasen mas y mas órdenes de infinitésimos, no pudiendo haber nada mas pequeño que lo que es infinitamente pequeño. Pero si se admiten los infinitésimos de primer órden, es preciso por conseqüencia necesaria admitir todos los otros; y si en un círculo se toma un arco infinitésimo del primer órden, lo serán igualmente la cuerda y el seno recto, pero el seno verso correspondiente será infinitésimo del segundo, y así de todos los otros. No merecian mucha atencion las objeciones de Niewentit; pero sin em-

bargo tuvieron respuesta del mismo Leibnitz, y Bernoulli y Erman lo aterraron enteramente. Mayor estrépito causaron las oposiciones de Rolle; pero fueron tambien victoriosamente rebatidas por Varignon, y por Saurin. En la Academia de las ciencias de Paris empezaron con este siglo las vivas y ardientes disputas del cálculo diferencial, y el descubrimiento de Leibnitz ocupaba las meditaciones y los juicios de los dos cuerpos literarios mas respetables que habia sobre la tierra, la Academia de las ciencias de Paris, y la real Sociedad de Londres. Esta admitia la verdad del cálculo, pero disputaba á Leibnitz la gloria del descubrimiento: aquella omitia las disputas de precedencia, y exâminaba solo la verdad. Quedó finalmente triunfante el cálculo infinitesimal, y el mismo secretario de la Academia, el elegante é ingenioso Fontenelle, esparciendo las flores de su brillante estilo sobre la aridez de estas materias, contribuyó no poco á establecerlo, y hacerlo universal (a). Pero sin embargo muchos doc-
tos

(a) *El. de la Geom. de l' Infin.*

tos geómetras posteriores, que no contentos con seguir la parte técnica de este cálculo, han querido entrar á exâminar la metafísica, han admitido, sí, los nombres de infinitos, y de infinitésimos, pero no han admitido la realidad, ni reconocido por verdaderos los infinitos geométricos diversos de los metafísicos; y Maclaurin se pone tambien á responder á las especiosas razones de Fontenelle, y rebate severamente toda la idea de los infinitos, y de sus infinitas especies (a). El método de las fluxîones de Newton, aunque no presentase el flanco de los infinitos é infinitésimos, estuvo sin embargo sujeto á fuertes impugnaciones. El estilo conciso con que lo expuso Newton dexó lugar á falsas interpretaciones, y dió algun no infundado título para poderlo atacar; y el método de las fluxîones fué acusado como lleno de misterios, y como fundado sobre falsos raciocinios. Robin, Colson y algunos otros tomaron luego la defensa del método newtoniano; pero mas que todos Maclaurin explicó con tanta extension y eviden-
cia

(a) *Traitè des Flux. Introd.*

cia todos los elementos, y los apoyó sobre principios tan sólidos é incontrastables, que concluyó ser aquel método tan exâcto y ajustado como pueda serlo el mas severo de los antiguos geómetras (*a*). Causin sin embargo encuentra aun motivo para reir en aquellos principios del cálculo, tanto de Newton, como de Maclaurin, porque introducen el movimiento en el álgebra, y en la geometría, y así añaden una idea enteramente extraña para ellos, y que no tiene la sencillez que estas ciencias exîgen (*b*). Nosotros dexamos para los matemáticos la decision sobre la fuerza de esta objecion, que fué de algun modo prevista por el mismo Maclaurin (*c*). D' Alembert, para evitar los escrupulos que pueden ocurrir á los mas severos geómetras sobre el cálculo infinitesimal, procura explicar claramente su metafísica, y aunque sigue usando por brevedad las palabras de infinitos, y de infinitésimos, prueba sin embargo que el nue-

(*a*) *Traitè des Flux.* (*b*) *Leçons de Calcul*, &c. *Disc. prèl.* (*c*) Ibi. t. I, *Elem. de la Méth.* &c.

nuevo cálculo no tiene necesidad de tales quantidades, y que solo consiste „ en de„ terminar algebráicamente el límite de „ una relacion „ de la qual se tiene ya la „ expresion en líneas, y en igualar estos „ dos límites, lo que hacen encontrar una „ de las líneas que se buscan (*a*)." Esta metafísica de d' Alembert ha sido posteriormente explicada con mas extension y claridad por Cousin (*b*), que la reduce al método de los límites de los antiguos, y se vale de sus principios para la mayor ilustracion de todo el cálculo infinitesimal. Pero sea lo que se fuese de lo justo de las nociones, y de lo exâcto de los principios metafísicos del cálculo newtoniano, y del leibnitziano, podemos decir con verdad que este ha sido mas útil y ventajoso para los progresos de la geometría. El cálculo de las fluxîones fué harto mas fecundo en las manos de Newton, que el diferencial en las de Leibnitz; pero aquel quedó casi sepultado en Inglaterra, mientras este se esparció gloriosamente por to-

(*a*) *Encycl.* V. *Calcul differentiel.*
(*b*) *Disc. prel.* & ch. II.

toda la Europa. Apenas Leibnitz propuso en las Actas de Lipsia, como hemos dicho arriba, su nuevo método, quando los dos doctísimos hermanos Bernoullis hicieron freqüente y oportuno uso en la resolucion de muy arduos, y hasta entonces irresolubles problemas: Jacobo dió de él dos ensayos en las Actas de Lipsia (*a*), y lo ilustró en varios escritos; y Juan hizo aun mas, porque lo enriqueció con un nuevo ramo inventando su cálculo *exponencial*, que despues ha sido tan fecundo en la geometría (*b*), y escribió lecciones del cálculo diferencial é interal, que son las primeras lecciones donde lo han aprendido Varignon su acerrimo sostenedor y promovedor, l' Hopital primer maestro y revelador de sus arcanos, y casi todos los mas célebres calculadores de Europa. La analisis de los infinitésimos de l' Hopital corrió el velo á los misterios del cálculo leibnitziano, y puso en manos de todos aquel escondido tesoro; y despues Eulero, los Riccatis, d' Alembert,

(*a*) 1691. Jan. p. 13. & Jun. p. 282.

(*b*) *Act. Lips.* 1697.

bert, la Grange, y los mas ilustres y sublimes analistas de toda la Europa han enriquecido mas y mas el método leibnitziano con la invencion de nuevos ramos de cálculo, y con muchos preciosos descubrimientos, y útiles adelantamientos. Pero sin embargo en nuestros dias han salido de nuevo algunos algebristas contra las ideas tan ventiladas de los infinitésimos, y procuran introducir el cálculo de las fluxîones. Y hasta un Bernoulli, de la familia misma de aquellos Bernoullis, que tuvieron tanta parte en la subsistencia del cálculo infinitesimal como el mismo inventor Leibnitz, se declara abiertamente por el cálculo newtoniano, que dice ser en concepto de todos los geómetras mas filosófico, y mas exâcto que el leibnitziano (*a*); y posteriormente Caluso con mayor fuerza de ingenio, y copia de erudicion combate extensamente el cálculo de los infinitésimos de Leibnitz, impugna el método de los límites de d' Alem-

(*a*) *Mém. de l' Academ. des Scien. de Turin an.* 1764. 1765.

Alembert, y hace reynar solo el de las fluxîones de Newton; y no se contenta con probarlo mas justo y filosófico, sino que procura hacerlo mas facil y breve, reduce al mismo todos los nuevos descubrimientos, y todos los adelantamientos hechos con el infinitesimal, y solicita con el mas ingenioso empeño atraer al cálculo newtoniano todo el obsequio de los analistas, que ahora está dedicado al leibnitziano (*a*). Nosotros dexamos para los matemáticos la decision de las ventajas de semejantes variaciones, y deseamos que baxo qualquier nombre, y baxo qualquier aspecto teórico que quiera mirarse, adquiera la práctica del nuevo cálculo mayores adelantamientos, con que poder penetrar mas y mas los ocultos misterios de la geometría, y de las otras ciencias.

Series infinitas.

El nuevo cálculo, tanto en las manos de Leibnitz como en las de Newton, tenia continua necesidad de las series infinitas, á quienes puede decirse que debia su origen; y por esto se elevó entonces á mayor esplendor la teoría de tales series. No

(*a*) Ibi. an. 1786, 1787.

quisiera parecer extraño amante de paradoxas refiriendo el principio de esta al libro de las *Series geométricas* de Gregorio de san Vicente; pero quien exâmine con cuidado las bellísimas invenciones, y los útiles métodos que sobre este punto se encuentran en aquel libro, no tendrá dificultad en atribuirle los fundamentos de esta, por decirlo así, nueva ciencia, sobre la qual el estudio de los algebristas se ha dirigido á reducirla á la facilidad, brevedad, y generalidad de los signos aritméticos, y de las operaciones algebriácas. De esto se deben los primeros honores á Wallis, quien ademas de las luces que acarreó á esta naciente teoría con sus propios descubrimientos, la auxîlió tambien estimulando á Brounker para encontrar la famosa serie, que tiene forma de una fraccion, cuyo denominador es un entero mas una fraccion, é igualmente el denominador de esta, y así hasta el infinito, que ha sido mas conocida y celebrada baxo el título de *fraccion continua*. Mercator dió en su *Logaritmotecnia* mayor extension á la doctrina de las series; y abrió de algun modo el camino á Leibnitz para el cálculo in-

infinitesimal. Gregori hizo tambien nuevos progresos en esta teoría. Pero á Leibnitz, á los Bernoullis, á Taylor, á Cotes, é incomparablemente mas que todos al sublime ingenio de Newton debe la doctrina de las series el verse elevada á formar un ramo respetable de la ciencia analítica. Stirling, Moivre, Eulero, Riccati, y tambien los actuales la Grange, la Place, Fontana, Lorgna, y casi todos los mayores ingenios amantes de las especulaciones analíticas, despues de la invencion del nuevo cálculo hasta estos dias, se han aplicado particularmente á enriquecer con nuevas luces la doctrina de las series, y forman sus delicias buscando siempre mayores aumentos á una teoría que justamente puede mirarse como el único instrumento para algunas mas finas y sutiles operaciones, y como el último refugio de las matemáticas sublimes (a). De este modo

(a) Veanse, ademas de las obras de los antiguos citados, las *Memorias* de las Academias de Paris, de Petersburgo, de Berlin, de Turin, y de la Sociedad Italiana.

do con la introduccion del nuevo cálculo se ha formado un cuerpo de doctrina algebráica sobre las series infinitas, que no solo ha sido útil al mismo cálculo, sino que tambien ha servido para otras muchas especulaciones científicas. Con la doctrina de las series, y con la mayor perfeccion de toda el álgebra adquirió tambien mayor vigor el cálculo de la probabilidad, y formó un ramo de la ciencia analítica. Despues de los primeros ensayos antes insinuados de Pascal, de Huingenes, de Leibnitz y de Petty, se dedicó Montmort á manejar íntimamente este cálculo, y tratar á fondo la analisis de los juegos (a), y presentando en vez de espirales, de cicloides, de logarítmicas, y de otras curvas la banca, la baceta, el tresillo, el trictac, descubrió, como dice Fontenelle (b), un nuevo mundo á los geómetras. Al instante lo acogieron estos con increible ardor; y despues de los Bernoullis, que desde luego se dedicaron á ilustrar este, como todos los otros ramos del álgebra, y despues

Cálculo de la probabilidad.

(a) *Essai d' anal. sur les jeux de hasard.*
(b) *Eloge de Mr. Montmort.*

pues de Moivre, que no tardó un punto en dar una obra original y clásica sobre la *doctrina de los juegos de suerte*, y que en concepto de la Place (*a*) y de Fontana (*b*), jueces los mas competentes en esta materia, aun despues de tantos ilustres escritores sobre la misma, merece sobre todos los otros la preferencia, vemos á Simpson, Deparcieux, Eulero, d' Alembert, la Grange, la Place, Condorcet, Fontana, Lorgna, y á casi todos los mas célebres algebristas emplear sus estudios y sus meditaciones para encontrar nuevos métodos, imaginar nuevas fórmulas, inventar nuevos usos, y hacer mas seguras, y exâctas las operaciones del nuevo arte, y trabajar con empeño para sujetar á sus cálculos la fortuna y el azar, como someten á los mismos la inconstante Luna, y los otros seres de la naturaleza: y el cálculo de la probabilidad se ha hecho uno de los objetos que al presente llaman mas la atencion de los pro-

(*a*) *Meth.* &c. *presentè à l' Acad. des Scien.* tom. VI. (*b*) *Diss. sopra il com. dell' er. prob. nelle Sper. ed Osserv. Pref. alla trad. del Moivre.*

profundos algebristas. El cálculo diferencial, la doctrina de las series, el cálculo de la probabilidad, Newton, Leibnitz, los Bernoullis, l' Hopital, y los otros hombres grandes sus coetános, acarrearon al álgebra tal perfeccion, y la enriquecieron con tantas mejoras, que puede decirse haberse formado una nueva ciencia á fines del siglo pasado, y principios de este.

Nuevos progresos del álgebra en Inglaterra.

Nuevo ardor, nuevo empeño se excitó entonces en toda la Europa para la mejor cultura, y para el mayor adelantamiento de la doctrina algebráica. Allejo, Taylor, Cotes, Sterling, Campbell, Maclaurin, y otros muchos ingleses miraban con particular afecto una ciencia, que tanto honor habia acarreado á Newton, y á la Inglaterra, y no quedaban satisfechos si con sus especulaciones no llegaban á enriquecerla con nuevos descubrimientos. Llenas están las *Transacciones filosóficas* de la Real Sociedad de Londres de nuevas y útiles ilustraciones de la ciencia algebráica, y las obras del célebre ciego Saunderson, las del profundo analisista Simpson, y otras de varios otros, leidas y estudiadas en toda la Europa, son un anténténtico testimonio del ardor de aquella docta nacion en promover tales estudios. Nuevas luces adquirian tambien estos en Francia: Varignon vigorosamente sostuvo, y amplió doctamente el contrastado cálculo diferencial, y aplicó con provecho sus ingeniosas meditaciones á varias partes del álgebra. Rolle, aunque contrario implacable del nuevo cálculo, se hizo sin embargo, con su método *de las cascadas*, y con otros inventos, muy benemérito del álgebra, á quien tuvo el valor de sacrificar su voluntad, sus pensamientos, y toda su persona. Lagny, Prestet y Reyneau, sin haberse distinguido con grandes descubrimientos, hicieron importantes servicios á la ciencia analítica; y Gua mostrando los *usos de la análisis de Cartesio*, demostrando la regla cartesiana para conocer el número de las raíces positivas y negativas (*a*), buscando con nuevo método el número de las raíces reales y de las imaginarias (*b*), y con otras analíticas especulaciones, no solo dió honor á Cartesio, sino que sirvió de mu-

En Francia.

(*a*) Acad. des Sc. an. 1741. (*b*) Ibi.

mucho auxîlio á toda el arte algebráica. No deseó menos la Alemania contribuir al acrecentamiento de este arte, que por los muchos y útiles descubrimientos que habian hecho en él Leibnitz, y los Bernoullis podia con algun derecho mirar como suyo. En efecto Goldbach, Mayer, Erman, Cramer, Wolfio, y algunos otros hicieron honrosa corte á este arte, y le ofrecieron preciosos dones. Los italianos, dueños en otro tiempo, y maestros, y en gran parte creadores del álgebra, manifestaban haberla casi olvidado, y dedicados á otros estudios parecia que hubiesen dexado en poder de otras naciones aquel que en otro tiempo podia llamarse todo suyo. Pero á la fama del nuevo cálculo, y de los portentosos vuelos, á que por su medio se elevaba la geometría, se excitaron vivamente, volvieron á emprender el estudio algebráico, y bien pronto le hicieron conocer su benéfica mano. Jacobo Riccati, Fagnani, Gabriel Manfredi, y Grandi, se introduxeron desde luego en los secretos misterios del nuevo cálculo, y enriquecieron la analisis finita, y la infinitesimal con nuevas fórmulas, y con laudables des-

En Alemania.

En Italia.

cubrimientos. Solo la Italia puede gloriarse de una nueva Ipacia en la célebre Agnesi, autora de dos tomos de instituciones analíticas, expuestas con mucha inteligencia y doctrina, y con la mayor claridad, tanto mas maravillosa y laudable que la de la antigua Ipacia, quanto es mas vasta y sublime la analisis de nuestros dias que la de Diofante.

Nueva revolucion del álgebra.

Pero una nueva y no menos gloriosa revolucion ha ocurrido aun á los estudios algebráicos, antes de la mitad de este siglo. Nicolás y Daniel Bernoulli, émulos de su padre Juan, y de su tio Jacobo, ilustraron con obras originales el cálculo de la probabilidad, y las equaciones algebráicas, crearon nuevos métodos dignos de la atencion de los mas ilustrados geómetras, sujetaron á las fórmulas analíticas las ciencias mas abstrusas, y coronaron el álgebra de nuevo esplendor. En la Academia de las Ciencias de Paris se veian resonar continuamente investigaciones profundas de verdades algebráicas. Niccole hizo suyo el método apenas propuesto por Leibnitz para el caso irreducible por medio de las series, lo desenvolvió, lo aclaró,

ró, y lo reduxo á mayor simplicidad, á mas facil aplicacion, y mas próxîma verdad (*a*). Sobre la doctrina tan importante de las raices, sobre la resolucion de las equaciones, sobre las equaciones diferenciales, sobre las otras partes del álgebra esparció doctamente sus luces Fontaine (*b*). Y para el caso irreducible, para encontrar las raices racionales, para la integracion y la construccion de las equaciones diferenciales, y para otros muchos puntos del álgebra ha dado nuevas luces Clairaut, el qual al mérito de inventor ha juntado el, no tan glorioso, pero no menos útil, de expositor, y ha enriquecido las ciencias con una obra elementar, original en su género, donde parece que queria, antes que enseñarla, hacer inventar el álgebra á sus lectores, y donde se manifiesta igualmente sagaz inventor que célebre maestro. Los descubrimientos que hizo en sus escritos algebráicos, y el pleno dominio que mostró tener de la ana-

Clairaut.

 li-

(*a*) *Acad. des Sc.* an. 1738 & 1741.
(*b*) Ibi. 1734, 1739, 1747, &c.

lisis en todas sus sublimes investigaciones, lo elevaron en poco tiempo sobre sus nacionales, y lo hicieron mirar como el príncipe de los analisistas franceses. Pero salió á disputarle esta gloria, y á partir con él el principado el célebre d' Alembert, el qual, aunque algo mas jóven que él, y aunque empezase su carrera matemática quando Clairaut gozaba ya la fama mas universal, llegó sin embargo en poco tiempo á igualar, y aun á superar su celebridad. No fueron los progresos de d' Alembert tan rapidos y primitivos, tan extraordinarios y portentosos como los de Clairaut; ni compuso él en la niñez obras matemáticas, que pudiesen dar honor á los mas provectos y maduros geómetras; pero en su juventud levantó un vuelo tan alto, que se puso desde luego al lado de Clairaut, y superior á los demas nacionales suyos. El cálculo de las diferencias parciales inventado por él, su nuevo método de los coeficientes indeterminados, la reduccion de las cantidades reales é imaginarias á las expresiones mas sencillas, el cálculo de las funciones racionales é irracionales, el manejo de las fórmulas, la exâctitud de las

D' Alembert.

las demostraciones, y mil sutilezas analíticas que se encuentran esparcidas en sus obras, hicieron en poco tiempo á d' Alembert el objeto de la veneracion de toda la Europa, y el maestro de los algebristas. Mientras la Francia se complacia con estos sus jóvenes héroes, le oponia la Alemania á Eulero, poco menos joven que ellos, y no temia con este solo haber de quedar inferior en el cotejo á los dos franceses. No hay parte alguna de toda la analisis que Eulero no la haya reducido á mayor perfeccion, y enriquecidola con nuevos descubrimientos. Se lamentaba Leibnitz (*a*) de ver abandonada de los geómetras el álgebra de Diofante, de la qual creia se debiesen esperar muchas ventajas: y en efecto dice el mismo Eulero (*b*), que no solo no se habia adelantado nada aquella analisis despues de Fermat, sino que antes la habian dexado enteramente olvidada los posteriores: él pues quiso hacerla renacer, y demostró muchas

Eulero.

(*a*) *Act. Lips.* 1702. *Spec. sur anal.* &c.
(*b*) *Act. Petr. Nov. Comm.* t. II.

chas proposiciones de Farmat muy verdaderas y utilisimas, pero no demostradas por él, ni por otros, é inventó por sí mismo muchos teoremas, que en nada ceden á los de Fermat, é hizo tantos y tan bellos descubrimientos que la indemnizó completamente de la especie de indiferencia con que la habian mirado los otros geómetras (*a*). Leibnitz y Bernoulli, aunque íntimos amigos, y sincéros amantes de la verdad, jamas pudieron convenirse sobre el valor de los logaritmos de los números negativos é imaginarios; y esta gran qüestion que habia sido tan debatida por aquellos dos íntimos amigos, y consumados geómetras, tenia despues divididos los mas insignes matemáticos de nuestro siglo. Eulero llegó á decidirla, y vino á ser de algun modo el árbitro de los soberanos dioses de la analisis, y de todos los mortales admiradores y sostenedores del uno y del otro (*b*), hasta que sa-

(*a*) *Acad. Petr.* tom. XIV, & *crov. comm.* tom. I, II, &c. *Elem. d' Algeb.*

(*b*) *Acad. de Ber.* tom. V.

salió d' Alembert á apelar de su decision, y reponer el pleyto en el tribunal de la nueva álgebra mas ilustrada. Los nuevos teoremas con que ha enriquecido el cálculo diferencial y el integral; los excelentes tratados que ha dado sobre estos, y que forman el cuerpo de doctrina mas completo y perfecto que tenemos en este género; los útiles incrementos, y las importantísimas mejoras que ha acarreado á la fraccion continua de Brounker, á la teoría de las equaciones de condicion de Nicolás Bernoulli, al cálculo de las diferencias finitas de Taylor, al de las diferencias particulares de d' Alembert, y á quantos métodos han salido á luz en estos dias; su cálculo de los senos y de los cosenos; sus infinitos descubrimientos sobre las series, sobre la resolucion de las equaciones, la eliminacion de las incognitas, y todos los puntos del álgebra mas abstrusa; la sencillez y elegancia de sus fórmulas, la claridad de sus métodos y de sus demostraciones; el ardor metódico de sus obras, y todas las partes de un consumado analista, poseidas por él plenamente, han producido una útil revolucion

cion en el álgebra, en la geometría, y en todas las ciencias exâctas, y han elevado á Eulero á maestro y guia de quantos desean internarse en los escabrosos y asperos, pero rectos y seguros caminos de aquellas ciencias. Todos los matemáticos de algun crédito, que hay actualmente en toda la Europa, pueden llamarse sus discípulos, y ciertamente no hay ninguno que no se haya formado con la lectura de sus obras, que no haya recibido de él fórmulas y métodos, y que en sus descubrimientos no haya sido guiado y sostenido por el genio del grande Eulero. El orbe literario desfruta el espectáculo de ver el imperio matemático ocupado algun tiempo por el noble triunvirato de Clairaut, d' Alembert y Eulero; pero por finos y sutiles geómetras que fuesen los dos franceses, es preciso que cedan la preferencia al aleman: la inmensa vastedad de las investigaciones, el infinito número de los descubrimientos, la infatigable continuacion de los estudios, y su larga vida, le dieron una superioridad, que los mismos franceses doctos y justos no le querrán contrastar. Quando toda la Europa tenia fi-

fixos los ojos en los matemáticos franceses, y en el aleman, salió un joven italiano á partir con ellos el imperio matemático, y la atencion de los eruditos, y á substituir á Clairaut, que murió entonces, robado á las ciencias en muy fresca y robusta edad. La Italia habia en poco tiempo formado muchas geometrías, que cultivaban la analisis con particular fruto, y con distinguida gloria. El grande ingenio de Boscovick no pudo satisfacerse con las continuas, arduas y gloriosas investigaciones de la óptica, y de la astronomía, sino que quiso tambien ilustrar todas las partes de las matemáticas: y aunque mas sequaz en sus vuelos de la geometría, que del álgebra, esparció sin embargo sobre esta algunos rayos de luz tan brillantes, que lo hicieron mirar con respeto de los mas estimados algebristas. Profundo analista, y dueño del cálculo se manifestó tambien Frisio en sus dinámicas y astronómicas disquisiciones. Pero el verdadero padre del álgebra sublime en Italia puede justamente llamarse Vicente Riccati, el qual, émulo, y tal vez superior á Jacobo su padre, no solo dió mayor cla-

Boscovick.

Frisio.

Riccati.

ridad y extension á las reglas, y á los métodos hallados por otros, sino que él mismo inventó algunos nuevos, y tanto en el *Tratado de las series*, como en los *Opúsculos*, y en las *Instituciones analíticas* enseñó muchas nuevas é importantes verdades (*a*), y en todo se manifestó un verdadero algebrista. Estos y otros ilustres analistas, que en varias partes de Italia se veian descollar, acreditaban entre los geómetras modernos los estudios de esta nacion. Pero el honor del álgebra Italiana, el digno rival de los Euleros y de los d' Alemberts, el maestro de todas las naciones, el oráculo de todos los matemáticos, no es otro que la Grange, el qual desde las primeras produciones de su juvenil edad puso á la Italia en la cultura del álgebra mas sublime á nivel con las mas doctas naciones, que hasta entonces no podia mirarlas mas que como sus maestras. Luego que compareció en la Academia de Turin, á manera de una estatua de Fidias, como de Hortensio dice Ciceron, apenas fué visto quando fué admirado y alabado: solo con abrir la boca este Orfeo analítico tenia suspensos y pendientes de sus labios no solo á los mediocres matemáticos, sino hasta los mismos dioses de la analisis, Eulero y d' Alembert, los quales, aunque reconocidos por maestros de toda la Europa, se aplicaron á estudiar, y á aprender del joven geómetra.

La Grange.

(*a*) *Opusc.* tom. I, ope. IV, tom. II, ope. IV, & al. *Inst. anal.* l. I, c. XII, lib. III, c. V, & al.

El cálculo de las variaciones, el nuevo método para las series recurrentes, y otros sublimes descubrimientos, expuestos en la Academia de Turin, fueron las primeras lecciones que dió desde los desconocidos umbrales de aquella Academia á las escuelas mas célebres, á las mas nobles universidades, y á las mas respetables academias de toda la Europa, y desde luego hicieron mirar con respeto al joven maestro, y á la naciente Academia. Su fecundo ingenio ha continuado, y continúa todavía creando nuevos métodos, produciendo nuevos teoremas, encontrando nuevas demostraciones, y sacando del fondo de la naturaleza nuevas é importantes verdades. Emulo del grande Eulero no ha dexado parte alguna del álgebra, y puede tambien decirse de todas las matemáticas, que no haya vestido de nuevas formas, y no la haya aumentado y adornado de tal manera, que pueda de algun modo llamarse nueva; y él puede tener la complacencia, de que solo han podido gozar Newton, Eulero, y muy pocos otros, de ver su nombre á la frente de quantos escritos se hacen leer en aquellas materias, y pueden gloriarse de algun merito y fama. La quebrantada salud, y la delicada complexîon de d' Alembert lo habian separado mucho tiempo antes de las arduas y abstrusas meditaciones algebráicas, y llevadolo á la amenidad de las buenas letras, y despues de la muerte de Clairaut y de Fontaine, y la debilidad de d' Alembert, la Academia de las ciencias de Paris no levantaba tanto la voz en las investigaciones analíticas, como la de Berlin, que poseia á la Grange, y la de Petersburgo, donde estaba Eulero.

Pero la Francia, que habia dado al álgebra un Vieta, un Fermat, un Cartesio un l' Hopital, un Varignon, un Fontaine, un Clairaut, un d' Alembert, y tantos

tos otros maestros de aquella ciencia, veia de mala gana vueltos los ojos de toda la Europa á Berlin, y á Petersburgo, y poco atendido su Paris; y excitó el ingenio del valeroso la Place, que substituyó al casi mudo d' Alembert, y tuvo en equilibrio el álgebra francesa con la de Eulero, y de la Grange. Ahora la Academia de las ciencias de Paris goza la afortunada y gloriosa suerte de encerrar en su seno los dos mayores maestros del álgebra, la Grange y la Place, y puede justamente llamarse la Delos de la Europa matemática, á quien deben recurrir quantos deseen saber las mas recónditas verdades, y consultar los verdaderos oráculos de aquellas ciencias. Al lado de estas supremas deidades tiene el honor de sentarse Condorcet en aquel olimpo científico; y Cousin, Bossut, y otros célebres héroes hacen aquella Academia mas y mas digna del reverente culto, y de la religiosa veneracion de los amantes del álgebra, y generalmente de las matemáticas, y de todas las ciencias. La Italia, aunque privada de su la Grange, y despojada en pocos años de Riccati, de Frisio, y de Bos-

La Place.

Otros algebristas.

Boscovick, no ha quedado sin embargo falta de celebres algebristas, que den honor á sus estudios. ¿Quantos abstrusos puntos de la analisis no ha aclarado Fontana en varios escritos suyos, acarreandole nuevos conocimientos y útiles verdades? ¿Que plena posesion y singular maestría del cálculo no ha manifestado en todos? Lorgna nos presenta un nuevo cálculo, nuevas series, y nuevas y útiles ideas sobre varios puntos del álgebra. Paoli, Ferroni, Canterzani y otros matemáticos italianos cultivan con ardor, y con provecho este importante estudio, y procuran gloriosamente adelantarlo con muchos descubrimientos; y Niccolai mas animoso quiere echar por tierra los fundamentos no bastante seguros, sobre que hasta ahora se ha apoyado el álgebra, y fundarla mas solidamente sobre tres métodos suyos generales, y enteramente nuevos, de cuyo mérito, que hasta ahora, como todas las novedades, ha tenido panegiristas y contrarios, dexamos que decida el tiempo, y la comun acceptacion de los matemáticos. Con las luces de estos, de los alemanes Fuss y Bernoulli, y de otros muchos algebristas, que

que florecen en casi todas las naciones de la culta Europa, podemos justamente esperar, que adelante mas y mas aquella ciencia; que se dé mayor sencillez á algunas fórmulas, y mayor extension á otras; que se formen nuevos métodos con que despejar incognitas, y elevar cantidades imaginarias; que se quite á las reglas toda duda y obscuridad, y que en suma reciba todo el cálculo mayor solidez y perfeccion, y se haga mas y mas útil á todas las disciplinas matemáticas. El álgebra es verdaderamente la llave que sirve para abrir los mas secretos escondrijos de las ciencias exâctas; es el instrumento con que pueden hacerse en ellas los mas prontos y seguros progresos: quanto mas se desee el adelantamiento de las ciencias, tanto mas cuidado deberá ponerse en limar y refinar este instrumento suyo, tanto mas se deberá procurar dar toda la posible perfeccion al arte algebráica, que empezada para uso de la aritmética, ha pasado despues al manejo de la geometría, y ahora domina casi soberana, y árbitra en todas las ciencias.

CA-

CAPITULO IV.

De la Geometría.

Origen de la geometría.

Es harto verisimil que en Egipto, donde se hacian tantos canales, tantos diques, tan grandes lagos, tan inmensas fábricas, tantas y tan portentosas obras, que exîgian conocimientos geométricos, donde los sacerdotes, libres de las públicas ocupaciones, y de otros pensamientos, podian atender cómodamente á las meditaciones científicas, donde en efecto florecian las ciencias, y á donde de las naciones extrangeras acudian los estudiosos á aprenderlas; que en Egipto digo, naciese, se cultivase y promoviese la geometría, y se elevase de los trabajos mecánicos, y de las operaciones prácticas á las abstractas y generales teorías. ¿Pero que podremos decir de la geometría de los egipcios sino puras conjeturas? Los pocos progresos que baxo su enseñanza hicieron los ingeniosos y estudiosos griegos, dan una prueba mayor de la escasez de luces de los egipcios, que quantas nos pueden presentar de su saber al-

gunas obscuras expresiones de los antiguos, y algunas memorias suyas, que admiten diversas interpretaciones. ¿Que aprecio podrémos hacer de la geometría de los egipcios al oir lleno de admiracion al rey Amasis por ver á Tales, que midiendo la sombra de su baston, y la de una piramide determinaba la altura de esta (*a*)? Si despues de mucho estudio de la geometría egipciaca Tales por haber, como dice Laercio (*b*), formado en el semicirculo un triángulo rectángulo, y Pitágoras por haber encontrado el quadrado de la hipotenusa igual al de los dos lados, saltaron de gozo, é hicieron un sacrificio á las Musas, ¿podrémos concebir una idea muy ventajosa de la ciencia egipciaca? De los griegos, pues, tomaremos el principio de la historia de la geometría, donde se nos presentan hechos sobre que poderla fundar. Los primeros progresos de los griegos son ciertamente muy cortos y reducidos, y prueban la profunda ignorancia en que se

Principio de la geometría de los griegos.

(*a*) Plutarc. in *Conviv.* Laert. in *Thalete.*

(*b*) *In Thal.*

se encontraban quando se dieron á cultivar estos estudiosos; pero sin embargo da gusto el ver á la geometría pasar en sus manos de su infantil pequeñez á la mas robusta madurez, verla caminar al principio con los tímidos y vacilantes pasos de Tales, y de Pitágoras, y superar despues los mas altos é intrincados montes de dificultades con los vuelos de Archîmedes, y de Apolino. Laercio (*a*) cita á un Meri, que inventó, como él dice, los principios de los elementos de la geometría; y un Euforbo frigio (*b*), que segun el testimonio de Calimaco, empezó á establecer alguna doctrina sobre los triángulos escalenos, y sobre las líneas. Pero es preciso que Meri y Euforbo no esparciesen sus inventos, ni formasen discípulos en aquella ciencia, puesto que vemos á los griegos estudiosos ir á Egipto para aprenderla, y contarse comunmente á Tales por primer introductor de la

Tales. geometría entre los griegos. Tales apenas vuelto de Egipto formó en Mileto una escuela filosófica, donde sembró las primeras

(*a*) *In Pithag.* XI. (*b*) *In Thalet.* III.

ras semillas de la geometría, que tantos y tan sazonados frutos produxeron despues de algunos siglos en la Grecia. El promovió, y amplió la doctrina de Euforbo sobre los triángulos escalenos, y sobre otras figuras geométricas (*a*); él, segun el testimonio de Pamfila citada por Laercio, encontró el modo de describir en un semicírculo un triángulo rectángulo, esto es, descubrió la propiedad del círculo, que todo triángulo, que tiene por base el diámetro, y toca con el ángulo opuesto la circunferencia, tendrá este ángulo recto; él en suma hizo muchos descubrimientos (*b*), que le adquirieron el nombre de geómetra, é hicieron que lo mirasen los posteriores como el padre de la geometría griega. De las escuelas de Tales salió Anaxîmandro tambien geómetra; y si es cierto, como dice Suidas (*c*), que Anaxîmandro compuso un compendio de geometría, esto prueba haberse promovido y adelantado mucho este estudio,

Ee 2 por-

(*a*) Laert. *in Thal.* (*b*) Proclus *in Euclid. Comm.* lib. III. p. I. (*c*) Anaxim.

porque no se piensa en formar compendios de las ciencias, sino hay muchos descubrimientos, muchas opiniones, y muchas teorías que compendiar. Mientras Tales
Pitágoras. promovia en la Jonia la geometría, Pitágoras le deba en Italia notable incremento. Célebre es su descubrimiento de ser igual en los triángulos rectángulos el quadrado de la hipotenusa al quadrado de los dos lados tomados juntos (*a*). El demuestra que de todas las figuras sólidas la mas grande (y aun la mas bella, como dice Laercio) es la esfera, y de todas las planas el círculo (*b*), con lo que hizo de algun modo nacer el primer ensayo de la doctrina de los isoperimetros. Un mediocre geómetra de nuestros dias se reirá de los conocimientos, y del espíritu de los griegos, que miraban como esfuerzos del ingenio de los primeros maestros lo que ahora no es mas que un pequeño juego para los mas débiles principiantes. Pero quien reflexîone las gravísimas dificultades que se ofrecen á los primeros inven-

(*a*) Cicer. Laert. & alii passim.
(*b*) Laert. *in Pyth.* XIX.

ventores de qualquiera ciencia, y la intension demente que necesita, el que sin principio alguno sobre que apoyarse procura hacer generales las propiedades de algunas figuras, y formar por sí mismo sin ningun auxîlio precedente algunos teoremas, creerá que no se requiere menos ingenio para llegar de la nada á comparar entre sí, y con el círculo los triángulos, á encontrar la proporcion de algunas líneas, y de sus quadrados, á decidir sobre la mayor magnitud, á comparar entre sí las figuras planas y las sólidas, y á hacer los pequeños descubrimientos de Tales, y de Pitágoras, que para pasar de las doctrinas de Cavalieri, de Fermat y de Barrow, á los sublimes descubrimientos de Newton, de Leibnitz, y de los Bernoullis. Las escuelas de Tales y de Pitágoras produxeron muchos geómetras, y otros salieron de la Grecia sin haber venido de aquellas escuelas. Leemos en Laercio (*a*) quantas obras geométricas compuso Demócrito; y el verle tratar del contracto del círculo y de la esfera, de las lí-

(*a*) *In Democr.* XIII.

líneas irracionales y de las sólidas, y de tantos otros puntos geométricos nos manifiesta con bastante claridad quanto adelantó él en la geometría.

Progresos de la geometría. En vano querremos seguir ahora distintamente la historia de los progresos hechos en aquellos tiempos por la geometría, debidos á Archîtas, á Euclides póntico, á Hipócrates chio, á Filolao, á Platon, y á otros ilustres matemáticos: son muy escasas y obscuras las noticias, que han llegado hasta nuestros dias de sus fatigas geométricas, para poderlas describir exâctamente; pero sí dirémos en general, que casi todas las proposiciones que forman aun el dia de hoy los elementos de la geometría, han sido descubrimientos de aquella edad, y que las sublimes especulaciones en que vemos empleados á los geómetras de aquellos siglos, prueban bastantemente que se habia ya adelantado mucho la geometría.

Quadratura del círculo. La quadratura del círculo, la duplicacion del cubo, la triseccion del ángulo, son los problemas que disputaban aquellos geómetras; y no podia pensarse en semejantes problemas, sino se hubiesen encontrado antes otras muchas

chas verdades necesarias para tales investigaciones. La quadratura del círculo ha empeñado por su dificultad la atencion de los geómetras de todos los siglos hasta el nuestro, y ha acarreado á la geometría notables adelantamientos; pero no obstante lo arduo del problema vemos ocupados á los antiguos geómetras en buscar la resolucion. Plutarco (*a*) nos dice que Anaxâgoras encerrado en la carcel formaba su divertimiento buscando la quadratura del círculo. Y un hecho semejante de Anaxâgoras, al paso que nos hace creer que fuese este entonces un problema bastante agitado, no pareciendo verísimil que aun encarcelado le ocurriese el pensamiento de trabajar sobre un problema tan arduo, no siendo aun tentado por otro, prueba tambien que eran ya en tiempo de Anaxâgoras harto extensas las luces de la geometría, quando se internaban los geómetras en tales investigaciones. En efecto poco despues vemos al cómico Aristófanes introducir en la escena un geómetra, y hacerle ofrecer pesar el ayre, y quadrar el círculo, co-

(*a*) *De Exil.*

como que esta fuese entonces una materia muy disputada por los geómetras (*a*); y Aristóteles (*b*) cita tres diferentes quadraturas del círculo, inventadas ya en aquel tiempo por Hipócrates chio, por Brison, y por Antifonte. La investigacion de aquella quadratura empezó bien presto á producir adelantamientos en la geometría; y á ella se debe la quadratura de la lunula de Hipócrates chio, sobre la qual vemos aun ocuparse utilmente l' Hopital, y otros modernos (*c*), y la quadratriz de Dinostrato, que tomó de esta buscada propiedad el nombre de *quadratriz*.

Duplicacion del cubo.

La duplicacion del cubo era otro problema que tenia en agitacion á los geómetras. No me detendré en la fábula de la peste, y del oráculo de Delos, que no quiso que quedase libre el Atica de aquel mal hasta que fuese duplicada su ara, y como esta ara era cúbica, por eso se llamaba *Deliaco* el problema de la duplicacion del cubo. Pero lo cierto es que los mas

(*a*) En los *Uccelli* sc. del Geómetra, y Pistetero. (*b*) I Elench. (*c*) *Acad. des Sc.* 1701.

mas célebres geómetras se empeñaron en aquella investigacion, fácil en apariencia, pero en realidad muy ardua, y abstrusa para los conocimientos de aquella edad, por lo qual fueron vanas é inutiles todas sus diligencias. El primer paso para la resolucion del problema era conocer la dificultad. Esta se ocultó al principio á los ojos de los geómetras griegos; pero despues de inútiles tentativas fué finalmente reconocida. El antes citado Hipócrates de Chio fué el primero que conoció que para duplicar un cubo es preciso encontrar entre el lado del cubo, y el duplo del mismo lado dos medias proporcionales, y que la primera de estas medias será el lado del cubo duplicado que se busca (*a*). El gran Platon estudió con esmero el problema, y llegó á formarse un instrumento para resolverlo mecánicamente, pero sin la debida exâctitud (*b*). Eudoxîo, geómetra no menos famoso, encontró otra resolucion por medio de cier-

 tas

(*a*) Procl. *in Euclid.* (*b*) Eutocium *ad Archim.* lib. II *De Sphæra & Cilindro.*

tas curvas inventadas por él; y esta, aunque despreciada por Eutocio, fué alabada por Eratóstenes, testimonio mas autorizado por mas inmediato á aquel tiempo, y por haberse empleado tambien en la investigacion del mismo problema. Archîtas tarentino fué el primero, segun dice Laercio (*a*), apoyado al testimonio de Platon, que encontró en la geometría la deseada duplicacion del cubo. Menecmo dió dos resoluciones, y estas nos hacen ver otras dos muy importantes materias de las investigaciones de los antiguos geómetras, que manifiestan en sus conocimientos notables adelantamientos; quales son las secciones cónicas, y los lugares geométricos.

Secciones cónicas.

Los geómetras no satisfechos con los conocimientos adquiridos sobre los triángulos, sobre los círculos y sobre las propiedades de varias líneas y figuras, pensaron en buscar otras curvas con que emplear su estudiosa curiosidad, y las encontraron cortando un cono de diversos modos, y observando las curvas que de aquí nacian. De este modo encontraron la elipse,

(*a*) *In Archyta* VII.

se, la parábola, y la hipérbola, las quales tomaron el nombre de *secciones cónicas*, como formadas por la seccion del cono; y el triángulo, y el círculo que allí se encuentran igualmente, aunque eran ya antes bastante conocidos. Algunos quieren atribuir á Eudoxîo la invencion de tales curvas; y lo cierto es que las sobredichas resoluciones de Menecmo, discípulo de Eudoxîo, se fundan sobre conocimientos harto profundos de aquellas lecciones, que prueban quanto hubiesen adelantado ya los geómetras en sus investigaciones. A mas de esto Apolonio, que puede ser mirado como maestro de tales curvas, no hizo mas que perfeccionar los quatro libros de los cónicos de Euclides, y Euclides solo siguió la doctrina de Aristéo, ilustre escritor (*a*); y este escribiendo sus cinco libros de elementos cónicos, los expuso con una brevedad que prueba ser aquellas materias harto conocidas é ilustradas por los geómetras que le habian precedido. Otra especulacion se ve tambien

(*a*) Pappo *Coll. Math.* lib. VII. *De con. Apol.*

bien de aquellos siglos, que dá mucho honor á su geometría, y es la de los lugares geométricos, ó de aquellas líneas rectas ó curvas, de las quales cada punto resuelve igualmente un problema indeterminado, ó capaz de infinitas resoluciones. Estos lugares geométricos son de mucho uso en las matemáticas; y los elogios que han obtenido Cartesio, Fermat, y otros geómetras modernos por lo bien que los han manejado, pueden probar suficientemente quanta sea su utilidad. Grandes alabanzas, pues, debemos dar á los antiguos geómetras de la escuela platónica, los quales no solo inventaron estas materias, sino que las ilustraron con tanta extension. Tres especies diversas formaban de estos lugares, y llamaban *planos* los que se contenian en líneas rectas, y en arcos de círculos, *sólidos* las secciones cónicas, y *lineares* las otras líneas ó curvas de órden superior; y desde los primeros tiempos los trataron todos tres con mucha extension é inteligencia. Las sobredichas resoluciones de Menecmo manifiestan en él una gran posesion de estos lugares. Solo de los lugares sólidos compuso Aristeo cinco libros muy

Lugares geométricos.

muy estimados de los antiguos, que el docto geómetra Viviani quiso dar á conocer de algun modo á los modernos, y con mucha gloria suya compuso sobre ellos una ingeniosa y erudita *Divinacion.* Despues de Aristeo escribió Euclides dos libros de los *lugares de la superficie*; escribió Eratóstenes de los *lugares de las medianías*; otros dos libros dexó Apolonio de los *lugares planos*, y otros muchos escribieron de estos lugares (a); y todo prueba quanto adelantaron los antiguos geómetras en aquella utilísima teoría. La analisis geométrica, ó bien sea aquel método que del resultado como concedido, sacando conseqüencias, y de estas pasando á otras conseqüencias se viene á parar en alguna proposicion evidentemente verdadera, ó falsa en los teoremas, posible, ó imposible en los problemas, es otro invento, que da mucho honor á los antiguos, particularmente á Platon, á quien se atribuye la gloria de la invencion. Algunos creen que los antiguos careciesen de toda no-

Analisis geométrica.

(a) V. Papp. lib. VII.

nocion del analisis (*a*). Pero aun sin recurrir á las obras de Platon, de Archîmedes y de otros antiguos geómetras, donde se ven de ella claros exemplos, basta leer á Pappo y á Proclo para conocer que los antiguos adquirieron copiosas y justas nociones de este método. Pappo (*b*), ademas del uso que hizo de ella en todos sus libros, en el principio del septimo explica claramente que sea la analisis, de que modo proceda, que usos tenga en los teoremas, y en los problemas, á que geómetras pueda ser útil, quales la hayan tratado, y en suma habla de ella de modo, que es preciso no haberlo leido nunca para sostener que los antiguos no tuvieron nocion alguna de la analisis. Proclo tambien habla de ella muchas veces (*c*), y forma de algun modo su historia. Platon, inventor de este método, lo comunicó antes que á todos á Laodomante, el qual bien pronto supo hacer de él un óptimo uso. Teeteto y Archîtas tomaron tambien de Pla-

(*b*) *Encycl. method. Math.*, *Disc. prel.* (*b*) Lib. VII, princ. (*c*) *In Eucl.* lib. II & III.

Platon este método, como igualmente Neocolis, Eudoxîo, Menecmo y otros: y la analisis fué siempre mirada como una útil y gloriosa invencion de la escuela platónica, de la qual hicieron despues mucho uso Euclides, Archîmedes, Apolino, y los mas sublimes geómetras. La trisec- cion del ángulo es otro problema, que ocupó mucho las meditaciones de los antiguos, y ha empeñado tambien la atencion de Cartesio (*a*), y de los mas sutiles modernos. La facilidad de dividir un ángulo en dos partes iguales por medio de una recta perpendicular, movió á los geómetras á procurar dividirlo tambien en tres; pero despues de algunas inútiles aunque ingeniosas tentativas, comprehendieron, que solo con la geometría plana, ó con la regla y con el compas, no podia esperarse tal triseccion, y que esta era, como la quadratura del círculo, y la duplicacion del cubo, un problema casi irresoluble; y el conocer esta dificultad es una grande prueba de la exâctitud de la antigua geometría. Sin embargo procu-

Triseccion del ángulo.

(*a*) *Geom.* lib. III.

curaron buscar por otros caminos la deseada resolucion, y aplicando la hipérbola, y la concoide encontraron algunas muy ingeniosas, que se ven referidas por Pappo (*a*), y que hacen ver lo mucho que adelantaron los antiguos en la sutileza geométrica. Quanto hemos dicho hasta aquí puede probar suficientemente, que los antiguos adquirieron mas individuales y profundos conocimientos de geometría de lo que comunmente se cree; pero hay aun otra prueba, que puede quitar mas toda duda. Ya en tiempo de Alexandro escribió Teofrasto quatro libros de historia de la geometría, como dice Laercio (*b*); y ademas de este escribió mas copiosamente Eudemo rodio, discípulo tambien de Aristóteles como Teofrasto, otra historia de la geometría, de la qual saca Proclo (*c*) muchas noticias; y estos no llegaban más que á los primeros siglos, y se quedaban en Ermotimo, y en Filipo, como los últimos geómetras de los tiem-

(*a*) *Collect. Math.* lib. IV. (*b*) *In Theophr.* XIII. (*c*) *In Eucl. I* &c.

tiempos de su historia. La antigua geometría no hubiera prestado materiales para tantos libros de historia, sino hubiese hecho muchos descubrimientos, y obtenido gloriosos progresos.

Escuela alexandrina.

Pero sin embargo es preciso confesar que el verdadero esplendor de la antigua geometría no se vió hasta los tiempos posteriores, despues de la fundacion de la escuela de Alexandría. Entonces los Euclides, los Eratóstenes, los Archîmedes, los Apolonios y tantos otros hicieron que tomase un vuelo mucho mas alto, y que compareciese baxo nuevo y mas respetable aspecto. Euclides puede ser mirado como el padre, y es verdaderamente el maestro de la antigua geometría. Hipócrates chio fué el primero, como dice Proclo (*a*), que escribió elementos de geometría: despues de él los escribieron mas completos Leon el geómetra, Teudio de Magnesia y otros; pero todos quedaron obscurecidos al comparecer los *Elementos* de Euclides. En ellos se ven recogidas, explicadas y demostradas, enlazadas y uni- [Euclides.]

 das

(*a*) Lib. II *in Eucl.*

das en cuerpo de doctrina quantas proposiciones de geometría elementar se encuentran sueltas y dispersas en los escritos de los otros geómetras, á los quales agregó tambien algunos libros de aritmética; y su obra de los *Elementos* puede llamarse el copioso almacen de las riquezas matemáticas de aquella edad. La exâctitud y severidad con que él definió todas las palabras, demostró todas las proposiciones, y unió y encadenó todas las cosas, se puede decir que creó el espíritu geométrico, que tantas ventajas ha acarreado al adelantamiento de las ciencias, y á la perfeccion del espíritu humano. Los elementos de Euclides han sido en todos los siglos el código de los geómetras, y el libro clásico de todas las escuelas de geometría. Teon alexandrino, Proclo y otros antiguos se esmeraron en comentarlos. Los árabes traduxeron, comentaron é ilustraron de varios modos los elementos de Euclides, y siguiendo las huellas del maestro griego pudieron adelantar en aquella ciencia. Los latinos, que no los conocieron, no hicieron por muchos siglos mas que palpar tinieblas copiando, y alterando

do algunos pocos principios de Boecio, ó de otros menos inteligentes que él en la materia: los primeros crepúsculos de la geometría les vinieron á ellos de las traducciones aunque imperfectas de los elementos de Euclides; y los primeros maestros de la geometría de los modernos, Comandino, Clavio, Barrow y algunos otros aun mas modernos creyeron emplear bien sus fatigas traduciendo, y comentando los elementos de Euclides. Solo en este siglo se ha querido encontrar manchas en aquel luminar de la geometría, y se ha tachado aquella obra de sobradas definiciones y divisiones escolásticas, de sobrada individualidad y escrupulosidad en demostrar las cosas bastante claras por sí mismas, de sobrada sutileza, y de alguna sofistería. Dexo para los verdaderos y profundos geómetras la decision de lo justo de estas acusaciones; y solo diré, que el voto de un Newton y de un Leibnitz, los mas sublimes geómetras que haya producido el espíritu humano, los quales aprobaban mucho el método y el órden, la exâctitud y el rigor de los elementos de Euclides, la aprobacion de un Wolfio escritor tan acreditado en esta materia, las nuevas ediciones de Keil, de Gregory, y aun en nuestros dias del mas ilustre geómetra de Inglaterra Roberto Simson, deben tener mayor fuerza á favor del maestro griego, que quantas acusaciones le hacen algunos modernos por mas celebrados que sean; y que si el método de estos da mayor facilidad, y abrevia y facilita la inteligencia de los primeros elementos, el de Euclides da mayor seguridad á las demostraciones, y conduce á mayor profundidad en el estudio de aquella ciencia; y que de todos modos los elementos de Euclides son una de las obras que mayores ventajas han acarreado á las ciencias, y mas han contribuido á la ilustracion del espíritu humano. La principal celebridad de Euclides ha nacido de sus elementos; pero tuvo otros muchos méritos en la geometría: sus elementos hicieron mas fácil, mas claro, y mas universal el estudio de aquella ciencia; sus datos, los cónicos, los lugares de la superficie, y los porismos aumentaron los conocimientos, que se tenian de tales materias, y extendieron los confines de la ciencia geo-

geométrica. Pappo elogiador de Euclides, y de todas sus obras, alaba particularmente los *porismos* como una obra llena de arte y de ingenio, y utilísima para la resolucion de los mas obscuros problemas. Euclides en suma mereció por todos sus escritos singular reconocimiento de los amantes de la geometría, y dió á la escuela de Alexandría una pronta y universal celebridad. Hubiera sido á esta fatal su pérdida, á no verse recompensado por otros sucesores igualmente ilustres. Uno de estos fué Eratóstenes, cuyo genio enciclopédico, gramático, antiquario, geógrafo, cronólogo, filósofo y matemático ha hecho que su nombre se vea escrito con singular elogio á la frente de la historia de todas las ciencias. Las dos profundas especulaciones de los geómetras de aquella edad, sobre la analisis, y sobre la duplicacion del cubo, ocuparon el estudio de Eratóstenes, y él escribió utilmente de una y de otra. Pappo nos nombra á Eratóstenes entre los escritores de la analisis geométrica en compañia de Aristeo, de Euclides y de Apolonio, y cita á este propósito dos libros suyos de las medianias, ó

Eratóstenes.

ó de las proporciones (*a*). Eutocio nos ha conservado una carta del mismo al rey Tolomeo, en que le explica su invencion para la duplicacion del cubo, sobre la qual escribió tambien un libro; y despues vemos referida por Pappo (*b*) su resolucion de aquel dificil é intrincado problema. Y si la demostracion de Eratóstenes fué rebatida por Nicomedes, y no ha merecido la aprobacion de los geómetras modernos, él sin embargo manifestó en ella no poco ingenio, y sino ha tenido la suerte de dar en el blanco, puede consolarse de haber errado con Platon, y con los mayores geómetras de la antigüedad, entre quienes obtuvo, y conserva siempre un honroso y distinguido lugar. Era ciertamente la escuela alexandrina fecunda madre de matemáticos; pero no la única que produxese de los excelentes.

Archîmedes. Al mismo tiempo que Eratóstenes florecia el grande Archîmedes, por quien debieron Atenas, Alexandría, y todo el mundo geométrico ceder la palma á su Siracusa. La geometría recibió de su mano una sagacidad, una seguridad, un vigor, que parecia verse trasplantada en un nuevo mundo, donde empezó á dominar espaciosos campos, y fecundos collados, que antes casi no se atrevia á mirar. ¡Que sublime espíritu, y que noble atrevimiento no se necesitaba para pensar en determinar en los círculos la razon del diámetro á la circunferencia! Pensamiento que habia acobardado á Euclides, y á los otros geómetras, los quales contentos con establecer que las circunferencias son en alguna razon como los diámetros, no habian tenido valor para determinar qual fuese aquella razon. Archîmedes entró valerosamente en esta empresa; y comparando ingeniosamente el círculo con un triángulo, inscribiendo y circunscribiendo poligonos al círculo, y aumentando mas y mas los lados de estos poligonos, vino á concluir, que el diámetro del círculo es repecto de la circunferencia menos que 1 á $3\frac{10}{70}$, y mas que 1 á $3\frac{10}{71}$, que es quanto basta para conocer suficientemente la medida del círculo; y dió de este modo á los geómetras un exemplo del método de aproxîmacion tan útil, y tan freqüentemen-

(*a*) Lib. VII. (*b*) Lib. III.

mente seguido, y del de los límites, al qual Maclaurin (*a*), d'Alembert (*b*), Cousin (*c*) y otros modernos reducen el tanto, y con tanta razon alabado cálculo *infinitesimal.* El descubrimiento geométrico, de que mas se complacia Archîmedes, y del qual quiso conservarse la gloria hasta el sepulcro, fué la completa é individual medida de la esfera, y del cilindro, que él determinó menudamente, tanto respecto á su solidez, como á su superficie, y no solo de los cuerpos enteros, sino de cada uno de sus segmentos. Pero no fueron estas las únicas figuras que merecieron sus ilustraciones. Las conoides, y las esferoides obtuvieron de Archîmedes la misma exâcta medida, parangonandolas distintamente con los cilindros, y con los conos, que tienen la misma base y altura. La quadratura de la parábola fué tambien uno de sus predilectos descubrimientos; y se alaba con su amigo Dosisteo de haber emprendido una medida aun no tentada por ningun geómetra, y de haberla demostrado con dos diversas demostraciones, *matemática* (*a*), ó mecánica la una, y la otra geométrica. Mas crédito le han adquirido en la posteridad sus muchos, sutiles y útiles descubrimientos sobre la línea, que, como dice Pappo (*b*), le propuso Conon Hamio geómetra, y grande amigo suyo. Esta es la espiral, de cuya area, de las tangentes, de las secantes, y de todas las propiedades trató con tanta novedad y exâctitud, que ahora es la espiral celebrada de los geómetras como una línea, que debe distintamente honrarse con el nombre de Archîmedes. En todas estas, y en otras muchas especulaciones procede con una exâctitud y severidad, con una sagacidad de ingenio, y vehemencia de imaginacion, que aun yendo tras las huellas que él ha dexado, y auxîliados de sus luces encuentran ahora dificultad para seguirle los mas profundos y doctos geómetras.

(*a*) *Traité des Flux. Introd.* (*b*) *Encycl.* art. *Différ.* (*c*) *Leçons du Calcul. Différent* &c.

(*a*) Sic. (*b*) Lib. IV. theor. XVIII.

Archîmedes ha sido, y será siempre el pas-

pasmo de quantos son capaces de conocer la sublimidad de su mérito. El puede ser tenido como el Newton de la antigüedad; y es, como este, el héroe de las matemáticas, y la gloria del ingenio humano. ¿Pero que reconocimiento no deberémos profesar á la antigua geometría, que no contenta con producir los Platones, los Aristeos, los Euclides, y los Eratóstenes, no exhausta con la produccion de un Archîmedes, siguió aun enriqueciendo la mente humana, y nos dió un Apolonio, y otros ilustres geómetras? Si Archîmedes

Apolonio fué el Newton, Apolonio podrá ser llamado el Leibnitz, ó el Bernoulli de los antiguos. Solo sus *cónicos* bastan para hacernos ver en él un gran geómetra, qual lo proclamaba la antigüedad. ¿Que prodigiosa profundidad y vehemencia de ingenio no necesitaba Apolonio para seguir en sus cónicos tantas, y tan abstrusas investigaciones sin padecer equivocaciones? Singularmente el quinto y el septimo libro manifiestan por todas partes un ingenio inventor, fecundo de nuevas y sublimes verdades. Pero toda la obra fué con razon tenida por una de las mas profundas que

que hubiese producido el espíritu humano. Por mas que el docto geómetra de l' Hopital haya escrito con todos los auxîlios de la moderna geometría una obra de las secciones cónicas, muy estimada, y alabada en medio de las luces de este siglo, esta no ha podido obscurecer la antigua obra de Apolonio, ni ha llegado á darnos una teoría de estas curvas mas extensa, y completa que la del geómetra griego. Pappo que no se manifiesta muy apasionado al carácter moral de este autor, tiene en mucho aprecio su doctrina geométrica, y no solo nos dá noticia de muchas obras suyas pertenecientes por la mayor parte á la analisis geométrica, sino que tambien forma de ellas pequeños extractos; y estos pequeños rasgos bastan para hacer ver el magisterio con que su destreza geométrica manejaba aquellas sublimes y arduas materias; aquellas cortas líneas manifiestan la maestra mano del Apeles, que formó los quadros acabados. Apolonio y Archîmedes son los geómetras antiguos, que se leen y se estudian por los mas ilustrados modernos, y que merecen los respetos y la veneracion de todos. Pero á mas de

 es-

estos habia otros muchos ilustres geómetras. No hablo de Conon y de Dositeo, amigos de Archîmedes, y harto célebres geómetras, no de Eudemo y de Atalo, corresponsales de Apolonio, no de Nicoteles impugnador de Conon, no de otros menos celebrados geómetras de aquella edad; pero merece toda nuestra atencion Nicomedes, que inventó la curva llamada *concoide*, y la aplicó ingeniosamente al famoso problema de la duplicacion del cubo, segun el testimonio de Pappo (*a*), y de Eutocio (*b*), trabajó gloriosamense sobre la quadratura del círculo, aplicando á ella la *quadratriz* de Dinostrato (*c*), y mereció en suma que Newton recomendase mucho, y adaptase su concoide para varias geométricas especulaciones, é hiciese respetable á los mas ilustrados geómetras el nombre de Nicomedes. No son menos dignos de particular recomendacion Gemino, Filon, y Eron, que ademas del estudio de la astronomía y

(*a*) Lib. IV, prop. XXII, & al. (*b*) *In Arch. II. de Spher. & Cycl.* (*c*) Pap. lib. IV. prop. XXV.

y de la mecánica, se aplicaron tambien á la geometría, y se adquirieron algun crédito; y particularmente de Eron vemos en Pappo (*a*) una nueva resolucion del celebrado problema de la duplicacion del cubo, ó de las dos medias proporcionales; Teodosio, cuyos *esfericos* son una obra clásica en geometría no menos que en astronomía; algo despues Menelao, que escribió de trigonometría, y de quien se conservan aun tres libros de los triángulos esféricos sumamente apreciables para el adelantamiento de la geometría; Diocles, de cuya edad no tenemos seguras noticias, pero sabemos haber inventado la *cisoide*, curva perfeccionada y adoptada por Newton, y haber hecho ingenioso y feliz uso del problema de la duplicacion del cubo (*b*); y finalmente en el siglo IV de nuestra era, el tantas veces citado Pappo, el qual no solo recogió, y puso á buena luz muchos descubrimientos geométricos de los griegos que le habian precedido, sino que él mismo encontró nuevas demostra-

(*a*) Lib. III, prop. IV. (*b*) Eutoc. *in Archim.*

traciones, y descubrió nuevas verdades. En Pappo puede decirse extinguida la geometría griega. Teon alexandrino, é Ipasia su hija, Proclo, Marino, Eutocio, y otros de aquellos tiempos mas fueron comentadores y colectores de los descubrimientos de los otros antiguos, que verdaderos geómetras. Pero la geometría griega estaba ya bastante ennoblecida con los nombres de Euclides, de Archîmedes, de Apolonio, y de otros poco inferiores, y harto rica con sus descubrimientos, y no necesitaba de nuevos auxîlios para su esplendor. Por mas que se haya adelantado la moderna geometría, y haya superado á la antigua en descubrimientos, en conocimientos y en métodos, es una loca ignorancia y temeridad de algunos superficiales modernos el despreciar á los antiguos geómetras, y abandonar su lectura. ¿No es ciertamente mas glorioso, y mas útil el descubrir tantas propiedades, combinaciones y medidas de las figuras, inventar tantas líneas, demostrar tantas verdades, y crear en suma una geometría, que no allanar, abreviar y hermosear los caminos? ¡Un Euclides, un Archîmedes, y un Apo-

Apolonio como pueden ser mirados por quien tenga verdadero espíritu geométrico sin una profunda y sincéra veneracion! No pensaron así Leibnitz, Allejo, Simson, y tantos ilustres geómetras como ha habido hasta el dia de hoy: no así Maclaurin, el qual ha dexado escrito (*a*), que ,, aunque no haya comparacion alguna entre la extension y la utilidad de los descubrimientos antiguos y los modernos, ,, parece sin embargo que los antiguos ,, atendieron mas que nosotros á conservar á la geometría toda su evidencia y ,, que lo consiguieron mucho mejor": no así finalmente Newton, el qual tenia tan alto concepto de la geometría griega, que acostumbraba decir, que no habria necesidad de escribir nada sobre la geometría, si hubieran llegado á nuestras manos todas las obras de los geómetras griegos (*b*): y es cierto que la geometría griega forma una parte muy importante de la historia de las ciencias, y da sumo honor á los

(*a*) *Traité des flux, Préf.* (*b*) *In ejus Vita Opusc.* tom. I.

los progresos del espíritu humano.

Geometría de los romanos.

No podrémos pensar así de los romanos, los quales si emularon, ó tal vez superaron á los Homeros, y á los Demóstenes, no pensaron ni aun acercarse á los Archîmedes, y á los Apolonios, ni tuvieron jamas un geómetra, que mereciese el estudio de la posteridad. Casiodoro, Marciano Capela, y aquellos pocos latinos, que escribian de geometría, no pueden ponerse en el número de los geómetras. El mismo Boecio, que parece haber sabido mas que todos los latinos, no hizo otra cosa que traducir á Euclides, aunque con cierta excesiva libertad, la qual lo manifiesta harto mas dueño de aquella materia, de lo que lo eran los otros escritores latinos; pero minora mucho la exâctitud y el rigor geométrico del griego original. Los árabes si que cultivaron la geometría con bastante mas felicidad que los latinos. Euclides, Archîmedes y Apolonio fueron atentamente estudiados, traducidos é ilustrados por los sarracenos. Basta leer el catálogo de los matemáticos antiguos, compilado por el docto Eduardo Bernard, para hacer de ellos una edicion

Geometría de los árabes.

cion en catorce tomos (a), y en él se verá facilmente quanto hayan contribuido los árabes á la conservacion é ilustracion de los geómetras griegos. Algunos libros geométricos de los griegos mas estimados no se encuentran en el original griego, y solo los tenemos traducidos en árabe. Los mismos libros, que se conservan aun en el nativo idioma griego, han sido traducidos en latin de las traduciones arábigas, y no de los originales. Y todo esto deberá tener perpetuamente obligada la gratitud de los geómetras á las científicas fatigas de los musulmanes, que les han acarreado tantas ventajas. Pero no se contentaron los árabes con estos méritos, y quisieron tener sus propias prendas, y gloriarse de progresos hechos por ellos mismos en la geometría.

Geómetras árabes.

Solo el excesivo número de escritores puede dar algun crédito á la geometría arábiga: donde son muchos los cultivadores de una ciencia, es dificil que no se encuentren algunos, que la acarreen con-

(a) Fabr. *Bibl. gr.* lib. III, c. XXIII.

considerables adelantamientos. En efecto ¿quantos árabes no se podrian contar como beneméritos de la geometría? Si nosotros damos el nombre de geómetras á Archîmedes, si los griegos llamaban el gran geómetra á Apolonio, los árabes tenian tambien sus Archîmedes y Apolinos, á quienes honraban con el nombre antonomástico de geómetras. Hassen, Thabit ben Corrah y Alkindi, han sido distinguidos por los árabes con aquel renombre tan respetable. De Hassen, uno de los tres hijos de Musa ó Moyses, dice con sumo elogio la *Biblioteca arábiga de los filósofos* (*a*), que inventó, formó y resolvió muchos problemas geométricos que ninguno de los antiguos habia podido jamas imaginar; y que sus tratados sobre la triseccion del ángulo, y sobre las dos medias proporcionales para la duplicacion del cubo, problemas que tanto habian ocupado á los geómetras griegos, fueron mirados por los árabes como obras portentosas de ingenio, y de imaginacion. Excelente era tambien en la geometría el hermano de Hassen Abu Giafar

Hassen.

Abu Giafar.

(*a*) *Benu Musa ben Shaker.*

far Mohamad; pero sin embargo aun mas que con sus propios escritos adelantó él aquella ciencia con haber instruido en ella á Thabit ben Corrah, y con haberle procurado los medios para adelantar en los estudios geométricos introduciendole en la corte del califa Motadhed. Tenemos baxo su nombre una obra manuscrita con el título *De superficierum divisione*, y en la biblioteca del Escorial se encuentra otra *De descriptione trianguli rectilinei* (*a*), ninguna de las quales se lee con estos títulos en la *Biblioteca arábiga de los filósofos*. Pero en esta se cuentan tantas sobre la quadratura del círculo, sobre las secciones cónicas, y sobre tantas otras sublimes materias geométricas, que justifican los elogios de que se ve plenamente colmado, y el universal respeto con que era mirado por sus doctos nacionales. ¿Quantas alabanzas no merece Alkindi, que se ve puesto por Cárdano entre los doce mas claros ingenios que hasta entonces hubiesen ilustrado al mundo (*b*)? ¿Y

Thabit ben Corrah.

Alkindi.

Ii 2

(*a*) Casiri *Bibl. arab. hisp.* tom. I, p. 386.
(*b*) *De subtil.* lib. XVI.

Otros geómetras árabes.

¿Y quantos otros celebrados geómetras á mas de estos no tuvieron los árabes? Alhassen casi no dexó parte alguna del álgebra que no ilustrase con sus escritos. Jaime ben Tarec, Abdelazig, Assingiari, y algunos otros escribieron de varios puntos de geometría, y fueron muy estimados. Pero singularmente la trigonometría les debe, como dice Bossut (*a*), obligaciones esenciales. „Ellos dieron, dice, al „cálculo trigonométrico la forma, que „tiene aun en el dia, á lo menos en „quanto á los principios. Ellos substi- „tuyeron el uso de los senos al de las „cuerdas que se usaban antes, y con es- „to hicieron mas sencillas y mas có- „modas las operaciones de la geometría práctica." Montucla habia dicho ya antes lo mismo, y habia dado parte de la gloria de estos meritos á Mohamad hijo de Musa, y á Giaber ben Aphlah de Sevilla, del qual exîste en el Escorial un libro *De las esferas* (*b*), que puede confir-

(*a*) *Disc. prél. Encycl. méthod. Mathem.*

(*b*) Casiri tom. I, p. 567.

firmar el juicio de Montucla. Esta simplificacion, y esta facilidad de las operaciones trigonométricas fué, segun el mismo Montucla, uno de los primeros inventos de los árabes, encontrándose ya adoptado por Albatenio (*a*). Alfragano escribió sobre los senos rectos; Abdelaziz Massudo compuso un tratado de las tablas de los senos, y de su uso en la trigonometría; y trataron tantos otros de esta materia, que puede mirarse como enteramente propia de los árabes. Ademas de la conservacion de los libros griegos, y de los griegos descubrimientos, ademas de los progresos, sean los que se fuesen, producidos por los sarracenos, debe la geometría á los mismos la introduccion, ó el renacimiento entre los latinos. Gerberto, Campano, Atelardo, los primeros restauradores de la geometría en occidente; todos tomaron de los musulmanes los pocos conocimientos que sembraron entre los christianos, y que lentos y esteriles al principio brotaron con el tiempo abundantemente, y produxeron aquellos ricos y precio-

(*a*) *Hist. Math.* tom. I, p. II, lib. I.

ciosos frutos, de que ahora gozamos tan completamente.

Renacimiento de la geometría.

Los progresos en el renacimiento de la geometría fueron aun mas lentos que en el mismo nacimiento. No vemos por muchos siglos mas que malas traduciones, y muchas veces tambien corrupciones de las obras mas elementares de los griegos y de los árabes; ningun ingenioso descubrimiento, ninguna obra original, ningun adelantamiento en la geometría. Solo hácia mitad del siglo XIII florecieron dos matemáticos, Jordan Nemorario, y Juan de Sacrobosco, que manifestaron tener algun ingenio, y escribieron por sí, aunque siguiendo las guias griegas y árabigas, obras geométricas, y no simples traduciones. Pero estas mismas obras eran tan rústicas y mezquinas, que probaban la escasez de luces de aquellos tiempos; no eran oportunas para producir otras mejores, y hacer nacer buenos geómetras; y en efecto no empezamos á verlos hasta en el siglo XV.

Purbach.

Purbach puede llamarse el primero que manifestó alguna chispa de genio geométrico, y que hizo ver en sus observaciones, y en sus obras astronómicas alguna finura de pensar en la geometría, y alguna vislumbre de invencion para el mejoramiento de la geometría práctica, y de la trigonomotría. Regiomontano, su discípulo, superó bastante al maestro, y se formó un geómetra harto mas perfecto. Cárdano, oyendo de mala gana las alabanzas de Regiomontano, lo acusaba de plagio en la construccion de las efemerides, en la tabla de las direcciones, en el libro de los triángulos esféricos, y en todas las cosas (a). Pero sea lo que se fuese de estas acusaciones, que nosotros no podemos referir ahora, lo cierto es que la geometría y la astronomía profesarán perpetuo reconocimiento á Regiomontano. Este corrigió y perficionó la invencion de Purbach para la exâctitud de los cálculos trigonométricos, dividiendo el radio en 1000000 partes en vez 6000000, que Purbach, habia substituido á los 60 de los antiguos. Ademas de esto introduxo Regiomontano en la trigonometría el uso de las tangentes, y formó la tabla de ellas.

Regiomontano.

No

(a) V. Gassend. *in Vita Purbach. & Regiom.*

No solo expuso las teorías de los árabes en la trigonometría, sino que las llevó mucho mas adelante, encontrando la resolucion de los mas dificiles casos; y podemos decir que nos dió en su obra de los triángulos una trigonometría bastante completa. Sus comentos de Archîmedes, la defensa de Euclides, y otros trabajos geométricos acrecentaron mas y mas sus méritos en la geometría; y todas sus obras, y el estudio que en aquel siglo se hacia de la lengua griega, sirvieron de mucho estímulo á los literatos europeos para dedicarse con nuevo ardor á la cultura de aquella ciencia. Se empezaron á leer y á gustar los geómetras griegos en sus originales, se abandonaron las traducciones hechas del árabe, y se hicieron otras del griego: se vió en su verdadero esplendor la antigua geometría, que hermoseó con sus gracias á los nobles ingenios, y se empezaron á ver entonces muchos geómetras. Tales eran Walter, Durer, Adriano Romano, Vanceulen y otros; tal particularmente Werner, que se internó con provecho en las secciones cónicas, inventó nuevas resoluciones en algunos problemas de geometría, é ilustró con nuevos escritos la trigonometría.

Algunos modernos geómetras.

Tales Retico, y Byrge, que acarrearon mayor perfeccion á las tablas trigonométricas; y singularmente Byrge llegó, segun el testimonio de Keplero, á formar la primera idea de los logaritmos. Célebre es la memoria de Nuñez, mas conocido baxo el nombre de Nonio, y benemérito de la geometría por su zelo, y por sus obras, pero mas aun por la invencion del instrumento que lleva su nombre, y que sirve tanto para la exâctitud geométrica. Los comentos de Euclides, de Ciruelo, algunos escritos de otro Nuñez, y otros de otros escritores manifiestan que en España se cultivaba con ardor la geometría. Los franceses Pelletier, y Oroncio Fineo, son conocidos de los geómetras, no solo por las disputas, y por las oposiciones á que se vieron sujetos, sino tambien por algun mérito de sus escritos. Commandino, y Mauroli, ó Maurolico, son nombres mas ilustres en las matemáticas: solo las traduciones é ilustraciones de los geómetras griegos hechas con mucha inteligencia y sagacidad, hicieron sus nombres muy respetables en la geometría, y las

 obras

obras suyas propias aumentaron tambien la reputacion de su saber adquirida con dichas traduciones. Tartaglia, tan famoso por sus descubrimientos en el álgebra, manifestó tambien en la geometría su original y penetrante ingenio; y muchos se adquirian por todas partes el nombre de
Clavio. geómetras. Descollaba sobre todos Clavio por la fama universal: sus inmensas obras, y la vasta extension de sus conocimientos matemáticos hicieron que fuese tenido de muchos como el oráculo de aquella ciencia; y aunque despues se ha minorado mucho su fama, será siempre respetado de quantos querrán reconocer suplida la falta de ingenio con la eficacia del estudio, y con la constancia del trabajo, particularmente si consideran el estado de aquella ciencia en su siglo, y las ventajas que Clavio le acarreó. No tan extensa, pero mas verdadera, estable y solida
Vieta. es la gloria de su contemporáneo Vieta, el mas sublime y original geómetra, que se hubiese visto despues de los felices tiempos de los Archîmedes, y de los Apolonios. Embebido en la geometría antigua, é íntimo conocedor de sus primores, mo-

vido de una disputa con el arriba nombrado Adriano Romano, geómetra holandes de mucho mérito, se aplicó al restablecimiento del libro *De tactionibus* de Apolonio, y lo dió al público con el título de *Apolonius gallus*. Una mayor exâctitud en acercarse á la verdad de la razon del diámetro al circulo; los elementos de la doctrina de las *secciones angulares*, y la determinacion por fórmulas analíticas de las relaciones de los senos de los arcos multíplices y submultíplices; la construccion de las tablas trigonométricas sobre este principio, y otras novedades geométricas son los verdaderos méritos que elevaron á Vieta á la clase de los mas sublimes geómetras. Al mismo tiempo que Vieta y Clavio trabajaba con feliz suceso Lucas Valerio buscando el centro de grave- Lucas Valerio.
dad de los sólidos, á los que Archîmedes no habia dirigido sus especulaciones; y su libro sobre aquella materia puede llamarse la primer obra latina, que hiciese extender mas los confines de la geometría griega. Galileo buscó tambien el centro de gra- Galileo.
vedad, y logró encontrarlo en varios cuerpos. Justo amante de la geometría supo gus-

tar de todos sus primores, y se animó á tentar ulteriores adelantamientos. El fué el primero, ó qué encontró, ó á lo menos que examinó la cicloyde, y que buscó sus propiedades. Varios curiosos é importantes eoremas geométricos son hallazgos suyos; pero su mayor mérito á favor de la geometría fué el aplicarla como lo hizo á la física, y hacerla servir de segura guia para penetrar los mas ocultos misterios de la naturaleza. De este modo empezaron los geómetras á internarse en los mas profundos arcanos, y á superar á los mismos griegos sus maestros. Hemos visto á los ignorantes europeos buscar por medio de los árabes los primeros elementos de la geometría, y estudiar malamente en sus traduciones las obras de los griegos. ¿Quantos siglos no se han pasado antes de superar en sus escritos los mas primitivos elementos de la geometría ordinaria? ¿Quantas fatigas no se han necesitado para entender bien á Euclides? ¿Quantos años, y quantos esfuerzos antes de llegar á comprehender las teorías griegas de Archîmedes, y de Apolonio? ¿Quien pensaba poder añadir luces á las luces de los maestros grie-

griegos? ¿Desde Gerberto hasta Vieta le ocurrió jamas á alguno buscar lo que Archîmedes no habia encontrado? ¿Quien se hubiera atrevido á pronosticar, que en pocos años superarian tanto los europeos á los descubrimiertos griegos, que los mas sublimes problemas, á los quales no pudieron llegar los antiguos, no serian en sus manos mas que un juego? Nuevos teoremas, nuevas verdades, nuevo orden de cosas se va á descubrir en la geometría de estos dos últimos siglos. Aunque sequaz al principio de la griega se atrevia sin embargo á superarla, abrir nuevos caminos no pisados por ella, y correr nuevos campos no tocados por la misma; pero hecha ya mas fuerte, y mas valerosa, provista de nuevos medios, y de auxîlios propios, osó subir á altas cimas no vistas de aquella, y dominar regiones, de quienes no se tenia idea alguna. Tenemos en estos dos siglos tres especies diversas de geometría: desde Vieta hasta Cartesio la geometría es aun la antigua, solo aumentada con nuevas verdades, y enriquecida con muchos descubrimientos, y esta aun continuó cultivandose y produciendo nue-

nuevos frutos despues de la introduccion de la cartesiana. Cartesio, sutil geómetra, y feliz algebrista, forma una nueva geometría, que acompañada y auxîliada del álgebra hace progresos, á los quales no se podia aspirar sin este apoyo: de Newton, y de Leibnitz nació una nueva mas sublime, mas noble, y mas fecunda geometría, que provista del cálculo infinitesimal es tan superior á la cartesiana, quanto esta á la antigua. Entremos pues á recorrer la historia de todas tres.

Vieta, Valerio y Galileo, hicieron ver, que con el método de los antiguos se podia pasar mas adelante de lo que se habian internado los mismos antiguos. Keplero fué mas animoso; y aunque no bastante provisto de geometría, se atrevió á tentar nuevos caminos no abiertos por los antiguos geómetras. El exâmen de ciertas vasijas le dió ocasion para producir una nueva geometría. Archîmedes, y los antiguos solo ponian la mira en la medida, y en las relaciones de los sólidos engendrados con hacer girar las secciones cónicas al rededor de una base puesta exâc-

Keplero. tamente en el medio. Keplero quiso consi-

siderar otros muchos, que podian engendrarse revolviendo al rededor de exes diversos ya las mismas secciones cónicas, y ya cierta porcion sola de las dichas curvas. De este modo llegó á formar mas de ochenta sólidos nuevos aun no contemplados por los geómetras, y los distinguió con nombres de *anillo ancho*, *de anillo angosto*, *de globo turquesco*, *de manzana*, *de membrillo* y de otros semejantes. Da gusto ver las maneras diversas, con que forma aquellos sólidos, y las curiosas imágenes de que se vale para hacerlos conocer á los lectores. Con motivo de hablar de las figuras se atrevió á introducir el nombre y la idea del infinito, formando el círculo de infinitos triángulos, el cono de infinitas pirámides, el cilindro de infinitos prismas, y así de otros sólidos, y demostró de este modo de una manera directa y clara algunas verdades, que en el método antiguo de comparar entre sí las figuras inscriptas y circunscriptas á los planos; y á los sólidos que se han de medir, exîgian giros sumamente intrincados, y muy dificiles de executar: pero la escasez de luces geométricas en que se encontraba to-

todavia, lo hizo caer en muchos errores, y dexar sin la deseada resolucion la mayor parte de sus problemas. Sin embargo las investigaciones de Keplero sobre las investigaciones de Keplero sobre tantas figuras nuevas, y la introduccion de la idea del infinito en la geometría excitaron la curiosidad de los geómetras, y los conduxeron á nuevos descubrimientos.

Guldin. Guldin encontró la resolucion de los problemas propuestos por Keplero por medio del centro de gravedad, aplicándolo con mucho ingenio y felicidad á la medida de las figuras producidas por revolucion. El primer paso de Guldin fué señalar con exâctitud en cada figura el punto donde precisamente se encuentra el centro de gravedad; y esto solo le produxo ya algunos descubrimientos. Pero pasó mas adelante, y exâminando las figuras formadas por la rotacion de una línea, y de una superficie al rededor de una base inmoble, encontró que eran como el resultado de la figura generatriz, y del camino que describe su centro de gravedad; y que por exemplo si un triángulo rectángulo girando al rededor de uno de los catetos forma un cono, como el centro

tro de gravedad está entonces distante del exe un tercio de la base, y girando describe una circunferencia, que es el tercio de la que describe la extremidad de la base, del mismo modo el cono será como el resultado del triángulo generador por el tercio de la circunferencia descripta por la extremidad de la base; y por ello el cono será el tercio del cilindro de la misma base, y de la misma altura. De este modo aplicando esta regla á otras figuras encontró la resolucion de todos los problemas con singular exâctitud, y abrió un camino á los geómetras para descubrir muchas verdades. Pero este no fué seguido de muchos; y se hizo mucho mas fecunda y mas útil á la geometría la introduccion del nombre, y de la idea del infinito reconocido por los antiguos, y propuesto baxo nuevo aspecto por Keplero. Galileo (*a*) se familiarizó aun mas con los infinitos, y con los indivisibles; y no solo reduxo á ellos la demostracion de algunos teoremas, sino que pensó tambien en componer un tratado de

(*a*) *Dial. della nuova Scién.* lib. II, y III.

de los indivisibles. Esto que pensaba hacer Galileo lo habia ya dispuesto, y preparado su discípulo Cavalieri. El empieza por considerar el sólido como compuesto de infinitas superficies, las superficies de infinitas líneas, y las líneas de puntos infinitos; y para encontrar la medida de un sólido le basta tener la razon de todos los planos que lo componen, y la de las línesas para la medida de los planos, y generalmente para tener las relaciones entre dos cuerpos, determinar las de sus elementos, que él llama *indivisibles.* Así se resolvió á buscar la medida de muchos sólidos de los inventados por Keplero, y la encontró en mas de veinte (*a*), y despues aun en muchos mas, y abrió á otros un fácil camino para encontrarla en los restantes. Entonces pues con el descubrimiento de Cavalieri se dió principio á una nueva geometría. A las figuras inscriptas y circunscriptas, á las dificultades de inscribir y circunscribir poligonos á una figura, y de buscar los límites de la razon entre el último poligono ins-

Cavalieri

(*a*) *Geometr. indiv.* &c. *Pref.* & al.

inscripto, y el último circunscripto, al método en suma de doble posicion, á que únicamente habian atendido los antiguos, se empezaron á substituir los elementos indivisibles, los infinitésimos, los infinitos, y se facilitaron muchas investigaciones, que antes eran muy dificiles y confusas, se abrió campo para hacer otras muchas, que hasta entonces no se podian tentar, y nació en suma una nueva geometría. El nombre de *indivisibles*, y la novedad del descubrimiento excitó la atencion de todos los geómetras, y provocó las censuras de muchos. Pareció desde luego á algunos que el método de los indivisibles fuese tomado de Keplero; pero Cavalieri (*a*) hizo ver la diversidad; puesto que Keplero de los cuerpos pequeñísimos compone de algun modo los cuerpos mayores, quando él solo decia, que los planos eran como los agregados de todas las líneas equidistantes, y los cuerpos como los agregados de todos los planos. Quisieron otros derivar este método de una obra de Bartolomé del Sovero *De curvi,*

(*a*) *Exerc. tert. in Guld.*

vi, et recti proportione promota (*a*); pero Cavalieri hizo ver que bastante antes de la publicacion de esta obra habia él, no solo escrito, sino presentado al senado de Bolonia la suya de la geometría de los indivisibles. La idea sola, y el nombre de indivisibles chocó á muchos geómetras, y él mismo habia ya previsto la extraña impresion que debia causar en el ánimo de muchos, y de algun modo habia anticipado la respuesta en la prefacion del libro septimo; y antes bien puede decirse que todo el libro septimo, probando con otro método las mismas verdades, que en los antecedentes se habian demostrado con el de los indivisibles, forma de algun modo la apología de este método. Salian sin embargo cada dia nuevos opositores y habiendo entre estos uno muy respetable, el poco ha nombrado Guldin, y deseando Cavalieri hacer mas público, y mas firmemente establecido su método, se vió precisado á exponerlo de nuevo en dos *exercitaciones*, y responder en otra á las oposiciones de Guldin. Este muy poseido de sus centros de gravedad, y agravado tambien de achaques, no pudo mirar con buenos ojos el método de los indivisibles, ni exâminarlo con atencion: y alaba, sí, al autor, y recomienda su método como oportuno para la invencion, pero procura tacharlo de falsedad y de insubsistencia, y querria deprimirlo para hacer reynar el suyo de los centros de gravedad. Nosotros no podemos dexar de alabar uno y otro método, y venerar á sus autores; pero queriendo dar á alguno la preferencia, no temeremos abrazar el de Cavalieri como mas directo, mas expedíto, y mas fácil. Es natural, como con razon dice el mismo Cavalieri (*a*), buscar antes la dimension de las figuras, y despues su centro de gravedad, antes se concibe una figura extendida, que grave. Muchas veces aun es mas dificil el determinar el centro de gravedad que la medida, que por su medio se debería buscar. Pero dirémos sin embargo que el método de Guldin debe reputarse como un bellísimo descubrimiento en la geometría, y que por mas que el método de los indi-

(*a*) Lib. V.

(*a*) *Exerc. tert.*

divisibles haya tenido mas influxo en los progresos de la geometría, merece tambien el de los centros de gravedad los elogios de todos los geómetras, y ambos á dos hacen los nombres de Guldin, y de Cavalieri inmortales en los fastos de la geometría. Galileo, Viviani, y toda la escuela galileana acogió con muchos aplausos el método de Cavalieri, que despues defendió, ilustró, y amplificó un alumno suyo, Estevan de los Angeles. El primero que lo honró con la práctica, y con adaptarlo utilmente fué Torricelli, como se gloriaba de ello el mismo Cavalieri (*a*). Con este método resolvió Torricelli problemas dificilísimos con suma facilidad, encontró una nueva quadratura de la parábola, una nueva relacion de la esfera al cilindro, la medida del sólido agudo hiperbólico, y, lo que hizo mas célebre el nombre de Torricelli, la dimension de la cicloyde. Galileo habia estudiado muchos años la resolucion de tales medidas sin poderla encontrar; el mismo Cavalieri habia empleado en vano sus fatigas

(*a*) *Exerc. par.*

gas en aquella especulacion; y solo Torricelli con el auxîlio del nuevo método llegó con tal facilidad á encontrarla, que, como dice Cavalieri (*a*), el problema que parecia á los geómetras de suma dificultad, fué para él facilísimo. Pero esta bella fatiga del ingenio geométrico de Torricelli le atraxo una grave acusacion de plagiario del geómetra Roberval.

Roverbal.

La Francia tenia entonces dos geómetras de órden superior, Cartesio, y Fermat: Roberval amigo de este, contrario de aquel, y émulo de entrambos, pero inferior á ambos á dos, procuraba igualar á estos, y se consideraba muy superior á todos los otros. El en efecto inventaba métodos, y resolvia problemas, que en vano lo hubieran intentado otros geómetras que Cartesio y Fermat. ¡Con que gusto podia pues oir que el público diese á otros los elogios de algunos inventos, que se debian á él muchos años antes! Habia encontrado un método semejante al de los *indivisibles*, y mientras lo tenia zelosamente guardado, gloriandose de poder resolver con él proble-

(*a*) Ibid.

blemas superiores á las fuerzas de los otros geómetras faltos de este auxîlio, vió publicar por Cavalieri el método de los *indivisibles*, y arrebatarle la gloria que se hubiera podido adquirir, si hubiese querido comunicar al público sus inventos. Frisio (*a*) parece querer poner en duda la originalidad de la invencion de Roberval, reflexîonando que esta no salió á luz hasta dos años despues de la publicacion de la obra de Cavalieri, y ocho ó nueve despues que ya se conocia en Italia la geometría de los indivisibles. Pero quien reflexîone sobre los problemas que resolvian Roberval y Fermat hacia los tiempos del descubrimiento de Cavalieri, no podrá negar que tuviesen ellos algun método semejante en el mérito, y tambien en la forma al de Cavalieri, á quien sin embargo se debe el doble elogio de original en la invencion, y de generoso en la publicacion de la misma. No podia Roberval contrastar á Cavalieri la gloria de la invencion del método de los indivisibles, no habiendo él dado jamas parte del suyo á ninguno

(*a*) *Elog. del Cavalieri.*

no (*a*); pero quando vió arrebatarle Torricelli la de la dimension de la cicloyde, á la qual tenia él derecho algunos años antes, no pudo contenerse, y prorrumpió en quejas contra el geómetra italiano, como que se apropiase un invento suyo, y se adornase con sus fatigas. Es cierto que Roberval habia encontrado algunos años antes la medida de la cicloyde; y esto se ve no tanto en la obra *De la Música universal* de Mersseno, publicada en 1637, y en la *Historia de la cicloyde* de Pascal, no contradicha en esta parte por Dati, apologista de Torricelli, quanto en las cartas de Cartesio, de las quales se infiere, quanto mas adelante que la simple medida se hubiese pasado en Francia en exâminar los efectos de la cicloyde (*b*); aunque de alguna otra carta del mismo Cartesio (*c*), y de otros pasages de otros escritores se pueda sacar algun argumento en contra. Pero que Torricelli tuviese la me-

(*a*) Roberv. *Epist. ad Torric.* (*b*) V. part. III, ep. Carcavi LXX, ep. LXXVI, & al.
(*c*) Ep. LXIX.

menor noticia de las demostraciones de los franceses; que Beaugrand hubiese dado parte á Galileo; que Torricelli hubiese heredado todas las cartas de este, y encontrado en ellas la medida de la cicloyde, no solo carece de todo fundamento, sino que se ve desmentido por evidentes razones contrarias. El descubrimento de Roberval quedó oculto en su escritorio, y solo lo comunicó á algun amigo en cartas familiares. La Italia, la Inglaterra, y la Francia misma carecian en un todo de tal noticia; el mismo historiador Pascal, apasionadísimo á Roberval, ignoraba enteramente su descubrimiento, y tuvo por mucho tiempo la medida de la cicloyde por obra de Torricelli. Cavalieri aun en el año 1647, tres años despues de la publicacion del descubrimiento de Torricelli, y de las quejas de Roberval, continua dando á Torricelli la gloria de la invencion (*a*). Wallis muchos años despues pone en duda que Roberval haya jamas executado dicha medida, y reconoce por único autor á Torricelli. El frances la Lou-

(*a*) Exerc. prima.

Loubere le hizo tambien el mismo honor; y generalmente toda la Europa literaria reconocia por autor de aquel descubrimiento á Torricelli, y nada sabia de la oculta demostracion de Roberval. Las nacidas disputas, las promovidas especulaciones, las agitadas qüestiones en obsequio de la cicloyde dieron materia á dos historias, y á varios otros escritos sobre aquella curva. Nosotros dexando esta disputa, ahora poco importante, solo diremos con Wallis, que aunque Roberval hubiese descubierto antes aquella verdad geométrica, con todo *nos Torricellio plus debemus, qui demostrationes suas jam palam factas vulgavit, quam qui suas adhuc supprimit Robervallio.* Tenia Roberval ingenio agudo para la geometría, y se hubiera adquirido mayor fama, y hubiera sufrido menos disputas, sino hubiera sido tan avaro en comunicar sus propios inventos, y hubiese mirado con ánimo tranquilo que otros diesen los suyos á la luz pública. El se formó un método, y compuso un tratado de los indivisibles, semejante de algun modo al de Cavalieri, y se sirvió de él felizmente para resolver muchos problemas. El inventó otro para las tangentes, llamado *De los movimientos compuestos*, que tenia un remoto principio de semejanza con el de las fluxîones de Newton. El encontró la medida de la cicloyde, sobre la qual hizo despues tanto ruido con Torricelli, y resolvió ingeniosamente muchos problemas que pertenecen á aquella curva. El inventó ciertas curvas, llamadas por Torricelli *Robervalianas*, y conocidas aun al dia de hoy baxo su nombre; pero que él quiere llamar *quadratrices* (*a*) porque se sirvió oportunamente de ellas para quadrar las parábolas, y para encontrar espacios finitos iguales en magnitud á los infinitos. El dió métodos para encontrar los centros de percusion, que eran mas exâctos que los de Cartesio, y le daban alguna superioridad sobre el objeto de sus zelos, á quien en todo lo demas quedaba muy inferior. Roberval en suma se adquirió un gran crédito en la historia de la geometría, y le hubiera dexado mas noble y puro, sino lo hubiese manchado con sus pueriles dispu-

tas,

(*a*) *Ep. ad Torric.*

tas, y con sus obstinadas é inconcluyentes oposiciones contra los descubrimientos de Cartesio. No era solo Roberval el geómetra de la Francia, que se hacia oir en medio del estrépito que movian los grandes descubrimientos de Cartesio, y de Fermat. La Loubere, Beaugrand, Pascal, Leotaud, y algunos otros semejantes hubieran podido bastar para el honor geométrico de una nacion menos rica de lo que lo era entonces la francesa. Por otra parte la Italia, ademas de los poco ha celebrados Galileo, Cavalieri y Torricelli, se gloriaba de tener á Castelli, célebre idráulico, pero no menos famoso geómetra; se gloriaba de Estefano de los Angeles, defensor, ilustrador, y amplificador del método de Cavalieri, y de las doctrinas de Galileo: se gloriaba de Ricci, estimado y alabado por los geómetras dentro y fuera de Italia, y por el mismo Torricelli su maestro; se gloriaba de Borelli, ilustrador de los antiguos geómetras (*a*); y se gloriaba sobre todo

de

(*a*) V. Fabroni *Vita Ital.* &c. tom. II.

de Viviani, digno ciertamente de sumos elogios por las sutiles y exâctas resoluciones de muchos problemas geométricos, y por las sólidas y elegantes demostraciones; pero mucho mas célebre é ilustre por sus ingeniosas y doctas *Divinaciones* de la doctrina sobre los lugares sólidos de Aristeo, y del quinto libro de los cónicos de Apolonio, en las quales compitió de algun modo con el ingenio, y con el saber geométrico de aquellos célebres antiguos, y mereció tambien de los modernos el glorioso nombre de sumo geómetra, que los griegos daban á Apolonio; pero ninguno de estos italianos y franceses podia aspirar á la gloria de sentarse al lado de los dos príncipes de la geometría de aquel tiempo, Cartesio y Fermat.

Cartesio. Tenia Cartesio tal superioridad en esta ciencia, que como por juego y entretenimiento resolvia los problemas, que ponian en confusion á los otros geómetras. Sus métodos eran la admiracion de quantos eran capaces de conocerlos, y servian de guia á él, y á sus sequaces para correr nuevas regiones no vistas hasta entonces, y para internarse en descubrimientos

no

no tentados por los anteriores geómetras. Jamas se ha remontado tanto la geometría como quando Cartesio aplicó á ella el álgebra para la teoría y conocimiento de las curvas. Una expresion algebráica se ha hecho un quadro vivo y parlante, que en breves y claros rasgos, presenta á la vista las propiedades de una curva; los problemas mas complicados y [illegible]osos se reducen á una fácil y clara sencillez, expedicion, extension, y generalidad. Nuevos métodos para la resolucion de los problemas planos; adelantamientos notables de la doctrina de los antiguos sobre los lugares geométricos; fórmula general para las equaciones de las secciones cónicas, sea la que se fuese la posicion de la base, á la qual se refieren; invenciones de nuevas curvas honradas con su nombre, llamadas *óvalos de Cartesio*, útiles para la teoría de la dióptrica y catróptica; elevacion al grado de geométricas de otras curvas, que pasaban por mecánicas; método general para determinar las tangentes, fecundo de muchas y sublimes teorías, y aplicable á las mas arduas é importantes questiones; y otros muchos nuevos y útiles

les

les hallazgos hacen á Cartesio creador, por decirlo así, de una nueva geometría, y á sus tres libros, y los otros escritos suyos pertenecientes á estas materias, el mas precioso depósito de verdades algebráicas y geométricas. No hay parte alguna de la geometría á la qual Cartesio no haya acarreado alguna particular ventaja. Los argumentos mismos, que no habian sido tratados por él, recibian tanta luz de sus principios, que de ellos podian deducirse con bastante facilidad; y tuvo razon para decir al fin de su geometría, que esperaba poder merecer el reconocimiento de los posteriores, no solo por las cosas que habia explicado, sino tambien por las que habia omitido cuidadosamente para dexarles el gusto de encontrarlas (a).

Fermat. Al mismo tiempo que Cartesio, trabajaba Fermat casi con igual provecho en el adelantamiento de la geometría. Quando él vió por primera vez la geometría de Cartesio, se admiró de no encontrar en ella tratada la qüestion tan importante, no solo en la geometría pura, sino tam-

(a) *Geom.* lib. III.

tambien en las matemáticas mixtas, de los *máximos*, y de los *mínimos*, esto es, la que determina los puntos, en que una magnitud, que varía creciendo y decreciendo, llega á ser la mas grande, ó la mas chica que sea posible; y como él habia trabajado mucho, y con mucho provecho en esta investigacion, quiso publicar su ingenioso método, que á una fácil sencillez juntaba una suma fecundidad, y que ha merecido los mayores elogios de los geómetras posteriores. A este unió otro método no menos ingenioso para encontrar las tangentes en las curvas; y tambien otro para la construccion de los lugares sólidos. No pudo llevarlo con paciencia Cartesio: acostumbrado, como estaba, á recibir adoraciones, y á no sufrir cosa alguna que contradixese sus glorias, se opuso desde luego á las reglas de Fermat, queriendo hacerlas comparecer inutiles, y aun falsas, y encendió de este modo la guerra entre aquellos dos consumados geómetras, que puso tambien en armas á casi todos los otros. Si en toda la Francia habia algun geómetra capaz de entrar á competir en el mérito matemático con Cartesio, era indubitablemente Fermat. Ademas de la gloriosa invencion de los métodos antes alabados, pasó él á encontrar otro para los centros de gravedad, y se aplicó tambien á la medida de muchas curvas harto complicadas, reduciendola con ingeniosas transformaciones á la del círculo, y de la hipérbola. Su método de los *máxîmos*, y de los *mínimos* pudo de algun modo abrir el camino al cálculo diferencial, y casi se ve igualado por Leibnitz, en la utilidad para el adelantamiento de las matemáticas, á la aplicacion del álgebra á la geometría de Cartesio (*a*): aun por lo que mira á esta aplicacion habia concebido ingeniosamente Fermat, al mismo tiempo que Cartesio, la idea de expresar la naturaleza de las curvas por medio de las equaciones algébricas, y llegó á dar de ella algun ensayo (*b*); Fermat en suma tenia justo derecho para querer sentarse al lado del gran Cartesio, y adquirirse igualmente

(*a*) *Act. Lips.* an. 1693. (*b*) *Isag. Topic.* &c. *App. ad Isag.* &c.

te que él muchos partidarios y sequaces. Roberval como amigo de Fermat, y como contrario de Cartesio, fué uno de los mas adictos á las sólidas teorías del geómetra su amigo, y reprehendió tambien á Cartesio, á veces no sin razon, como que impugnaba una teoría, que no la tenia bastante exâminada. Pero sin embargo los partidarios de Cartesio fueron muchos mas, y su geometría, y sus cartas llenas de descubrimientos, y de luces geométricas han tenido mayor influxo en los progresos de las ciencias, que las doctas obras, y los útiles inventos de Fermat. Basta ver en la edicion de la geometría cartesiana, hecha por Schooten en 1695, los famosos nombres de sus comentadores é ilustradores, para conocer los progresos que ella hizo en poco tiempo entre los buenos ingenios. Beaune, Schooten, Hudde, Heuraet, Wit, ya bastante célebres é ilustres por sus propios descubrimientos, se han dedicado sin embargo á promover y propagar los del gran Cartesio, y todos juntos concurren con mucha gloria suya á magnificar, y aumentar la de su soberano maestro. Pero ademas de estos ¿quantos otros doctos matemáticos no emplearon sus fatigas en hacer mas comunes á la inteligencia universal los descubrimientos geométricos de Cartesio? Entre ellos se distinguió Rabuel con particular mérito de claridad y de solidez. Los métodos para las tangentes, y para las qüestiones de los máxîmos, y de los mínimos de los dos príncipes de la geometría, Cartesio y Fermat, se hicieron mas fáciles, y mas expedítos en las manos de Hudde, de Sluse, y de Huingens. La construccion de los lugares geométricos habia recibido de Cartesio una fórmula general, pero que estaba sujeta á muchos embarazos: Craig inventó nuevas fórmulas, que facilitaron dicha construccion. Y así todas las partes de la geometría se ilustraban mas y mas, y adquirian gloriosos y útiles adelantamientos con las obras de aquellos dos maestros, y de sus doctos sequaces.

Quando estos dos franceses se disputaban el principado en la geometría, el Gregorio de san Vicente. flamenco Gregorio de san Vicente, sin entrar en tal pretension, esparcia infinito número de nuevas verdades, de pro-

fun-

fundas ideas, de extensas investigaciones, de principios fecundos, de métodos generales, y con una obra escrita sobre un asunto, que se habia hecho muy despreciable, esto es, con una obra sobre la quadratura del círculo enriquecio con nuevas luces la geometría, y merecio que Leibnitz lo pusiese al lado de Cartesio, y de Fermat, para formar el triunvirato geométrico, y que aun de algun modo le quisiese dar la primacía sobre los otros dos. Este ingenio vasto, profundo y original, se aplicó con infatigable estudio, por espacio de veinte y cinco años, á la investigacion de la inasequible quadratura del círculo, y se internó animosamente en todos los caminos mas asperos é intrincados, que le parecia pudiesen conducirlo á obtenerla. Pensó primero en la espiral; y sino encontró en ella el verdadero medio de la buscada medida, tuvo sin embargo alguna recompensa con el feliz descubrimiento de la concordia, y conformidad, y, como él dice, *simbolizacion* de la espiral con la parábola, demostrando que la espiral es una parábola envuelta, y la parábola una espiral desenvuelta. De la

es-

espiral pasó á la quadratriz, y la formó de tantos modos nuevos, y demostró tantas propiedades suyas, que nos hubiera dado un buen tomo sobre esta curva, si un incendio, acaecido en la toma de Praga por los Saxones, no lo hubiese abrasado. No viendo por estos medios el deseado exîto, se aplicó á las secciones cónicas: y aquí fué donde despues de muchas vueltas y revueltas creyó finalmente hallarla, y donde tuvo ciertamente la venturosa suerte de encontrar los mas apreciables descubrimientos. ¿ Quantas conformidades y correspondencias no descubrió entre la hipérbola y la parábola, entre esta y la espiral, entre la uña cilíndrica y la esfera, y entre casi todas las figuras geométricas? Entonces puede decirse que nació la geometría comparada, que puede mirarse como la llave de las invenciones geométricas, y de las mas recónditas verdades. Solo el descubrimiento de la bellísima é importante propiedad de la hipérbola inmediata á una asintota de tener los espacios comprehendidos entresí, creciendo aritméticamente, quando la abscisa crece geométricamente, y de ser des-

despues el logaritmo de esta abscisa, basta para que quede suficientemente recompensado de las fatigas empleadas en aquellas investigaciones. Muchos ingeniosos y expedítos modos de quadrar la parábola, y tambien la hipérbola, la medida de muchos cuerpos no medidos hasta entonces, muchísimos importantes y curiosos descubrimientos sobre las progresiones geométricas, é infinitas novedades sobre todas las partes de la geometría son frutos de su intenso estudio sobre la quadratura del círculo. Inflamada la fantasía, y llena de tantos descubrimientos creyó ver igualmente la deseada quadratura: pero ¿que nos importa este deslumbramiento suyo, quando nos hace gozar de tantas brillantes luces, y de tantas utilísimas verdades, y nos produce una de las mas ricas y preciosas obras de la antigüedad, y de la moderna geometría? Uno de los admiradores de Gregorio de san Vicente, y el mas célebre impugnador de su quadratura del círculo, su mas justo rival, el único digno de sucederle en la gloria geométrica, fué el holandes Huingens, el qual en la geometría cartesiana, Huingens.
no

no menos que en la antigua, se ha adquirido un lugar singularmente distinguido. Ya en su juvenil edad las observaciones sobre la geometría de Cartesio, la impugnacion de la pretendida quadratura de Gregorio de san Vicente, y los ingeniosos descubrimientos sobre las aproxîmaciones del círculo, hicieron que fuese mirado como un consumado geómetra. Pero quando se elevó á la dimension de las superficies curvas de las conoydes, y de las esferoydes, quando dió su método para reducir las rectificaciones de las curvas á las quadraturas, quando determinó la medida de la cisoyde, y sobre todo quando entrando á hacer anatomía de la logaritmica, á exâminar las areas, las tangentes, los sólidos, los centros de gravedad, y todos sus efectos, hizo sobre cada uno de ellos muchos é importantes descubrimientos, y mas aun quando enriqueció las matemáticas con la teoría de las *evolutas*, que será siempre mirada como uno de los mas grandes y mas fecundos descubrimientos de la geometría, y descubrió con ella, que la cicloyde forma desenvolviendose una cicloyde igual, pues-

puesta no obstante en situacion inversa; y con la misma, llegó á rectificar varias curvas, á determinar las tangentes, y á encontrar muchas verdades ocultas á los demas geómetras; entonces fué realmente reconocido por consumado geómetra, venerado de todos como maestro de la geometría, igualmente que de la mecánica, y de la astronomía, proclamado universalmente por uno de los mas sublimes ingenios que hubiesen producido las matemáticas, y, lo que es tal vez mas de estimar, venerado del gran Newton sobre todos los otros geómetras, y alabado singularmente por él como el mas elegante de todos los modernos, y el mas digno imitador de los antiguos (*a*).

Quando en el continente de Europa se trabajaba con tanta actividad para adelantar la geometría, en la isla de Inglaterra se conducia á largos pasos á su perfeccion. Aquella sola isla producia tantos ilustres geómetras, y daba á luz todos los dias tantos sublimes descubrimientos, que competia, y aun tal vez supe-

(*a*) *In Vita Newtoni* ad extrem.

raba ella sola á todo el resto de la culta Europa en procurar mejoras y ventajas á los estudios geométricos. Gran salto le
Wallis. hizo dar Wallis con su aritmética de los *infinitos*, ó con su particular aplicacion del cálculo al método, conocido ya de los italianos, y de los franceses, de los indivisibles, é infinitos. Con esta se puso en estado de medir muchas figuras, á las quales no habian llegado los otros geómetras, y de sujetar á la exâctitud de la geometría muchísimos objetos, que hasta entonces se le habian escapado. Los problemas de la cicloyde, que con tanto enfasis proponia Pascal, fueron todos resueltos por él en poquísimo tiempo, y con mucha facilidad. Pareciale á Cartesio enteramente imposible la rectificacion de una curva: la aritmética de Wallis conduxo á Neil á encontrar una, y despues Wren y Van Heuraet rectificaron otras curvas, y mas adelante Huingens con sus evolutas dió un método para rectificarlas casi todas. Las ingeniosas operaciones de Wallis para la quadratura del círculo produxeron el método de las *interpolaciones*, que tomaron su nombre, y muchos las llaman *Wallisianas*, y se ven usadas con freqüencia en la geometría: las mismas hicieron nacer igualmente el glorioso descubrimiento de Brounker de la *fraccion continua*, de que hemos hablado antes, y su serie infinita para expresar la area de las hipérbolas, la primera que se haya encontrado, aunque no publicada, para este objeto. A la aritmética de los infinitos de Wallis debemos tambien de algun modo la *logaritmotecnia* del aleman Mercator, establecido en Inglaterra, en la qual quadraba tambien las hipérbolas, y despues sacaba la construccion de los logaritmos: á la misma se debe tambien la útil invencion del así llamado *binomio newtoniano*; á la misma puede de algun modo referirse el principio del grande hallazgo del cálculo infinitesimal; y generalmente podrá decirse que la geometría es deudora á Wallis, no solo de sus descubrimientos, por sí mismos bastante útiles é importantes, sino tambien de los que produxeron los otros geómetras. Quando Wallis, Neil y Brounker, ennoblecian y hacian digna de la estimacion de toda la Europa la geometría inglesa;

 quan-

quando el aleman Mercator, establecido en Inglaterra, contribuia tambien á aumentar su esplendor, florecian allí igualmente Barrow, que explicó en sus *lecciones* tan profundos y útiles conocimientos sobre la dimension, y sobre las propiedades de las curvas, y dió un método para las tangentes, que abria un espacioso camino para llegar al cálculo diferencial; y Gregori, no menos excelso en la geometría que en la óptica, y digno rival del gran Newton en una y en otra, que encontró muchos teoremas curiosos y útiles para la rectificacion de las curvas, y para la transformacion y quadratura de las figuras curvilíneas, y generalizó otras muchas; que no contento con demostrar la imposibilidad de la rigorosa quadratura del círculo, procuró buscar la mas inmediata aproximacion, y la aplicó ingeniosamente á la hipérbola, que él no separa jamas del círculo, con quien conviene en tantas ánalogas propiedades, é inventó una serie infinita para expresar el area del círculo; demostró de un modo nuevo la quadratura de la hipérbola de Mercator, y enriqueció con nuevos mé-

Barrow.

Gregori.

métodos y con nuevas verdades la geometría. De este modo podia la Inglaterra gloriarse de tener un Wallis, un Brounker, un Mercator, un Barrow, un Gregori; la Italia habia producido los Galileos, los Torricellis, los Cavalieris, los Vivianis; la Flandes y la Holanda se jactaban de tener á un Gregorio de san Vicente, y un Huingens, la Francia se ensoberbecia de haber producido á Vieta, Roberval, Cartesio y Fermat, y por todas partes se veian excelentes geómetras quando compareció á la luz del mundo el gran Newton.

Parecia que la naturaleza hubiese querido dar varios ensayos de su poder antes de hacer este último esfuerzo, y que hubiese procurado elevarse á grandes produciones para dar finalmente á luz aquel portento de sublimidad de ingenio, de fuerza de imaginacion, de solidez de juicio, aquel milagro de la naturaleza, aquel ornamento de la humanidad. Geómetra incomparable, superior á quantos le habian precedido, y sin que haya habido despues quien le igualase ha reunido en sí solo todas las prendas de los an-

Newton.

antiguos y de los modernos, juntando la precision, la elegancia, y la severidad de las antiguas demostraciones, con la fecundidad de las invenciones de nuevos métodos para descubrir verdades recónditas, y ha manifestado todos los varios talentos de la invencion, de la demostracion, y del cálculo. Sacó de la doctrina de Nicomedes sobre la concoyde el método de formar las equaciones del tercero y del quarto grado; perficionó el modo de describir la cisoyde inventada por Diocles; resolvió, segun el método de los antiguos, un problema de Apolonio, y lo resolvió con una elegancia, que en vano se busca en las resoluciones que del mismo problema dieron Cartesio, y otros algebristas, y se manifestó dueño y maestro de la antigua geometría, superior á los mismos antiguos en la posesion y señorío de ella. Grandes elogios mereció el ingenio de Mercator, que sujetando á las reglas de Wallis una expresion, que habia sido rebelde á los esfuerzos de este su inventor, encontró una serie infinita, con la qual llegó á quadrar la parábola; pero Newton poseía antes que él un método,

todo, que no solo se extendia á la hipérbola, sino á todas las curvas, no solo á las geométricas, sino tambien á las mecánicas, á sus quadraturas, á las rectificaciones, á los centros de gravedad, á los sólidos formados por sus revoluciones, y á las superficies de estos sólidos (a). Y si era maravillosa su agudeza en imaginar series infinitas, que tuviesen el doble mérito de la convergencia, y de la claridad y facilidad, no causaba menos admiracion su exâctitud y solidez en aplicarlas á las dimensiones de las figuras mas difíciles de encontrarse. El mismo Gregori, que en uno y en otro se habia distinguido singularmente, y por esto al principio se resistia algo á concederle á Newton el principado, reconoció despues todo su mérito, y lo confesó generosamente con los mayores y mas sincéros elogios. Pero por consumado geómetra que compareciese Newton con la invencion y aplicacion de series tan útiles é ingeniosas,

(a) *Anal per. æq.* &c. y *Meth. flux. & Ser. in fin.*

sas, de métodos tan fecundos, y de tan grandes descubrimientos, todo debió ceder á la gloria de la invencion del cálculo de las fluxîones. Entonces no hubo seno oculto y secreto en toda la geometría que no se manifestase claro y patente á su vista perspicaz, no hubo problema dificil é intrincado que él no resolviese con muy expedíta facilidad, ni hubo dificultad que le impidiese elevarse á las mas sublimes especulaciones. Para levantar la gran máquina del sistema del universo, que él estableció en la inmortal obra *De los principios matemáticos*, necesitaba un pleno dominio sobre todos los registros de la mas fina geometría, y lo obtuvo plenísimo su nuevo método de las fluxîones. Rectificar curvas, medir areas, determinar tangentes, encontrar los máxîmos y los mínimos, fixar los puntos de inflexîon, manejar libremente á su arbitrio todas las figuras y las líneas de que se sirve la naturaleza, y combinar infinitas fuerzas, infinitas direcciones, y variaciones infinitas de fuerzas y de direcciones se le hizo á Newton fácil y llano con el auxîlio de este método; y puede decirse con ver-

verdad, que el cálculo de las fluxîones hizo que Newton fuese mirado como el numen de la geometría, y lo elevó sobre los otros hombres en el conocimiento de la naturaleza. Por diverso camino, y baxo diverso aspecto, como hemos dicho arriba (*a*), encontró Leibnitz el mismo método de Newton, y tuvo igualmente parte en los adelantamientos de la geometría: su vasta y viva fantasía, que de los aridos cálculos lo transportaba á las teológicas, históricas, jurídicas y filosóficas meditaciones, no le permitía seguir tranquilamente las huellas de la naturaleza en las varias figuras, ni formar como Newton copiosas y perfectas obras, donde se viesen expuestas y explicadas las abstrusas y recónditas verdades de la mas sublime geometría; se contentaba con señalar métodos, y fixar reglas, y dexar para otros el valerse de ellas para internarse en nuevos descubrimientos; bastabale, como él decia, haber echado las semillas, y se complacía despues viendolas crecer en manos de otros como plantas

 per-

(*a*) Cap. III.

perfectas. Pero sino igualó el mérito de Newton en la aplicacion del nuevo método á muchos y útiles descubrimientos, lo superó en la explicacion y propagacion del mismo en beneficio de la geometría: las pocas reglas expuestas por él en las Actas de Lipsia (*a*), como hemos dicho antes, fueron las primeras lecciones que los geómetras recibieron de aquel cálculo. Con su ingenio, y con su cálculo diferencial se habia puesto Leibnitz en estado de superar las mas graves dificultades, y de resolver los mas intrincados problemas: y en efecto quantos se proponian entonces los resolvia todos con la mayor expedicion. Los dos Bernoullis, viendo la superioridad que en las investigaciones geométricas daba á Leibnitz su cálculo diferencial, quisieron adquirirlo enteramente, y lo poseyeron de modo que pudieron acarrearle notables mejoras. L' Hopital no quedó contento hasta que lo aprendió de Bernoulli y lo comunicó á todos los geómetras. Leibnitz, los Bernoullis y l' Hopi-

Los Bernoullis.

L'Hopital.

(*a*) 1684. y 1686.

pital introduxeron y propagaron de varios modos por toda Europa el cálculo infinitesimal, que Newton con el nombre de cálculo de las fluxiones apenas habia dado á conocer en Inglaterra; y con el auxîlio de este cálculo se hizo variar de aspecto á toda la geometría. Todas las teorías geométricas de los superiores matemáticos fueron entonces llevadas á mayor generalidad, y á mas perfecta exâctitud. Los problemas que antes habian sido inaccesibles á los mayores geómetras, se sujetaron entonces á sus especulaciones. La curva *brachistocrona*, la *catenaria*, la *velaria*, la *elastica*, la curva, por decirlo así, *hisopiestica*, ó bien sea la que en un plano vertical estaría siempre igualmente oprimida en cada uno de sus puntos, por una fuerza igual á la gravedad absoluta del cuerpo que la describe, y otras curvas antes invisibles para los mas agudos geómetras, se dexaron ver entonces por medio de este cálculo. La principal ventaja de la moderna geometría sobre la antigua, es la de tener tales métodos para poder encontrar sin el mayor ingenio verdades mas difíciles con mayor facilidad.

Ventajas de la nueva geometría.

Es gloria de los antiguos el haber hecho muchos descubrimientos sin el auxîlio de nuestros métodos: es loor de los modernos el haber inventado tan proporcionados y poderosos métodos, para hacer otros tanto mayores. De otro modo ¿como hubiera podido Jacobo Bernoulli rectificar jamas, y quadrar la espiral logaritmica, y la loxodromica, desenvolver todas las propiedades de la espiral, y de las curvas que la producen, y que son producidas por ella, establecer su profunda teoría de las curvas que giran al rededor de sí mismas, y hacer tantos otros esfuerzos de valor matemático? ¿Como se hubiera atrevido Juan á engolfarse en las abstrusas especulaciones de los isoperimetros, emprendidas tambien por su hermano Jacobo, del sólido de la menor resistencia, de las trayectorias, de los centros de oscilacion, y de varios otros puntos, que requieren tan grande aparato de sublime geometría? ¿Como hubiera podido Varignon tratar las leyes de los movimientos compuestos, y de las fuerzas centrales directas é inversas, que deben sacarse de los mas recónditos conocimientos de una geometría muy fina, y tratarlas con tanta generalidad, que nada se escapa á sus fórmulas de quanto está en el distrito de las materias que trata? Ésta puede realmente llamarse la verdadera época del glorioso triunfo de la geometría. Huingens, Newton, Leibnitz, los Bernoullis, l' Hopital, Varignon, Tailor, y algun otro semejante hicieron que con la mayor facilidad superase todas las dificultades, que antes habian aterrado á los mas valerosos geómetras. En aquella gloriosa época de la geometría por todas partes se oian hallazgos geométricos, y geométricas mejoras. Causaban mucho estrépito las famosas causticas de Tschirnausen, corregidas por la Hire, y grandemente aumentadas y perficionadas por los Bernoullis. Las epicicloydes descubiertas por Roemero, pero explicadas y desenvueltas por la Hire, ocuparon la atencion de los matemáticos y de los artesanos. Lagni quiso crear una ciencia nueva en su goniometría, de la qual sacaba una trigonometría harto mas sencilla y cómoda que la comun, y adelantó la ciclometría llevando la aproxîmacion de la quadratu-

Otros geómetras.

tura del círculo á una exâctitud, que causaba admiracion á los mas célebres calculadores. Tailor, Maclaurin y Simpson, animados del espíritu de Newton, aplicaron la delicadez y escrupulosidad de su cálculo á las operaciones geométricas, y dieron mayor ilustracion á la teoría de las curvas.

Escuela de Juan Bernoulli.

Pero el mayor lustre y esplendor lo recibió la geometría de la escuela de Juan Bernoulli, de aquel amigo de Leibnitz, de aquel émulo de Newton, de aquel hermano y rival de Jacobo Bernoulli, de aquel maestro no inferior á ninguno, é igual á los mas ilustres geómetras de la antigua y moderna edad. De aquella escuela salieron los príncipes de la geometría, los tres hijos Nicolás, Daniel, y Juan Bernoulli, Herman, Maupertuis, Clairaut, y uno que vale por muchos, el grande Eulero; el mismo d' Alembert que no pudo beber el espíritu de Bernoulli de su boca, lo adquirió por sus escritos, y se profesa abiertamente su discípulo, confesando haberlo aprendido todo de sus obras, y deberle á él enteramente quantos progresos ha hecho en la geometría (*a*). Y he

(*a*) *Eloge de Monsieur Jean Bernoulli.*

he aquí empezarse entonces una nueva y mas ilustre época para la geometría, agitarse mas sutiles investigaciones, y hacer nacer nuevos métodos, formarse mas finas especulaciones, y obligar á crear nuevos cálculos, reforzarse y engrandecerse con tales auxîlios la geometría, y sujetar á sus leyes todas las ciencias. El exâmen de las oscilaciones de un péndolo, la teoría de la figura de la tierra, la discusion del problema de los tres cuerpos conduxeron á Clairaut á determinar nuevas curvas, y á descubrir muchas nuevas verdades geométricas. La idrodinamica de Daniel Bernoulli, su ingeniosa demostracion del principio de la composicion de las fuerzas, y otras obras suyas semejantes se internan en sutilísimas especulaciones, que requieren mayor fuerza de cálculo geométrico, de lo que se conocia entonces, y nos presentan en efecto esparcidos acá y acullá nuevos métodos, y observaciones importantes sobre los métodos ya conocidos, con que poder afinar mas y mas el cálculo, é internarse mas en los misterios de la geometría. El problema de las cuerdas sonoras, aunque

Clairaut.

Daniel Bernoulli.

que no tan grave en la apariencía, aun despues de Tailor y otros geómetras de principios de este siglo, ha ocupado en nuestros dias á Daniel Bernoulli, Eulero, d' Alembert, la Grange y á los mas profundos matemáticos de la Europa, y ha hecho nacer importantísimos hallazgos en el álgebra, y en la geometría. Deben á d' Alembert nuevas luces la rectificacion de las secciones cónicas, la quadratura de las curvas superiores, la quadratura de las superficies de los conos obliquos, y otros muchos puntos de geometría sublime. Sus profundas investigaciones mecánicas, é idrostáticas sobre las leyes del equilibrio, y del movimiento de los cuerpos, sobre las causas de los vientos, sobre la precedencia de los equinoccios, sobre la presion, y sobre el equilibrio de los fluidos, sobre la vibracion de las cuerdas sonoras, y sobre tantos otros puntos dificiles, lo han conducido á mirar baxo un nuevo aspecto las figuras geométricas, y regular de un modo nuevo los cálculos geométricos, y le han hecho inventar nuevos métodos para descubrir toda clase de verdades geomé-

D' Alembert.

métricas y físicas. Pero Eulero ha sido el que mas ha promovido la analisis, y ampliado los confines de la geometría. No se puede estudiar parte alguna de esta ciencia, donde no se vea campear á Eulero como inventor de nuevas teorías, y como promovedor de las de otros. Fagnani con singular sagacidad de ingenio determinó los arcos de elipse ó de hipérbola, cuya diferencia es igual á una cantidad algebráica. Eulero despues ha enriquecido mucho este nuevo ramo de conocimientos geométricos. Juan Bernoulli, Maupertuis y Nicole, habian propuesto métodos para encontrar curvas rectificables baxo las superficies de la esfera: Eulero dió á este problema mayor extension, y le añadió tambien métodos para las superficies curvas, cuyas partes correspondientes á las partes de un quadrado son iguales entre sí. El cálculo de las diferencias finitas, apenas indicado por Tailor y por Nicole, y el de las diferencias parciales inventado por d' Alembert, deben á Eulero su perfeccion, y la ventajosísima aplicacion que despues se ha hecho de ellos á los mas sutiles puntos

Eulero.

de la geometría. El inventó el cálculo de los senos y de los cosenos, con el qual se facilita la solucion de los problemas, que sin este auxîlio se deberian abandonar: él encontró un método ingeniosísimo para resolver el problema de los isoperimetros en su mayor extension, á lo qual no habian llegado ni los mismos Bernoullis: y si la Grange supo aun darle un grado de perfeccion que le faltaba, él lo recibió desde luego, y lo presentó en su mayor esplendor. El ha sido el primero que haya explicado la teoría general de las superficies curvas, é igualmente la de los radios osculadores de estas superficies. El ha hecho utilísimas investigaciones sobre las trayectorias recíprocas, sobre el sólido de la menor resistencia, sobre la curva de la mas veloz descension, y sobre todos los otros puntos de la geometría. Así que puede con razon decirse que á Eulero debe esta ciencia el notable engrandecimiento, en que ahora se ve en tantas de sus partes, y, lo que debe serle aun mas apreciable, el verse reynar sobre todas las otras disciplinas matemáticas, sujetas todas á su irresistible cálculo.

Todos estos sublimes geómetras, y quantos florencian entonces con mayor fama de ingenio, todos se dedicaban á la analísis algebraica, todos respiraban cálculo, y no se veia mas que números, y signos algebráicos. Entre tanto Boscovik, geómetra no inferior á ninguno, pero no tan propenso á los cálculos analíticos, quiso sostener la abandonada sintesis, y sujetó á sus leyes aquellos mismos problemas, que se creian superiores á ella, y solo obedientes á la analisis algebráica. No contento con haber auxîliado á la geometría con algunos descubrimientos particulares sob re las secciones cónicas, y sobre la trigonometría esferica, quiso honrarla demostrando por medio solo de sus líneas y figuras aquellas profundas y recónditas verdades, que solo parecian demostrables con el auxîlio de los cálculos analíticos, y aplicando felizmente á la física, á la óptica, y á la astronomía sus científicas soluciones, esparció mucha luz sobre aquellas ciencias, y en todas hizo resplandecer, como dice de la Lande (*a*), el

Boscovik.

(*a*) *Notice &c. Journ. Encycl. Mai* 1787.

ingenio mas raro para la geometría. Pero sin embargo Boscovik no ha encontrado muchos sequaces. La Grange, la Placе, Condorcet, y todos los geómetras que reynan al presente en las matemáticas, han abrazado el exemplo de los Bernoullis, de d' Alembert, de Eulero, y quieren mas seguir las fecundas teorías de la analisis, que las seguras, sí, pero difíciles y largas exposiciones de la sintesis. Pero los intensos estudios que ahora se hacen para el adelantamiento del cáculo analítico, los nuevos métodos que se buscan para mejorar sus operaciones, todo tiene por objeto la facilidad de las resoluciones de los problemas geométricos, la seguridad del manejo de las curvas, la perfeccion de la geometría; la mecánica, la astronomía, y todas las ciencias, que requieren alguna exâctitud, se sujetan al cálculo, pero para entrar por su medio en el asilo de la geometría; y se ve á esta dominar como reyna, y árbitra en todas las ciencias. No obstante esto quisieran algunos que en medio de tanto ardor de cálculo y de álgebra, se introduxese mas estudio de pura geometría, y que mientras el cálculo abre el camino, y

La Grange y otros geómetras.

y facilita los descubrimientos, se dedicase la geometría á dar evidencia, y fuerza de convencimiento á las demostraciones exâctas. El extravagante, sí, pero tambien muchas veces juicioso, y siempre ingenioso Castel, teme que el empeño que toman todos ahora por el cálculo sea en perjuicio de la misma geometría, para cuyas ventajas debia servir, y que como las tropas auxîliares en los exércitos romanos, que mientras no fueron mas que auxîliares, y un tercio á lo mas de las legiones romanas, contribuyeron al engrandecimiento del poder romano, y á la conquista del universo; pero quando llenaron los exércitos, y fueron mas que las legiones romanas, las conduxeron al precipicio, y las destruyeron enteramente; así el cálculo, que mirado como un auxîlio de la geometría ha sido sumamente ventajoso para sus adelantamientos, tomado como principal causará la ruina de la geometría, llenará la mente de signos y caractéres algebráicos, que nada representan á la imaginacion, y la privará de la claridad, belleza y actividad de la luz geométrica. Y por esto quisiera él que se com-

combinasen, se uniesen y se hiciesen marchar juntos, geometría y cálculo, como tropas legionárias y auxîliares; que sirviese el cálculo para batir la estrada, y hacer excursiones, pero que quedáse para la geometría el esplendor de la victoria; que se usase del cálculo para bosquejar las ideas y seguir las individuaciones, pero que el mérito del descubrimiento, el cuerpo de la doctrina fuese todo obra de la geometría (*a*). Nosotros conformandonos con los deseos de aquel zeloso geómetra, de una perfecta é íntima union del cálculo con la geometría, y dexando para los geómetras el señalar á uno, y á otra las partes que mas les corresponderán, pasarémos á seguir el curso de las otras partes de las matemáticas mixtas, y empezarémos por la mecánica.

CA-

(*a*) *Pref. all' Opera dello Stone del Calc. int.*

CAPITULO V.

De la Mecánica.

Origen de la mecánica.

Si los antiguos inventores de los instrumentos y de las artes mecánicas hubiesen reflexîonado sobre los principios, de donde fueron insensiblemente conducidos á tales inventos, y los hubiesen expuesto á la comun inteligencia, tal vez en poco tiempo se hubiera formado de la mecánica una ciencia bastante perfecta. ¿Quantos conocimientos y quantas teorías no requieren la formacion y el manejo de cada instrumento mecánico, y las mas pequeñas operaciones de cada arte? Pero aquellos inventores, á veces por un íntimo sentimiento, y un movimiento dirigido por el propio genio, ó por una confusa y no bien clara razon, á veces, tal vez por casualidad, se encontraron con aquellos hallazgos, como tambien ahora vemos suceder comunmente á nuestros artífices en semejantes inventos, y no fueron conducidos á ellos por fundados principios, por ideas generales y reflexas, por es-combinasen, se uniesen y se hiciesen marchar juntos, geometría y cálculo, como tropas legionárias y auxîliares; que sirviese el cálculo para batir la estrada, y hacer excursiones, pero que quedáse para la geometría el esplendor de la victoria; que se usase del cálculo para bosquejar las ideas y seguir las individuaciones, pero que el mérito del descubrimiento, el cuerpo de la doctrina fuese todo obra de la geometría (a). Nosotros conformandonos con los deseos de aquel zeloso geómetra, de una perfecta é íntima union del cálculo con la geometría, y dexando para los geómetras el señalar á uno, y á otra las partes que mas les corresponderán, pasarémos á seguir el curso de las otras partes de las matemáticas mixtas, y empezarémos por la mecánica.

CA-

(a) *Pref. all' Opera dello Stone del Calc. int.*

CAPITULO V.

De la Mecánica.

Si los antiguos inventores de los instrumentos y de las artes mecánicas hubiesen reflexîonado sobre los principios, de donde fueron insensiblemente conducidos á tales inventos, y los hubiesen expuesto á la comun inteligencia, tal vez en poco tiempo se hubiera formado de la mecánica una ciencia bastante perfecta. ¿Quantos conocimientos y quantas teorías no requieren la formacion y el manejo de cada instrumento mecánico, y las mas pequeñas operaciones de cada arte? Pero aquellos inventores, á veces por un íntimo sentimiento, y un movimiento dirigido por el propio genio, ó por una confusa y no bien clara razon, á veces, tal vez por casualidad, se encontraron con aquellos hallazgos, como tambien ahora vemos suceder comunmente á nuestros artífices en semejantes inventos, y no fueron conducidos á ellos por fundados principios, por ideas generales y reflexas, por es-

Origen de la mecánica.

estudiadas teorías ; y sean los que se fuesen sus conocimientos sobre estas materias, no han sido expuestos por ellos, y comunicados á los otros, ni han podido servir para formar un cuerpo de doctrina, y establecer una ciencia de la mecánica.

Mecánicos griegos. Esta reconoce, como todas las otras, su principio de los griegos, y puede contar entre ellos no pequeños adelantamientos. Archîtas, aquel famoso mecánico de la antigüedad, el qual hizo máquinas tan portentosas, que han sido celebradas por todos los posteriores, fué el primer geómetra, que, segun el testimonio de Laercio (*a*), trató la mecánica, no por mera práctica, sino valiendose de los principios matemáticos, y el primero que conduxo ó reguló el movimiento instrumental ó mecánico con figuras geométricas, el primero en suma que de algun modo pueda llamarse mecánico, en el sentido que en el presente tratado tomamos este nombre. Aunque en todos aquellos tiempos no haya podido encontrar

no-

(*a*) *In Archita* dice realmente Ταῖς μηχανικαῖς ἀρχαῖς ; pero parece que deba decir μαθηματικαῖς.

noticia de otro geómetra, que escribiese sobre la mecánica, sin embargo es preciso que haya habido algunos, y que las especulaciones mecánicas ocupasen el estudio de muchos matemáticos; puesto que ya en tiempo de Aristóteles se contaba la mecánica entre las partes de las matemáticas, que se fundan en la geometría (*a*); y él mismo mas precisamente determina á que parte de la geometría pertenezca, y la reduce á la que trata de los sólidos, ó la estereometría (*b*). Pero sin embargo parece que no se adelantaron mucho los conocimientos de los antiguos en esta parte, quando vemos que los problemas de Aristóteles, el único monumento de los escritores de aquella edad, donde podemos recoger algun indicio de su pericia teórica en la mecánica, refieren tan insubsistentes y absurdos discursos, que nos hacen creer no haberse aun manifestado en su tiempo ni los primeros principios de aquella ciencia. Por lo qual no habia motivo para que Vossio se admirase de no ver citada la obra de Aris-

 tó-

(*a*) *Anal. prior. I.* (*b*) Ibid.

tóteles por Archîmedes, ni por los otros mecánicos posteriores (*a*).

Archîmedes.

Así que sin disminuir injustamente la gloria de los antiguos matemáticos podremos reconocer como primer maestro, y creador de la mecánica al grande Archîmedes, á quien debemos los verdaderos principios de la estática, y aun de la hidrostática. Célebres son en la historia sus muchas y portentosas máquinas, con las quales no solo promovió y acrecentó las artes mecánicas, sino que pudo hacer frente, y contener, aunque hombre solo é inerme, al irresistible poder de las esquadras romanas. Infinitos son los inventos que los antiguos reconocian por de Archîdes; y Pappo (*b*), refiriendonos el de mover con una supuesta potencia un supuesto peso, qualquiera que sea, con lo qual pudo decir: dadme un sitio donde pueda ponerme, y moveré todo el globo terráqueo, la llama la quadragesima invencion mecánica de Archîmedes; pero entre estas invenciones no son las mecánicas las que

(*a*) *De Scient. Math.* cap. XLVIII.
(*b*) *Coll. Math.* VIII.

que constituyen su verdadera gloria. Su mayor mérito entre los matemáticos consiste en haber con su divino ingenio descubierto, y fixado los principios y fundamentos de aquella ciencia. El demostró el gran principio fundamental, que dos pesos en equilibrio en los brazos de una balanza son recíprocamente proporcionales á sus distancias del punto de apoyo; él fundó solidamente la estática sobre la ingeniosa idea del centro de gravedad, buscó este centro en diferentes figuras, é hizo utilísimas aplicaciones, él en suma creó la mecánica. Las muchas y útiles máquinas inventadas, y executadas por él le adquirieron los elogios y la veneracion de su siglo; pero las doctas obras, las sólidas verdades, y los exâctos principios hallados y explicados por él, han contribuido harto mas á la gloria de su nombre, y á la instruccion de la posteridad. Así que con razon podemos reconocer á Archîmedes por el verdadero padre de la mecánica. Ademas de Archîmedes cita Vitrubio (*a*) un Diades, un Ninfodoro, un

Otros griegos.

(*a*) Lib. VII. *Præf.* & all.

un Difilo, un Cáridas, y algunos otros escritores griegos, que trataron aquella ciencia, y (*a*) nos describe algunas máquinas, y algunos inventos de Ctesifonte, de Ctesibio y de otros griegos, que hacen ver los vastos y varios conocimientos, y el genio activo é inventor de aquella docta nacion. Quedan aun para monumento de su saber algunos escritos de Ateneo, coetáneo de Archîmedes, de Eron, celebrado de todos los antiguos en la mecánica, de Filon bizantino, de Biton, y de algun otro, donde se refieren muchos inventos de estos mismos, y de varios otros mecánicos griegos, y se nos da alguna idea del estudio y adelantamiento que se habia hecho en la Grecia en esta, como en todas las otras disciplinas matemáticas. Pero nada nos hace concebir mejor idea del estado de los conocimientos mecánicos entre los matemáticos griegos que el octavo libro de las colecciones de Pappo. Allí se ve como estos no solo habian conocido y estudiado profundamente la mecánica *quirúrgica* ó manual, y esta en infi-

(*a*) Lib. X.

finitas especies suyas, sino que tambien se habian internado en la racional, y que de todas las operaciones de la manual habian investigado las demostraciones matemáticas. Archîmedes es justamente mirado por Pappo como el numen de la mecánica, que con la eficacia de su superior ingenio llegó á conocer las razones y las causas de todas las máquinas, de sus fuerzas, y de sus efectos. Eron escribió de la palanca, de la cuña, y de las otras potencias ó facultades, á las quales se reducen todas las máquinas, aun de nuestros dias, y describió en particular varias máquinas no conocidas, que proporcionaban comodidad y facilidad para el movimiento de los pesos. El mismo Eron, y Filon demostraron la razon por la qual todas estas cinco potencias, aunque de figura muy diversa, se reducen á una sola naturaleza; y particularmente Eron no solo explicó doctamente la arriba citada quadragesima invencion de Archîmedes, y manifestó claramente la construccion de aquel problema, sino que expuso muchos problemas utilísimos y convenientes para los usos, y para las comodidades de

Pappo. de la sociedad. El mismo Pappo contribuyó no poco á los progresos de la mecánica, y puede decirse con verdad que á él mas que á ningun otro griego, despues de Archîmedes, se deben los adelantamientos de aquella ciencia. Porque dedicándose á discutir toda la parte geométrica de la mecánica, no solo reduxo á mayor fuerza, y á razones mas exâctas los teoremas conocidos y explicados ya por los antiguos, sino que él mismo encontró algunos de muchísima utilidad: y empezando por el centro de gravedad, de donde dependen todas las partes de la mecánica, no se detiene en las cosas ya conocidas, sino que propone otras mas profundas y recónditas, manifiesta el uso que pueda hacerse del centro de gravedad para la dimension de las figuras, doctrina tan importante para la mecánica, y para la geometría, y enseña la gran verdad que las figuras producidas por circunvalacion de una línea, ó de una superficie, son entre sí en razon compuesta de las figuras generatrices, y de las circunferencias descriptas por sus centros de gravedad, de donde se derivan tantos bellos descubrimien-

mientos para la mecánica y geometría. Romanos.

Esta puede decirse que fué toda la mecánica de los antiguos: á las teorías de Archîmedes y de Pappo están reducidos sus conocimientos científicos. Si los romanos adquirieron alabanzas por la invencion, por el manejo, y por la descripcion de algunas máquinas; si algunos griegos y latinos de tiempos posteriores se han distinguido por algun hallazgo mecánico, todo esto debe atribuirse á una práctica artificiosa é ilustrada, y á un ingenioso instinto; pero no basta para acrecentar los conocimientos teóricos, ni para adelantar la ciencia mecánica. Los árabes trabajaron, sí, sobre las obras de Aristóteles y de Archîmedes; pero ó nada supieron añadir á la doctrina de sus originales, ó á lo menos no se han conservado hasta ahora sus descubrimientos. No hablaré pues del latino Vitruvio, que doctamente nos describe muchas máquinas antiguas, ni de los griegos Eliano, Arriano, Mauricio, y otros que trataron de la táctica, ni de Antemio célebre maquinista, y autor de una obra sobre las maquinas maravillosas; ni de Boecio, Ger-

Arabes.

Griegos y latinos posteriores.

ber-

berto, Alberto Magno, Rugero Bacon, ni de algunos otros conocidos por la invencion de alguna máquina; ni de Jordan Nemorario, y Regiomontano, que escribieron geometricamente de los pesos, ni de ningun otro escritor de aquellos siglos. Para ver tratada la mecánica como ciencia exâcta, é ilustrada con nuevas teorías, es preciso descender al siglo XVI. La pasion que entonces habia á los autores griegos hacia que se leyesen, y comentasen no solo las qüestiones mecánicas de Aristóteles, muy estimadas en aquellos tiempos, sino tambien las obras de Archîmedes y de Pappo, que son los verdaderos maestros, y se estudiasen por ellos sus especulaciones geométricas y mecánicas. Ingeniosas son las explicaciones geométricas, que da Pedro Nuñez sobre el movimiento de las naves con remos, y sobre otros puntos mecánicos. Mas de cerca tocó la mecánica Tartaglia, el qual aunque no llegó á encontrar la justa doctrina sobre los proyectiles, puede sin embargo llamarse el primer autor que haya enseñado alguna verdad de la ballística. Mas se internó en aquella ciencia el docto comentador de los

los antiguos Comandino, que dexó un libro de centrobarica, y buscó el centro de gravedad en los sólidos, no buscado por Archîmedes, aunque no supo encontrarlo en muchos; en lo que mereció Lucas Valerio en aquel mismo tiempo mucho mayores elogios de ingenio y de saber. Pero el primero que de algun modo se podia adquirir el nombre de mecánico, no fué otro que el marques Guido Ubaldo, el qual no solo esparció algunas claras luces sobre esta materia en los comentos de la obra de los equiponderantes de Archîmedes, sino que en sus propios libros, embebido como estaba de la doctrina de Archîmedes y de Pappo, empezó á encontrar las verdaderas razones de los fenómenos mecánicos, y á manifestarse mecánico. Entonces puede decirse que empezó á renacer aquella ciencia. Entonces el docto matemático Stevin, no solo verificó la doctrina de los antiguos, y corrigió sus errores, sino que tambien la amplió con muchos descubrimientos suyos, y la enriqueció con muchas nuevas y útiles verdades. Entonces finalmente compareció el gran Ga-

Guido Ubaldo.

Stevin.

Galileo, verdadera lumbrera de la mecánica, y la ilustró con tantos importantísimos inventos, que pudo con razon llamarla una nueva ciencia.

Galileo. Galileo nos hizo conocer el movimiento en todos sus aspectos, movimiento uniforme, movimiento acelerado, movimiento proyectorio, movimiento oscilatorio, movimiento de los graves por línea perpendicular, movimiento de los mismos por planos inclinados, movimiento por el ayre, y movimiento por otros medios con diversas resistencias, en suma el movimiento en todas sus diversas circunstancias, y en sus diferentes combinaciones, y creó de este modo una ciencia, que en realidad era enteramente nueva. No se ha visto en las ciencias una serie tan completa y continuada de sutiles y útiles descubrimientos, como la que presentó Galileo en la doctrina del movimiento. Este fué el primer adelantamiento científico, que empezó á dar á los modernos alguna superioridad sobre los antiguos. El movimiento uniforme, aunque fácil y llano, no era aun bien conocido hasta que lo explicó Galileo, y lo pre-

presentó en su verdadero aspecto. El movimiento acelerado fué para él mas fecundo de bellos descubrimientos, y en una materia, en que no se proferian mas que errores, supo enseñarnos muchísimas verdades. Fué un triunfo suyo el demostrar que la fuerza de gravedad es igual en los cuerpos de peso desigual, y que la velocidad de un cuerpo grave no es á proporcion del peso de dicho cuerpo. Son veneradas de todos los mecánicos sus leyes de la aceleracion de los graves: que el aumento de la velocidad no debe tomarse de los espacios corridos, sino de los tiempos; que el movil correrá el espacio con movimiento acelerado en el tiempo que otro lo pasará con movimiento uniforme de dupla velocidad; que los espacios corridos crecen por números dispares, y son como los quadrados de los tiempos; y así de las otras. La resistencia de los medios le dió campo para otros descubrimientos, y supo señalar las proporciones de las velocidades en móviles semejantes ó desemejantes, en el mismo ó en diversos medios, y fixar algunas leyes de la resistencia de tales medios. Muchísimas son las

 ver-

verdades, no menos útiles que curiosas, que descubrió su agudo ingenio en el descenso por planos inclinados. El encontró que la velocidad del cuerpo grave, ó el ímpetu en el descenso es en razon directa de las alturas ó inclinaciones, é inversa de las longitudes de dichos planos; y deduxo algunas ingeniosísimas y solidísimas paradoxas, tirando en un círculo del extremo del diámetro quantas cuerdas se quiera á qualquier punto de la circunferencia, y tirando al contrario de la circunferencia á la línea horizontal diversos planos, que toquen esta línea, ó antes, ó despues, ó al llegar el diámetro; é hizo aquel grande descubrimiento, que, sin embargo de no haber llegado á la perfeccion, ha sido tal vez el mas brillante vuelo geométrico de que pueda gloriarse la mecánica, esto es, que la línea recta, aunque sea la mas corta no es la del descenso mas pronto, y abrió el camino al hallazgo de la *brachistocrona*, que tanto ocupó á los Bernoullis, y á los mas profundos geómetras. Nuevos méritos acarreó á Galileo el movimiento proyectorio, no bien conocido hasta entonces; y á él debe la ba-

ballística el entrar en la clase de ciencia exâcta. El determinó á una parábola la línea recorrida por el cuerpo arrojado, señaló qual sea el ímpetu de este en qualquiera de los puntos de tal parábola, y manifestó otras muchas utilísimas verdades. La doctrina de Galileo ha sido la guia de los matemáticos posteriores, que han ilustrado la ballística; y los escritos de Blondello, de Belidor, de los Bernoullis, de Maupertuis, de Eulero, y de otros hombres grandes pueden tenerse por frutos, no menos que confirmacion de los descubrimientos de Galileo. No fué menor la gloria que se adquirió Galileo con su doctrina sobre el movimiento de los péndolos. La demostracion de ser la longitud de los péndolos en proporcion duplicada del tiempo de las vibraciones, y la aplicacion de ella para medir la altura de los edificios fué su primer descubrimiento mecánico, que manifestaba ya bastantemente quanta fuese la agudeza de su ingenio para seguir los pasos de la naturaleza. ¿Pero qual no fué la admiracion de los matemáticos al oirle anunciar el isocronismo de las vibraciones de un péndodolo por arcos diversos baxo un quarto de círculo? Por fin al docto Guido Ubaldo, uno de los poquísimos de aquellos tiempos, que fueron capaces de entender tales doctrinas, le pareció esto una increible paradoxa. Pero Galileo en una carta dirigida á él, y despues en los diálogos lo expuso con tal apariencia de verdad, que fué precisa toda la perspicacia del agudísimo Huingens para encontrar una pequeña falta, y para fixar el isocronismo de los péndolos, no en los arcos de círculo, sino en los de las cicloydes. La estática fué reducida por él á un solo principio, del qual deriva todas las propiedades de las máquinas; y este es, que para mover un peso, sea el que se fuese, se necesita una fuerza mayor que el peso, ó si la fuerza es menor, que sea de una velocidad tanto mayor que compense lo menor de la fuerza, principio que falsamente quieren atribuir algunos á Desaguliers, quando tantos años antes lo habia descubierto Galileo. De este toma tambien la Grange (*a*) los dos principios

(*a*) *Mech. anal.* part. I, seo. I.

pios fundamentales del equilibrio, esto es, el principio de la composicion de las fuerzas, y el de las velocidades virtuales, que despues han sido tan fecundos de conocimientos mecánicos. En la centrobarica, aunque tratada por él con sobrada brevedad, supo encontrar utilísimas verdades. Parecia que no pudiese mirar parte alguna de la mecánica sin descubrir en ella verdades no vistas aun por otros. ¿Quantas no encontró en la coherencia de los cuerpos, ó en su resistencia para llevar pesos sin romperse? Si Viviani y Grandi, si Mariote y Leibnitz, si Varignon y Muschembroeck han dado despues mayor extension y perfeccion á esta materia, sin embargo ninguno ha adelantado un paso sino siguiendo las huellas de Galileo. No pudo este dar mas que una ligera mirada sobre la fuerza de la percusion; pero esta sola mirada ¡quantas bellas verdades no le hizo ver para medir dicha fuerza, y para encontrarla infinita, para compararla con la presion, para fixar la diversidad de las percusiones, y para otras curiosísimas propiedades

des! ¡Oxalá hubiese él extendido, y explicado, y no solo bosquexado sus ideas, y hubiese escrito de ella un perfecto tratado! Ha dado sin embargo luces á Bernoulli para ilustrar mas completamente esta materia, y aun en esta parte deberá ser tenido como el primero y verdadero maestro. ¿Que elogios, pues, no merece Galileo, que ha sabido sacar del seno de la naturaleza tantos tesoros de utilísimas verdades encerradas y ocultas por tantos siglos á la penetrante vista de los filósofos y matemáticos? Es una gloria singular y única de Galileo el haber levantado, por decirlo así, de la nada una nueva ciencia, y haber sido no solo maestro, sino padre y creador de la mecánica. Tras las huellas de Galileo se siguió estudiando en Italia esta nueva ciencia tan fecunda de importantes y curiosas verdades. Al mismo tiempo descubrió y probó muchas Baliani; Riccioli, Grimaldi, y otros físicos y matemáticos ilustraron, y confirmaron con muchas nuevas experiencias y razones las doctrinas de Galileo. Mas adelante pasó Torricelli, y enriqueció

Baliani, Riccioli, Grimaldi y otros.

Torricelli.

ció con un nuevo principio la estática, y con otros nuevos descubrimientos la balística, y mejoró en varios puntos, y acrecentó la doctrina de su maestro. Así lo hizo igualmente Viviani, así tambien Borelli, el qúal escribió sobre la fuerza de la percusion, y formó una mecánica animal en su obra bastante docta *De los movimientos de los animales*, y de este modo se fué siempre ampliando la mecánica en la escuela de Galileo.

Borelli.

Entre tanto procuraron los franceses emular tambien en esta parte la gloria de los italianos, se aplicaron á descubrir nuevas verdades, y no quisieron parecer meros sequaces y discípulos de Galileo. Los estudios geométricos, en los quales se habian adquirido tanta gloria, les daban muchas luces para poderse internar con felicidad en discusiones recónditas. De aquí provinieron las profundas qüestiones excitadas entre los matemáticos franceses sobre la posicion del centro de gravedad en algunas circunstancias particulares, y sobre los centros de oscilacion sobre que tanto disputaron Cartesio y Roberval, y en que ambos á dos descubrieron muchas nue-

Franceses mecánicos.

vas noticias, pero no pudieron en todo dar en el blanco (*a*). Roberval fué en este punto muy superior á Cartesio, y se acercó mas á la verdad: dió determinaciones exâctas del centro de agitacion de los sectores y de los arcos de círculo movidos perpendicularmente á su plano, y observó que quando debia buscarse el centro de oscilacion, Cartesio y los otros buscaban solo el de percusion; él se aplicó á varios ensayos mecánicos, y encontró en ellos algunas demostraciones ingeniosas, y descubrió un principio de estática, que despues ha sido de mucho uso, esto es, que dos potencias estarán en equilibrio quando estarán en razon recíproca de las perpendiculares tiradas del punto de apoyo sobre las líneas de direccion (*b*). Mas vastas fueron las disquisiciones mecánicas de Cartesio, quien queria tambien hacerse legislador del movimiento; y se hubiera adquirido mayor gloria, si en vez de despreciar, como lo hizo injustamente (*c*), á Ga-

Roberval.

Cartesio.

(*a*) *Cartes. epist.* tom. III. Mersen. *Cogit. Physic. Math.*

(*b*) Mersen *Harmon. univ.* (*c*) Ep. XCI.

Galileo, hubiese procurado imitarle. Pero por desgracia suya solo pudo encontrar la verdad, quando siguió de algun modo las huellas de Galileo, é incurrió en errores, quando quiso atender á sus propias imaginaciones. Exâminó la estática, y la reduxo, como Galileo, á un solo principio, esto es, que se necesita tanta fuerza para levantar un peso á cierta altura, como para levantar doble á la mitad de aquella altura (*a*). Meditó sobre las leyes del movimiento, y expuso con mas claridad las verdades insinuadas por Galileo acá y acullá, esto es, que subsiste, y continúa perpetuamente el movimiento en la misma direccion y velocidad, entre tanto no sea alterado por algun obstáculo; que todo movimiento se hace siempre por su naturaleza en línea recta, y que no se mueve un cuerpo en línea curva, sino porque algun obstáculo hace variar continuamente su direccion. Pero abandonandose despues á sus principios metafísicos cayó en muchos inescusables ro-

(*a*) Ep. LXXIII, part. I; y *Tract. de Mechan.*

rores. Mérito fué de su sagacidad el pensar en buscar que leyes pudiese seguir la naturaleza en la comunicacion del movimiento. Pero aquí fué donde dexandose llevar de su imaginacion, de que la quietud de los cuerpos sea una real y verdadera fuerza, y que Dios por su inmutabilidad conserve siempre en el mundo la misma cantidad de movimiento, y no observando la justa distincion entre los cuerpos duros, y los elásticos, sino tomándolos todos juntos, estableció leyes para la comunicacion del movimiento, que por la mayor parte son vanas é insubsistentes, que á veces prescriben á los cuerpos duros lo que solo conviene á los elásticos, y con freqüencia dicen lo que para los unos y para los otros es falso y absurdo (*a*). Su mismo fidelísimo sequaz Malebranche, tan adicto á sus doctrinas, despreció primero como falsas estas leyes cartesianas (*b*), y despues procuró de algun modo enderezarlas (*c*); pero jamas

(*a*) *Princip.* part. II. (*b*) *De inq. ver.* lib. VI, cap. ult. (*c*) *Leg. gen. mot. comm.*

mas se atrevió á abrazarlas. El mismo Cartesio en sus cartas habla á veces de estas materias diversamente que en los *principios*, y comunmente con mayor exâctitud y verdad. Pero aun en las cartas presenta tantas ideas falsas é insubsistentes, y á veces juntas con las verdaderas y exâctas, que manifiesta no haber formado jamas otra cosa que un confuso é indigesto bosquexo de la doctrina del movimiento (*a*). Pero de todos modos las tentativas de Cartesio, sino tuvieron la feliz suerte de encontrar las verdaderas leyes de la comunicacion del movimiento, sirvieron para estimular á otros harto mas felices. La real Sociedad de Londres excitó á los mas doctos matemáticos, dentro y fuera de Inglaterra, á buscar las mas sólidas y seguras teorías. Wallis, tan benémerito del álgebra y de la geometría, acarreó tambien grandes ventajas á la mecánica, exponiendo con exâctitud y verdad las leyes de la comunicacion del movimiento, y otras doctrinas sobre estas materias. Wallis.

(*a*) V. Ep. LXXIII, part. II & al.

Wren. rias (*a*). Wren, inventor de algunas ingeniosas máquinas, de algunas teorías é investigaciones mecánicas, y de algunos descubrimientos, particularmente en la mecánica arquitectónica, ilustró tambien las leyes de la comunicacion del movimiento con generalidad, claridad y brevedad.

Huingens. Pero mas que todos contribuyó el célebre Huingens á poner en su verdadero esplendor la doctrina de esta comunicacion; todos tres encontraron por diversos caminos las mismas leyes, que son las verdaderas, y las generalmente recibidas de todos; pero Huingens se extendió tambien á la demostracion de otras nuevas verdades. El hizo ver que siempre que son opuestas las direcciones de los cuerpos movidos, se pierde con el choque alguna parte del movimiento, y no puede decirse con Cartesio, que la naturaleza conserve siempre en ellos la misma quantidad; pero siempre es cierto que el centro de gravedad comun á dichos cuerpos, ó es inmoble, ó se mueve ántes y despues del choque con la misma velocidad, y

(*a*) *Tract. de Motu.*

y que si no es absolutamente invariable la quantidad del movimiento, lo es sin embargo la quantidad del movimiento hácia una direccion. Este descubrimiento, llevado á mucha extension por Huingens, ha sido despues recibido y confirmado con nuevas demostraciones por los geómetras modernos. La ley de la conservacion de las fuerzas vivas, ó como dicen otros, de las fuerzas ascensionales, por la qual el centro de gravedad de un sistema de cuerpos tiene la fuerza para ascender á la misma altura de donde ha descendido, es otro curioso y útil descubrimiento de Huingens. Suya es igualmente la bella é ingeniosa observacion de que si un cuerpo empuja á otro que está quieto, por medio de un tercero de magnitud media entre ambos á dos, le comunica mas movimiento que si lo empuja inmediatamente, y crece siempre mas este movimiento, quanto mas crecen los cuerpos intermedios de magnitud proporcional. La verdad de estos descubrimientos de Huingens, y de las leyes de la comunicacion del movimiento, ha ido siempre confirmandose mas y mas, no solo con las nuevas

vas demostraciones de los matemáticos, sino tambien con las experiencias de los físicos, los quales hacen ver á los ojos lo que Huingens no presentaba mas que á la sutil razon. Los descubrimientos de este consumado geómetra no se han reducido á las leyes de la comunicacion del movimiento; han abrazado mas profundos y mas recónditos objetos. El relox oscilatorio le dió campo para hacer finísimas y sutilísimas especulaciones, á las quales no dudaba dar la preferencia sobre todas las otras suyas (*a*). La primera idea, y aun tal vez la execucion de semejante relox, debe ciertamente referirse al inmortal Galileo, quien en los primeros años de sus sublimes meditaciones pensó ya aplicar el movimiento del péndolo á la medida del tiempo; y en edad mas avanzada escribia á Lorenzo Reali como quien habia encontrado el modo de hacerlo; y él mismo, ó su hijo Vicente, con la intervencion del gran duque Fernando II, hizo construir un relox de péndola á Marcos Treffler, reloxero de aquel gran duque.

(*a*) *Dedic.*

que. Así dice Juan Joaquin Becher (*a*) haberlo oido referir á el célebre Magalotti, testigo en esta parte irrefragable, y al mismo Treffler, que confesaba haber hecho en Toscana el primer relox de péndola, y haber pasado á Holanda un modelo de este (*b*). De lo qual dice Nelli tener un documento particular, que publicará en su *Vida de Galileo*, tan deseada de la república literaria (*c*); y el testimonio de Viviani (*d*), y los de muchos ilustres sugetos, que se leen en las cartas de hombres ilustres, publicadas por Fabroni, y varios otros monumentos hacen de ello plena fé. Así que han querido algunos privar á Huingens de la gloria de original, y ponerle la tacha de plagiario, porque con el rey de Francia, y con los Estados-Generales de Holanda se vendia por inventor (*e*). Pero por verdadera que sea esta relacion de

(*a*) *Experim. nov. curios. de Minera arenaria perpet.* (*b*) V. Nelli *Sagg. di St. Lett. Fior.* &c. (*c*) Ibid. (*d*) *Vita di Gal.*, *y Lett. al Conte Mag.* (*e*) *De Horol. oscillat.* &c. *Dedic.*

de Magalotti y de Treffler, de Viviani y de tantos otros, y por mas que yo no tenga la menor duda en alguna execucion del relox galileano, no me atreveré á acusar de mentiroso y plagiario á un hombre de la agudeza de ingenio, y de la sinceridad de corazon del candidísimo y sutilísimo Huingens. El nos refiere sencillamente la historia de esta invencion suya, y toma ingenuamente el orígen del uso del péndolo, aplicado algunos años antes por Galileo para la medida del tiempo, y adoptado despues por los astrónomos moviendo con la mano el péndolo, y contando sus vibraciones á la vista: ¿por que con igual candor no habia de referir al relox imperfecto de Galileo el orígen del suyo llevado á la debida exâctitud y perfeccion? Esto fué puesto por obra en el año 1657, y en el de 1661 recibió Huingens cartas de París atribuyendo á Galileo la invencion, y él mismo lo refirió desde luego á Nicolás Heinsio, pero protestando religiosamente haberle sido del todo nueva la noticia de este hecho, y no haber tenido antes el menor indicio: *Sancte testatus*,

tus, como el mismo Heinsio escribia á Dati (*a*), *sancte testatus ejus rei cum ignarissimis ignarum se fuisse*. Aunque estas cartas de París, y los sobredichos monumentos, y varios otros que se podrian alegar, prueben suficientemente, que pertenece á Galileo la gloria, no solo de la primera idea, sino tambien de alguna execucion, ó por sí mismo, ó por su hijo, del relox oscilatorio; sin embargo es preciso decir que no salió con mucha felicidad este primer relox, puesto que ni fué entonces ensalzado con las alabanzas de los estudiosos, y de los amigos de Galileo, ni adoptado despues por los astrónomos y por los artistas, ni apenas conocido mas que de muy pocos de la corte del gran duque, y aun estos bien pronto lo pusieron en olvido, hasta que les renovó la memoria el nuevo relox de Huingens. Así que pudo este estar enteramente ignorante de la tentativa de Galileo, pudo probarlo por sí mismo sin nin-

Vv 2

(*a*) *Clar. Belg. ad Ant. Magliab. nonnullosque al.* ep. vol. I.

ningun preventivo conocimiento, pudo poner en duda, y aun negar con alguna razon, que ni Galileo, ni su hijo hubiesen llegado jamas á formar un relox semejante, pudo obtener justamente los elogios de original, y pudo ser realmente el primer inventor. Lo cierto es que el relox de Galileo, caso que se hubiese verificado su construccion, no podia, atendidos los principios de su doctrina, llegar á la deseada exâctitud, y solo despues de los descubrimientos geométricos y mecánicos de Huingens podia esperarse uno perfecto. Creia Galileo, aunque con alguna apariencia de razon, pero sin la necesaria verdad, que fuesen tautocronas las vibraciones de un péndolo por arcos comprehendidos en un quarto de círculo; la geometría de su tiempo no conocia aun la cicloyde; ni podia darle luces bastantes para fixar los centros de oscilacion en los péndolos; para la construccion misma del mecanismo del relox faltaban muchos conocimientos teóricos, y muchas noticias geométricas superiores á quanto entonces se sabia. Huingens perficionó la doctrina de Galileo sobre la aceleracion de

de los graves, y exâminando la propiedad de la cicloyde, entonces tan en uso, encontró que solo en esta, y no en el círculo se harán en el mismo tiempo los descensos por qualquier punto, y que serán solo isocronas las vibraciones del péndolo quando se harán en arcos de cicloyde, no en los de círculo, confesando él mismo, que el descubrimiento de esta propiedad de la cicloyde es fruto de la doctrina de Galileo. No bastaba el esteril conocimiento de esta propiedad de la cicloyde, era menester encontrar el modo de hacer executar en el relox las vibraciones cicloydales. Lo encontró Huingens aplicando el hilo del péndolo á una cicloyde al reves; y esta especulacion lo conduxo felizmente á la sublime teoría de las *evolutas*, que le produxo tantos descubrimientos, y lo coronó de tan sublime gloria. Era menester igualmente determinar la longitud del péndolo, precisa para que cada segundo haga una vibracion, y la determinó Huingens valiendose de la misma teoría de las *evolutas*. Pero no bastaba determinar solo en general dicha longitud, era menester

ter aplicarla, no á qualquier parte del péndolo, sino á su centro de oscilacion; era menester aclarar la hasta entonces obscurísima teoría de los centros de oscilacion. Y he aquí un nuevo campo para hacer Huingens útiles y gloriosos descubrimientos. Cartesio, Roberval y Fabri, estimulados por Mersenno, se habian aplicado á exâminar esta materia; pero habian adelantado muy poco, no habian sabido mirarla por su verdadero aspecto, y confundian el centro de oscilacion con el centro de percusion: solo Roberval llegó á conocer verdaderamente los elementos, que deben entrar en tal investigacion; pero no le bastaron las luces de la mecánica de aquellos tiempos para resolver la qüestion. Huingens, como él mismo refiere (a), fué tambien desde su juventud estimulado por Mersenno á entrar en esta investigacion; pero no supo entonces ni aun encontrar el camino para hacer dicha especulacion. Provisto despues de mayores luces geométricas, y conducido de nuevo á este exâmen por sus meditacio-

nes

(a) *Horol. oscill.* par. IV.

nes sobre las vibraciones de los péndolos, y sobre el deseado relox, la volvió á emprender con mas felicidad: no solo encontró la resolucion de los problemas de Mersenno, que en vano habian buscado los geómetras anteriores, sino que se engolfó en mas profundas investigaciones, se abrió nuevos caminos, se formó mas seguros principios, y descubrió muchas notables verdades sobre los centros de oscilacion, sobre los puntos de suspension, y sobre el verdadero modo de regular las vibraciones del péndolo. La doctrina de Huingens sobre los centros de oscilacion, ha producido despues muchas y muy loables teorías de los Bernoullis, de l' Hopital, de Tailor, de Eulero, de d' Alembert, y de los mas célebres geómetras; y su doctísima obra ha sido fecunda de tantas obras no menos doctas, y tal vez aun mas finas y exâctas. Así al relox oscilatorio debemos un conocimiento mas profundo del descenso de los graves, el descubrimiento de nuevas propiedades de la cicloyde, la doctrina de las evolutas, la teoría de los centros de oscilacion, y un notable mejoramiento, no solo

lo

lo de la mecánica, sino tambien de la mas sublime geometría. La utilísima y sublime doctrina de las fuerzas centrifugas, y de todo el movimiento circular, debe tambien de algun modo su orígen á aquel fecundo relox. La fuerza centrifuga de los cuerpos movidos circularmente ha sido siempre conocida de los filósofos, pero jamas atentamente exâminada por ninguno. Galileo y Cartesio, hablando de los movimientos de los cuerpos celestes, y tratando acá y acullá de la doctrina del movimiento, han insinúado algunas verdades, que manifestaban tener ellos mas claras y justas ideas de tales fuerzas, que las que habian podido formar los filósofos antiguos y modernos. Pero la verdadera noticia de esta fuerza, los verdaderos principios de esta teoría solo nos han venido de las profundas especulaciones de Huingens. Los justos y precisos teoremas que él ha dexado (*a*) son la sólida basa, sobre la qual se ha erigido despues la gran máquina de la ciencia de las fuerzas centrales, á la qual puede decirse reducida la

(*a*) *Horol. oscill.* part. V.

la astronomía, y la mas noble parte del saber humano. Tantos descubrimientos, tantas novedades, tantos méritos, elevó á Huingens al alto honor de segundo padre y maestro de la mecánica, que ha reforzado, acrecentado, y perficionado las doctrinas de Galileo en aquella ciencia, y ha sabido encontrar por sí mismo otras nuevas no menos verdaderas é importantes.

Newton.

Con Huingens, y con Galileo entró á la parte Newton á ser legislador y regulador del movimiento. La gran máquina que tenia en la mente de establecer el curso de los cuerpos celestes, de explicar sus mutuas relaciones, y de descubrir la verdadera constitucion del universo, le presentaba una infinita variedad de fuerzas y de movimientos, y le obligaba á exâminar mas íntimamente las acciones de estas fuerzas, y la naturaleza de varios movimientos. De tres leyes simplicísimas, conocidas ya en parte por otros filósofos, pero por ninguno bastante explicadas, ni aplicadas á muchos de sus usos, esto es, que todo cuerpo persevera en su estado de quietud, ó de mo-

 vi-

vimiento uniforme y directo, sino quando las fuerzas impresas le obligan á mudar aquel estado; que la mutacion del movimiento es proporcional á la fuerza motriz impresa, y que se hace segun la línea recta en que se imprime aquella fuerza; y finalmente que en toda accion hay siempre una contraria é igual reaccion, deduxo él muchísimos corolarios, que dan mucha luz á toda la ciencia del movimiento, y le abren paso para elevarse á fixar los movimientos de la luna, de los planetas, y de los cometas, y á contemplar los inmensos espacios del mundo. Como los cuerpos celestes no descienden por líneas verticales, no corren por horizontales, no se mueven por directas, sino que siguen siempre las curvas, se pone Newton á exâminar profundamente las fuerzas que dirigen estos movimientos, y como, y quando deban hacerse estos, y que efectos puedan convenir á cada uno de ellos. Keplero estableció aquellas dos famosas leyes para los movimientos celestes, que han sido las reguladoras de toda la astronomía, esto es, que los planetas moviendose al rededor

dedor del sol describen areas, que son proporcionadas á los tiempos, y que los quadrados de los tiempos periodicos son como los cubos de las distancias. Newton entra á generalizar estas leyes; prueba que serán proporcionales á los tiempos las areas descriptas por los cuerpos, que giran tirando los radios á un centro inmoble de las fuerzas; que los cuerpos que describen estas areas serán tirados á aquel centro por una fuerza centrípeta; que si describen estas areas tirando los radios al centro de otro cuerpo, de qualquier modo movido, serán tirados por una fuerza compuesta de la centrípeta, y de la fuerza aceleratriz del otro cuerpo; y va exâminando las circunstancias diversas de los cuerpos, que se mueven al rededor de su exe, y demostrando que fuerzas, y de que manera obrarán sobre ellos, qual será el centro, al rededor del qual se mueven los cuerpos, qual la fuerza centrípeta en un círculo, qual en una espiral, qual en una elipse, qual en otras líneas, que velocidades corresponderán en qualquiera de aquellas circunstancias, que espacios correrán, quanto tiempo se necesitará, y generalmente quanto debe considerarse en todo movimiento circular, todo se halla explicado por la vasta mente de Newton, y demostradas todas las cosas con exâctitud geométrica. ¡Que riqueza de sublimes teorías no esparce por todo su generoso espíritu! ¡que inmensa copia de sutilísimas verdades no sale de su fecunda pluma! Encontrar tangentes, describir trayectorias, transformar figuras, resolver difíciles problemas geométricos, son para él ligeros entretenimientos, á que como por diversion quiso aplicar sus mecánicas disquisiciones. La doctrina de los péndolos tratada por Galileo, y por Huingens, recibió aun mayores luces de las diligentísimas experiencias de Newton, y de sus geométricas demostraciones; y se han descubierto nuevas y útiles verdades sobre los tiempos, sobre la velocidad, sobre las fuerzas, sobre las resistencias, y sobre las retardaciones de las vibraciones. Despues de tantos y tan bellos hallazgos de Huingens sobre el isocronismo de las cicloydes, ha sabido Newton mostrar su ingenio original exâminando este isocronismo hasta en un medio re-

resistente en razon de los momentos del tiempo, y en razon simple de la velocidad, y dando de él una demostracion geométrica; y ha abierto el camino á Juan Bernoulli (*a*) y á Eulero (*b*), para demostrarlo tambien en otras hipotesis mas complicadas. La doctrina de las fuerzas centrales, y de los movimientos curvilineos, puede decirse que es uno de los mas preciosos regalos que ha hecho la geometría á la mente humana, y toda es realmente obra del sublime ingenio de Newton. Pero no es este solo el mérito suyo en la mecánica: es preciso, sí, conocer íntimamente las fuerzas motrices, y las diversas circunstancias de los movimientos; pero esta sola noticia no basta para la exâcta contemplacion de la naturaleza, si no se sabe qual, y quanta resistencia oponen á tales fuerzas los medios, por los quales deben executarse los movimientos. La ciencia de estas resistencias es otro noble parto de la fecunda mente de Newton. Al-

(*a*) *Acad. des Scienc.* an. 1730. (*b*) *Acad. Petr. nov. Comm.* tom. IV, & *Mech.* tom. II.

Algun ensayo habia dado de ella Galileo en sus diálogos; pero con aquella brevedad que correspondia á una cosa tocada solo de paso, y á un autor que era el primero que trataba una nueva ciencia. Newton en tiempos mas ilustrados, mas provisto de todos los auxîlios de la mas fina geometría, y de las mismas proposiciones insinuadas por Galileo, se pone á exâminar las resistencias de los medios, diversas segun las razones diversas de la velocidad de los cuerpos, que en ellos se mueven, diversas segun la diversa densidad de los medios, y diversas igualmente segun la diversa tenacidad y coeccion de las partes de tales medios. La resistencia del medio es como el decremento del movimiento que produce en el móvil, y nace de la reaccion del medio, y de su tenacidad. La resistencia de la tenacidad es siempre uniforme y constante; pero la de la reaccion debe medirse segun la densidad del medio, y la velocidad del móvil: quanto mas veloz correrá el móvil, el medio será mas denso, mas partecillas de este deberán moverse, mayor cantidad de movimiento comu-

nicará el móvil, mayor cantidad perderá, y por lo mismo será mayor la resistencia del medio. Así que Newton con su acostumbrada agudeza y profundidad, se pone á considerar diversas hipótesis de las resistencias de los medios en razon, ó de la simple velocidad, ó del quadrado de la misma, ó parte del quadrado, parte de la misma velocidad, ó tambien de lo sumo de la densidad del medio, y del quadrado de la velocidad; y en cada una determina los espacios que correrá el móvil, la velocidad que perderá, y la línea que deberá describir en su movimiento, y la que servirá para manifestar las fuerzas del movimiento, y las de la resistencia. Como la figura del móvil puede tambien hacer variar mucho la resistencia de los medios, observó igualmente Newton, que resistencia sufriría un cuerpo esférico, y la comparó con aquella á que estará sujeto uno cilindríco; y de este modo abrió el paso para determinarla con seguridad en los cuerpos de otras figuras. Poseido de estas sublimes y justas teorías entra á exâminar el movimiento circular en los medios

dios resistentes, que parece ser el objeto de sus precedentes investigaciones; y tomando una logaritmica espiral, de la qual supone ya conocidas las propiedades, la va aplicando al giro del cuerpo móvil en las diversas hipótesis de las densidades de los medios, y de las fuerzas centrípetas, y explicando despues quales deban reputarse la fuerza centrípeta, y la resistencia del medio para hacer volver el móvil de una supuesta velocidad en la supuesta espiral. Con este aparato de mecánica y de geometría se animó á subir á los cielos, y fixar con la correspondiente solidez los movimientos de los cuerpos celestes, combatió los vortices cartesianos, los echó á tierra, y los reduxo á la nada, de donde los habia sacado la fantasia de Cartesio; y solo con las dos fuerzas centrípeta y centrífuga obligó á los planetas á seguir las orbitas elipticas que les corresponden, los sujetó irresistiblemente á las leyes de Keplero, y puso en sistema, y en buen órden todos los cielos. Gran revolucion produxo en todas las matemáticas la obra de los *Principios matemáticos* de Newton. Algebra y geometría, mecánica é hidráu-li-

lica, física y astronomía, tomaron nueva forma por aquel sacrosanto y venerable depósito de verdades científicas. Nueva ciencia pudo llamarse su mecánica, que corrió el velo á todos los secretos de las fuerzas motrices, á todas las verdades de los movimientos curvilíneos, á todos los efectos de las diversas resistencias de los medios, y á otras muchas verdades relativas al movimiento, que aun no eran conocidas, y las aplicó con toda felicidad para explicar los misterios de la física y de la astronomía; y aun mas puede decirse nueva, porque en todo fué conducida por la severa geometría, ni dió el menor paso, ni profirió la mas leve proposicion, que no fuese regulada por sus rigurosas demostraciones. Entonces se introduxo en todas las ciencias la justa exâctitud y verdad; entonces se vió la mecánica dirigida por la geometría, y á veces tambien reducida al álgebra, ser reguladora de las otras ciencias.

Otros geómetras ilustradores de la mecánica.

El ardor con que entonces se emprendian las discusiones científicas, producia continuamente nuevos descubrimientos mecánicos, y hacia por todas partes úti-

útiles adelantamientos. No señaló Newton la trayectoria, que describe un cuerpo en un medio resistente segun el quadrado de la velocidad; y Juan Bernoulli la encontró, no solo para el quadrado, sino para qualquier razon multiplicada de la velocidad; y Nicolás su hijo, Tailor, Erman y Eulero resolvieron el mismo problema, y dieron mayores luces á toda la doctrina de las trayectorias. Por la doctrina sobre la resistencia de los medios de Newton se movió Huingens á exâminar la logaritmica, y propuso sobre esta algunos teoremas, á los quales dió despues Guido Grandi las correspondientes demostraciones. Llenas están las Actas de la Academia de las ciencias (a) de Memorias de Varignon para dar mas extension á la doctrina newtoniana sobre la resistencia de los medios. Pocas palabras de Newton sobre la curvatura que deberá tener una conoyde para sufrir la menor resistencia posible del medio, excitaron los ingenios de los mas ilustres geómetras á tratar este problema, hecho célebre ba-

(a) An. 1707. . . . 1711.

baxo el nombre *del sólido de la menor resistencia*; y l' Hopital, Juan Bernoulli y algunos otros encontraron sutilísimas resoluciones, y lo reduxeron á claras equaciones; y Bouguer (a) y Juan (b) ingeniosa y útilmente lo han hecho servir para varios adelantamientos de la construccion de los navios, y de la mecánica náutica. Así que Newton enriqueció la mecánica no solo con los descubrimientos propios, sino tambien con los de otros, y, lo que es aun mas útil que los mismos descubrimientos, introduxo en la mecánica la exâctitud de la geometría, é inspiró á sus sequaces el genio geométrico. No pudo en esto competir con él su rival matemático Leibnitz; pero tuvo tambien no poca parte en el adelantamiento de aquella ciencia. La resistencia de los sólidos á la rotura, la resistencia de los fluidos al movimiento de los sólidos, y algunos otros puntos mecánicos recibieron nuevas luces por sus medita- Leibnitz.

 cio-

(a) *Traitè du Nav.* lib. III.
(b) *Exam. mar. teor. prac.* tom. I, lib. II.

ciones. Los problemas mecánicos propuestos por él introduxeron en los sublimes geómetras un grande deseo de sutilísimas indagaciones. Es particularmente célebre el de la *línea isocrona*, porque fué mirada como el primer triunfo del cálculo infinitesimal, y porque sirvió mucho para adelantar los conocimientos de la dinámica. Como para describir una curva, en la qual en tiempos iguales corra un móvil espacios iguales, es preciso conocer íntimamente qual sea en cada punto la fuerza del móvil, quales los efectos que debe producir aquella fuerza en un descenso perpendicular, y quales en uno mas ó menos inclinado, así las resoluciones de un problema tal del mismo Leibnitz, de Huingens, y de Bernoulli sirvieron para enriquecer con nuevas luces la mecánica igualmente que la geometría. La famosa qüestion de las fuerzas *vivas* movida por Leibnitz, y abrazada á principios de este siglo por los mas célebres físicos y matemáticos, y ahora abandonada y despreciada como qüestion de voz, excitó grandes deseos de exâminar con experiencias, y con cálculos, qual de-

Qüestion de las fuerzas *vivas* promovida por él.

debiese reputarse la verdadera medida de las fuerzas de los cuerpos. Cartesio, y todos los otros tomaban la fuerza de los cuerpos de su mole, y de la simple velocidad. Leibnitz fué el primero que reflexîonó sobre la diversidad de las fuerzas *muertas*, ó bien sea de un cuerpo, que solamente pende, y está pronto para moverse; y de las *vivas*, ó bien sea del cuerpo que ya está en movimiento; y determina las fuerzas *muertas* por la simple velocidad, y *las vivas* por el quadrado de la misma (*a*). Se opuso á la opinion de Leibnitz el abate Conti (*b*); pero era contrario muy débil para que pudiese causarle gran temor. Respondióle sin embargo Leibnitz (*c*), y hubo aun alguna nueva réplica de Conti, y nueva respuesta de él; pero la medida, y la denominacion de las fuerzas vivas de Leibnitz no estuvo muy en uso entre los matemáticos, hasta que se puso á defenderla y confirmarla

(*a*) *Act. Erud. Lips.* an. 1636.
(*b*) *Nouv. de la Rep. des Lettr. Sept.* 1686.
(*c*) Ibid. *Febbr.* 1687.

la con nuevas razones Juan Bernoulli (*a*). Entonces muchos ilustres filósofos alemanes y de otras naciones, entraron en el partido leibnitciano; y Erman, Wolfio, Bulfingéro, Poleni, Gravesande, Muschembroek, y en Francia la famosa marquesa de Chatelet, con delicadas experiencias y con sutiles cálculos, le dieron mas poderoso y firme apoyo, y mas que todos Riccati con un entero y grueso tomo lo adornó de todos los auxîlios de la matemática y de la física (*b*). No faltaban á los cartesianos hombres ilustres, que oponer á los leibnitcianos; los ingleses y los franceses, siguieron midiendo las fuerzas vivas segun la simple velocidad; y Maclaurin en Inglaterra, y en Francia Mairan, sostuvieron su causa con mucha fuerza de ingenio, y copia de doctrina; en Italia Francisco Zanotti, tan superior á Riccati en las gracias de la eloqüencia, como inferior en la fuerza del cálculo y de la geometría, respondió con

(*a*) *Disc. sur les Loix de la comm. du mouv.*
(*b*) *Dial. delle forze vive.*

con elegantes y amenos diálogos á los profundos y aridos riccacianos; y Boscovik contentandose con la fuerza de inercia quiso desterrar las fuerzas vivas, y desatar así, ó romper el nudo de la qüestion (*a*). Y una disputa tan ruidosa, que ha ocupado á tantos y tan ilustres geómetras y físicos, está ahora abandonada, y considerada como una mera qüestion de voz. En efecto ambos á dos partidos convienen en conceder á las fuerzas vivas los mismos efectos: y como solo los efectos pueden darnos las verdaderas nociones de las fuerzas, poco debe importarnos que disputen sobre recibir ó no el tiempo en que se executan estos efectos, por un elemento de tal medida, sobre sacar esta por la cantidad de los obstáculos que vence el móvil, ó por la suma de las resistencias, que oponen al móvil tales obstáculos, y sobre otras sutilezas, que nada importan para la mecánica. D' Alembert (*b*) expone con mucha claridad y precision el estado de la qüestion,

(*a*) *Diss. de vir. viv.* (*b*) *Trait. de Dynam.* Pref.

tion, y concluye, tal vez con sobrada aspereza, que „ tomada en su verdadero aspecto, no puede consistir mas que „ en una discusion metáfisica muy fustil, ó en una qüestion de voz aun ma- „ indigna de ocupar á los filósofos." Pero sin embargo el exâmen de esta qüestion en las manos de hombres tan grandes ha acarreado algunas luces para el verdadero conocimiento de las fuerzas, que tal vez sin ella se les hubieran escapado, y ha servido no poco para el adelantamiento de la mecánica.

Propuesta de problemas mecánicos.

Mayores ventajas le han acarreado los problemas mecánico-geométricos, que en aquellos tiempos proponian los matemáticos. Para describir la curva catenaria, la velaria, la elástica, la brachistocrona, y otras curvas, que entonces se buscaban, es preciso ponderar atentamente las fuerzas de cada partecilla en cada lugar, y en cada momento, y se requieren tantas miras, y tantos conocimientos mecánicos, que ha sido menester toda la perspicacia de un Newton, de un Leibnitz, de l' Hopital, de los Bernoullis, para poder resolver estos problemas con exâctitud; y ciertamente con el exâmen, y con la resolucion de ellos se han encontrado muchas mecánicas verdades, y se ha introducido en la mecánica un espíritu analítico, que la ha preparado para recibir el nuevo estado en que se ve al presente. La deseada brevedad en materia tan vasta nos obliga á pasar en silencio muchos mecánicos que entonces florecieron, y muchos descubrimientos que cada dia se hacian; ¿pero como hemos de dexar de nombrar á Varignon, que en su *Nueva mecánica*, y en las *Memorias de la Academia de las Ciencias de Paris* puso en todo su esplendor el principio de la composicion de los movimientos, sacó de él todos los resultados, y trató tantos puntos de la estática y de la mecánica con aquella extension, á que solia elevar todos los objetos que se ponia á exâminar? Nuevo campo abrió á los mecánicos Amontons con la doctrina de la frotacion, ilustrada despues mas y mas por los físicos y por los geómetras, y recientemente tratada por Ximenez (a) exten-

Varignon.

Amontons.

(a) *Teor. e Practic. delle resistenze de' solidi ne' loro attriti.*

samente con mayor aparato de experiencias hechas en grande, y con toda la solidez y severidad de la geometría. Nuevos principios, nuevas demostraciones, nuevas verdades, ha presentado Erman en su *Phoronomia*, y al mérito de los propios inventos, ha juntado el de la exposicion de los descubrimientos de otros, y el de haber reducido á un cuerpo de doctrina la estática, la mecánica, la hidrostática, la hidraulica, y toda la ciencia del equilibrio y del movimiento. Hasta entonces los geómetras, arrebatados del gusto de resolver nuevos problemas, no habian pensado en exâminar la evidencia que tenian los principios de la mecánica, y si realmente era qual, y quanta se requeria para servir de basa á un sistéma de conocimientos verdaderamente científicos. Daniel Bernoulli entró en este exâmen, demostró rigorosamente el principio de la composicion y descomposicion de las fuerzas, que se dirigen á concurrir en un punto, y sacó de él muchos nuevos conocimientos (a); ilustró otros principios, y

Erman.

Daniel Bernoulli.

(a) *Comm. Acad. Petr.* tom. I.

y les dió mayor extension; pasó á resolver problemas, y les impuso nuevas condiciones y circunstancias, que los hacian mas difíciles, y supo reducirlos á eqüaciones generales, y ponerlos en la mayor generalidad. Mariotte, s' Gravesande, Muschembroek, Desaguliers y otros físicos diligentes, y provistos de las luces de la geometría, con sutiles y concluyentes experiencias confirmaban é ilustraban, y á veces tambien corregian y rectificaban la doctrina mecánica de los geómetras. Y así de varios modos, con físicas y geométricas demostraciones, se daba esplendor á la mecánica, y con las resoluciones analíticas de tantos problemas mecánicos se introducia en ella el espíritu analítico.

En este ardor de problemas mecánicos, de mecánicas investigaciones, de descubrimientos mecánicos, de estudio y de entusiasmo mecánico, quando Galileo habia creado la ciencia de la aceleracion de los graves y de los movimientos que se derivan de ellos; Huingens habia fixado las leyes de la comunicacion del movimiento, de las vibraciones de los pén-

Eulero.

 do-

dolos, y del centro de oscilacion; Newton habia reglado los movimientos circulares, y las resistencias de los medios, y habia hecho árbitra de los cielos á la mecánica; Amontons habia formado un nuevo ramo de mecánica con la doctrina de los atritos; Varignon habia simplificado toda la estática, y reducido los conocimientos mecánicos á mayor extension; Leibnitz, l' Hopital, los Bernoullis, Maclaurin, Tailor, Fontaine y otros geómetras no pensaban mas que en los problemas mecánicos; Erman habia formado un cuerpo de doctrina, aunque muy reducido, de los conocimientos mecánicos; Daniel Bernoulli habia demostrado, y reducido á evidencia geométrica algunos principios mecánicos; en suma quando todo respiraba ardor mecánico, todo manifestaba vivo deseo, y ardiente afan de los adelantamientos de la mecánica, compareció Eulero para su engrandecimiento, y para su mayor esplendor. Fiel este á su amada analisis, quiso tambien introducirla y hacerla dominar en la mecánica. Huingens, Newton, Erman y todos los escritores de mecánica, la ilustraron con

con exâctas y científicas demostraciones; con lo qual quedaban los lectores persuadidos y convencidos de su verdad, pero no formaban, como de sí mismo lo confiesa Eulero (*a*), una clara y distinta idea para poder resolver las mismas qüestiones, siempre que se presentasen con alguna pequeña variacion. Vino Eulero, y tentando tratar analiticamente las proposiciones demostradas sinteticamente por Newton y por Erman, vió acrecentarsele mucho los conocimientos, y extenderse sobre manera sus ideas; así que recogiendo, y tratando del mismo modo las otras verdades, esparcidas por otros acá y acullá, pertenecientes á aquella ciencia, hallandose con nuevas qüestiones, aun no tocadas por otros, y resolviendolas felizmente, encontrando nuevos métodos, y descubriendo nuevas verdades, dió al público una mecánica, donde toda la ciencia del movimiento se vió por la primera vez reducida á la analísis; y el feliz uso que hizo de ella mereció á este método la preferencia, que despues ha obtenido constan-

(*a*) *Mech.* Præf.

tantemente sobre todos los otros. Esta sola ventaja hacia ya que la mecánica debiese mucho á Eulero; pero habia tambien otras muchas que le acarreaban igual honor. No habia problema alguno mecánico, al qual no procurase dar una resolucion, y no le acarrease alguna mayor ilustracion, y notable adelantamiento. Expuso con mas claridad el principio de las velocidades virtuales, de lo que lo habia hecho Bernoulli, y le dió mayor extension (*a*). Exâminó el problema del centro de oscilacion, y el principio sobre que fundaba Erman su resolucion (*b*); hizo mas general este principio, y lo aplicó á la resolucion de varios problemas pertenecientes á las oscilaciones de los cuerpos flexîbles é inflexîbles (*c*). Encontró al mismo tiempo que Daniel Bernoulli el principio, que los mecánicos llaman *de la conservacion del momento del movimiento de rotacion*, y lo explicó con su acostumbrada profundidad (*d*). Exâminó

(*a*) *Ac. Berl.* an. 1751. (*b*) *Phoronom.*
(*c*) *Comment. Ac. Petr.* tom. VII.
(*d*) *Opusc.* tom. I.

nó el principio de la *menor accion*, no bien establecido por Maupertuis, y lo miró baxo un aspecto tan general y riguroso, que le hace merecer la atencion de los geómetras (*a*). El problema que busca el movimiento de un cuerpo arrojado sobre el espacio, y tirado hacia dos puntos fixos, se ha hecho célebre por el felicísimo uso que de él hizo Eulero para las substituciones, y por los resultados que sacó de él. El famoso problema de los tres cuerpos, el de las trayectorias ortogonales y otros muchos, se ven resueltos por él con superior magisterio. En suma no habia problema, que no se transformase en sus manos, no presentase nuevos aspectos, y no le sirviese á él para producir nuevas verdades; ni hay principio alguno mecánico, que no haya recibido de él mayores luces, y no se haya hecho con sus ilustraciones mas útil, y mas seguro. Pero principalmente la doctrina del movimiento de los sólidos, que él llama rígidos (*b*), y nosotros podremos llamar du-

(*a*) *Tract. de Isoperim.*
(*b*) *De motu corp. rigid.* Cap. I.

duros, y singularmente de su movimiento de rotacion, ¿que vasto campo no le presentó para producir nuevos ramos de doctrinas mecánicas, y para coger nuevas verdades? El conocimiento de los cuerpos mecanicamente considerados consiste principalmente, como dice el mismo Eulero (a), en conocer su centro de inercia, y sus exes principales. Por perturbado que sea un movimiento, puede siempre resolverse en progresivo, que se toma por el centro de inercia, y en giratorio, que se mueve al rededor de los exes. Así que exâminados el centro de inercia, y el movimiento que se deriva de él, se pone Eulero á exâminar distintamente los exes de los cuerpos, y sus observables propiedades. No eran conocidas las fuerzas que sostiene el exe, ó que deben aplicarse para que este se conserve en su sitio; y él con particular atencion observa en todos los casos diversos las fuerzas que ha de sostener el exe, y discute tambien los casos en que no sostiene fuerza alguna. En todos los cuerpos en-

(b) *Ibid.* Cap. VIII.

encuentra tres exes principales, esto es, tres exes, en los quales el momento de la inercia sea el máxîmo y el mínimo; y su analisis lo conduce al bello teorema, dado ya por Segner (a), de que un sólido de qualquier figura que sea, puede girar libremente al rededor de tres exes perpendiculares entre sí, y le hace ver las particulares propiedades de estos exes. El movimiento progresivo de estos cuerpos, el movimiento de rotacion, el movimiento mixto del uno y del otro, las fuerzas que producen estos movimientos, la variacion de los mismos, y las fuerzas que los hacen variar, la aplicacion á los movimientos de los cuerpos celestes, y á los de los conos, de las cuñas y de otros cuerpos terrestres, y quanto hay de útil y de curioso en tales movimientos, todo se ve tratado por Eulero con su acostumbrada prudencia y profundidad. Su sutil analisis le presenta la eqüacion general del movimiento de un cuerpo, sea qual fuere su figura, y las fuerzas que obran sobre sus elementos, y sobre cada una de

(a) *Specimen. theor. Turbinum.*

de sus partes, y lo conduce á los mas sublimes y finos descubrimientos; y Eulero deberá ser tenido por el verdadero maestro del movimiento de rotacion, como Newton del circular, y Galileo del descenso de los graves. Un nuevo ramo de la ciencia del movimiento, una notable mejora y perfeccion de todos los otros, y sobre todo una nueva manera de mirar la mecánica, ó bien sea la mecánica reducida á la analísis, hacen á Eulero tan acreedor á esta, como á todas las otras partes de la matemática, y le dan mas y mas derecho para pretender el imperio universal sobre todas.

Franceses mecánicos. Al mismo tiempo que Eulero manejaba, como señor y príncipe, todas las partes de las mecánicas, le presentaba la Francia un rival, que podia disputarle el principado. La Academia de las Ciencias de París no queria ser inferior á ninguna otra en cultivar la mecánica, y aun despues de Mariotte, Varignon y Amontons, tenia á Maupertuis, Bouguer, Mairan, Camus y algunos otros, que procuraban enriquecerla con nuevos principios, nuevas demostraciones, nuevas experiencias, y otros nuevos descubrimientos. El problema de las *tractorías* discutido por Fontaine, excitó el ingenio de Clairaut á ilustrar los problemas mecánicos. Otro que le propuso Klingistierna le hizo exâminar algunos puntos, en que se une la física con la mecánica. Las oscilaciones de un péndolo, que no se hacen en un plano, el problema de los tres cuerpos, objeto de la atencion de los mas profundos geómotras, la determinacion de la orbita terrestre, la teoría de los cometas, el manejo de las naves, y varias otras materias, dieron campo á Clairaut para manifestar que no era menos profundo mecánico, que sutil geómetra. Pero no era este el digno émulo de Euleró en el principado mecánico. D' Alembert fué realmente el único que pudiese entrar con él á competencia: su dinámica, el tratado de la precedencia de los equinoccios, y algunos otros opúsculos suyos le daban derecho para sentarse al lado del grande Eulero. Encontraba él la mayor parte de los principios de la mecánica, ú obscuros por sí mismos, ó anunciados y demostrados de un modo obscuro, por lo que daban lugar á

Clairaut.

D' Alembert.

á muchas qüestiones espinosas; y se puso á deducir los principios de las nociones mas claras, y aplicarlos á nuevos usos. El principio hallado por él, que reduce á la consideracion del equilibrio todas las leyes del movimiento, ha sido la época de una gran revolucion en las ciencias físico-matemáticas. Consiste este, como él mismo lo expone (*a*), en encontrar en cada instante el movimiento de un cuerpo animado por un número de fuerza, sea el que fuese, mirando el movimiento que tenia en el instante precedente, como compuesto de un movimiento que es destruido por aquellas fuerzas, y de otro movimiento que ha de tomar realmente, y que debe ser tal, que las partes del cuerpo puedan seguirlo sin perjudicarse mutuamente las unas á las otras. Verdaderamente la primera idea de este principio puede atribuirse á Jacobo Bernoulli, el qual en la investigacion del centro de oscilacion de los péndolos, consideró los movimientos impresos como compuestos de los que pue-

(*a*) *Recher. sur la prec. des Equin. &c. Intr.*

pueden tomar los cuerpos, y de los que deben destruirse. Pero D' Alembert miró este principio de una manera general, le dió la sencillez y la fecundidad que le correponde, é hizo felices aplicaciones. La teoría del equilibrio y de los fluidos, y todos los problemas resueltos hasta entonces por los geómetras, se habian convertido en corolarios de este principio. Le faltaba dar un medio para aplicar su principio al movimiento de un cuerpo de qualquier figura, y de qualquier fuerza que fuese animado. Diólo en su tratado de la precedencia de los equinoccios, y despues en los opúsculos (*a*), y lo aplicó felizmente para explicar, determinar y combinar los dos fenómenos astronómicos de la precedencia de los equinoccios, y de la nutacion del exe terrestre, y para hacer así triunfar incontrastablemente á Newton, y á la atraccion. Al mismo tiempo buscaba Eulero la resolucion del mismo problema de determinar el movimiento del cuerpo atraido por qualquier fuerza, y lo encontró por cami-

(*a*) Tom. I. sec. mem.

mino tan diverso, que aunque confiesa haber visto el tratado de la precedencia de los equinoccios de d' Alembert, no se puede sospechar que siguiese sus huellas; pero aunque sea gloria de entrambos el haber resuelto por vias diversas un problema tan dificil, sin embargo siempre pertenece á d' Alembert el honor de la primacía. La doctrina de la resistencia de los medios fué tratada por él con una profundidad y extension, qual no habia usado ningun escritor de mecánica (*a*), y aplicada á la resolucion de problemas que ningun otro se atrevia á tocar (*b*). El problema de los tres cuerpos, varias qüestiones sobre la atraccion, y las investigaciones sobre varios puntos del sistema del mundo, le dieron campo para acarrear nuevas luces á la mecánica; y puede decirse con verdad, que es obra de su sutileza y profundidad la delicadez y perfeccion en que ahora se encuentra esta ciencia. En este estado de la mecánica, despues de Eulero y

(*a*) *Essai d' une nouv. théor. de la resist. des fluides.* (*b*) *Opusc.* tom. I. p. trois mem.

y d' Alembert, no hablaré de don Jorge Juan, por mas que la haya tratado con el mas exâcto cálculo, y con las mas atentas experiencias, y en varios puntos haya oportunamente corregido las teorías de los geómetras (*a*); no de Riccati, que solo ha dexado un ensayo de una nueva mecánica que meditaba (*b*); no de Frisio, aunque rico de cálculo y de geometría; no de la Place, que en tantas memorias académicas ha presentado las mas finas miras mecánicas, acompañadas de toda la sutileza analítica; no de Ximenez, de Lorgna y de otros modernos, que han tratado doctamente algunos puntos particulares, y solo fixará nuestra atencion la mecánica analítica de la Grange, la qual no es un tratado de mecánica, como tantas otras mecánicas, sino que antes bien puede llamarse un arte de tratar la mecánica; no entra á exâminar el movimiento, y buscar en él algunas nuevas verdades, sino que pone la mira en la La Grange.

(*a*) *Exâmen marit.* &c. tom. I. (*b*) *Lett. de' principi della Mecc.*

la misma ciencia, y reduce su teoría, y el arte de resolver los problemas que le pertenecen, á fórmulas generales, cuya simple exposicion da todas las equaciones necesarias para la resolucion de cada problema, y en suma forma de la mecánica un nuevo ramo de la analisis. Propone y explica la Grange los principios de la estática y de la hidrostática, de la dinámica y de la hidrodinámica, da las fórmulas generales para el equilibrio y para el movimiento, deduce sus propiedades generales, propone los métodos para encontrar en ellas las equaciones, resuelve los problemas, y presenta toda la mecánica sujeta á las operaciones algebráicas, y reducida á mayor facilidad.

En este estado de perfeccion, exâctitud y facilidad se ve al presente la mecánica: reducidos sus principios á fórmulas generales, halladas las equaciones para la resolucion de los problemas, y reducida toda la ciencia á operaciones analíticas, parece que no falte para su adelantamiento mas que lo que falta á la analísis de quien se sirve. Sin embargo seria de

de desear que mientras los sublimes geómetras se elevan á buscar formulas, y equaciones generales para descubrir los movimientos mas complicados, y soltar las mas insuperables dificultades, hubiese otros atentos observadores de la naturaleza y de las artes, que exâminasen los hechos, y recogiesen datos, sobre que poder erigir las teorías, y aplicarles las operaciones algebráicas. A veces las especulaciones mecánicas de los geómetras están faltas de verdad, porque no están apoyadas sobre las observaciones; y á veces, aun siendo verdaderas y curiosas, quedan inútiles, porque no pueden aplicarse al verdadero conocimiento de los hechos, ni á los usos de la naturaleza y del arte. ¿Quantas bellísimas teorías de los mas ilustres geómetras no excluye el docto Juan (a), desmintiendolas incontrastablemente con la práctica? El mismo Newton conociendo la necesidad de las experiencias para establecer las teorías, despues de haber hecho y repetido muchísimas sobre las osci-

(a) *Exâmen*, &c. tom. I. Prólogo, & al.

laciones de los péndolos, manifiesta su deseo de que se hagan aun muchas mas; que se repitan aquellas mismas; que se inventen otras diversas, y que todas se hagan con mayor diligencia y cuidado (*a*). ¡De quanto mayores progresos no podria gloriarse ahora la mecánica, si los filósofos en sus especulaciones mecánicas hubiesen puesto mas cuidado en recoger hechos, multiplicar experiencias, verificar observaciones, y hubiesen tomado por guia de sus cálculos la observacion y la práctica! Ahora la mecánica se ha elevado á reguladora de las otras ciencias, y se ha hecho la llave para entrar en los secretos de la naturaleza: ahora todas las ciencias fisico-matemáticas pueden ser consideradas como otros tantos problemas mecánicos; pero sin embargo los geómetras mecánicos no dan á las investigaciones la conveniente extension, y comunmente toman por objeto y fin de sus especulaciones los movimientos de los cuerpos celestes, y las teorías astronómicas. ¿Quantas nuevas verdades no

(*a*) *Princ. Math.* tom. II, sec. VI.

no se presentarian á sus ojos, si descendiendo de los cielos contemplasen sobre la tierra la infinita variedad de fuerzas, y de movimientos que producen la naturaleza y el arte, y cuyo conocimiento, sino es tan sublime y noble como el de los movimientos celestes, tal vez puede ser mas útil, y ciertamente no es menos curioso? La fuerza de la percusion, la coerencia de los cuerpos, y algunos otros puntos dinámicos no son aun bien conocidos, é interesan á la sociedad no menos que los movimientos celestes. ¡Que ventajas no deberian esperar las artes y las ciencias, si la mecánica extendiese sus sutiles meditaciones sobre todos los objetos que le pertenecen! Nosotros entre tanto nos complacemos de las mejoras analíticas que los geómetras modernos han acarreado á la mecánica; le deseamos mayor extension en las investigaciones, y mayor auxîlio de la práctica y de la observacion, y pasamos á contemplar la hidrostática, que es una parte de la mecánica.

Origen de la hidrostática.

Archímedes.

CAPITULO VI.

De la Hidrostática.

Orígen de la hidrostática.

La hidrostática, y generalmente toda la ciencia del equilibrio y del movimiento de los fluidos, puede considerarse, y es realmente una parte de la mecánica, bien que á veces regulada por algunos principios algo diversos. Nosotros habiendo tratado la mecánica de los sólidos, despacharemos brevemente la de los fluidos, que casi siempre ha seguido el mismo curso.

Archîmedes.

Archîmedes es tambien el primer maestro ó creador de la hidrostática, como hemos dicho que lo ha sido de la estática. Gloríase en aquella, como en esta, de muchas máquinas y muchas invenciones; pero su principal gloria consiste en los principios científicos que ha encontrado. Enseña que los sólidos mas pesados puestos sobre un fluido irán al fondo, los de peso igual se sumergirán sin profundarse, y los mas ligeros quedarán sobre el agua, y aun metidos en lo hondo subirán sobre el agua con una fuerza igual al grado de gra-

gravedad con que el sólido es superado del fluido; da las leyes del equilibrio de diversos sólidos engendrados por secciones cónicas mas ligeros que los fluidos en que están sumergidos; y explica los casos, en que estas conoydes quedarán inclinadas, en que se mantendrán rectas, y en que se revolverán y enderezarán de nuevo; y en todo manifiesta aquella sutileza y sublimidad de ingenio que hacen que sea la admiracion de los posteriores; en todo habla con una solidez y profundidad, que, en medio de tantas luces de conocimientos mecánicos y geométricos, poco ó nada han podido añadir en esta parte los modernos. Despues de Archîmedes deberemos tambien dar aquí un gran salto hasta los siglos mas inmediatos á nosotros.

Otros griegos y latinos.

Porque si bien Eron, Ctesibio y otros griegos, inventaron ingeniosas máquinas hidráulicas y pneumáticas, no enriquecieron la hidrostática con nuevas teorías; y Vitruvio, Frontino y otros latinos, aunque manifestaron conocer las leyes del equilibrio y del movimiento de las aguas, se contentaron con servirse de ellas en la práctica en sus grandiosos aqüeducductos, y en otras operaciones, y no se cuidaron de ilustrarlas con sus escritos, ni de acreceptar aquella ciencia con sus

Arabes. invenciones teóricas. Los árabes, mas apasionados á las especulaciones matemáticas, cultivaron con mayor cuidado los estudios hidrostáticos, y solo los títulos de dos obras de Alkindi, que se refieren en la *Bibliotea arábiga de los filósofos*, esto es, de las cosas que nadan en el agua, y de las que en ella se sumergen, prueban bastantemente que no solo atendian á la práctica de sus útiles canales y aqüeductos, sino que tambien se dedicaban á las teorías hidrostáticas. Pero sean los que fuesen sus estudios, no ha llegado á nuestra noticia ningun descubrimiento suyo hidrostático. El primero despues de Archîmedes, que haya acarreado algun adelan-

Stevin. tamiento á esta ciencia, ha sido Stevin, el qual, probablemente dirigido por la misma doctrina de Archîmedes, exâminó la presion de un fluido sobre el fondo, y sobre los lados del vaso en que está metido, y descubrió la paradoxa de la presion del fluido en los vasos convergentes, que puede ser mucho mayor que el propio pe-

so;

so; y con mas profundas disquisiciones determinó igualmente la presion de los fluidos sobre los lados verticales ó inclinados, y sobre qualquier parte de ellos (*a*). Archîmedes y Stevin, abrieron el camino para introducirse en la hidrostática; pero fueron superados por Galileo, que Galileo. puede ser tenido por el primer verdadero maestro de aquella ciencia. El reduxo la estática de los fluidos á los mismos principios que la de los sólidos, y con los pesos, y con las velocidades explica el equilibrio de los fluidos entre sí, y de los mismos con los sólidos. Despues no solo abraza y demuestra por nuevos caminos las proposiciones de Archîmedes, sino que descubre muchas nuevas y curiosas verdades: deduce el teorema, que la mole de agua que se levanta al sumergir un sólido, ó que baxa al sacarlo, es menor que la mole de dicho sólido sumergido ó sacado, y tiene con esta la misma proporcion que la superficie del agua circunfusa al sólido, tiene á la misma superficie circunfusa juntamen-

(*a*) Stevini *Hypomnem Math.* tom. III.

mente con la base del sólido; y así concluye, que un sólido podrá sumergirse todo en el agua sin levantar ni aun la vigesima parte de su mole, y que al contrario una pequeña cantidad de agua podrá sostener un sólido muy grande; refiere muchas importantes curiosidades sobre los fenomenos que acontecerán á los solidos de figuras diversas puestos sobre el agua; y demuestra que no la figura de los sólidos, sino solo su específica gravedad los hará nadar ó sumergirse. De la teoría de los sólidos sumergidos en los fluidos, y de la parte del peso que pierden en ellos, antes que, como pensó Vitruvio (*a*), de la mole de agua sacada por el sólido sumergido, debió deducir Archîmedes la verdadera cantidad de oro, y de plata, de la corona del rey Jeron; y de la misma teoría tomó Galileo argumento para formar su balanza hidrostática, en la qual poniendo en un brazo un peso dexado al ayre, y en el otro brazo puesto otro sólido de igual peso sumergido en un fluido, por la parte de peso que es-

(*a*) Lib. IX, c. III.

este perderá, podrá deducirse su específica gravedad: y esta balanza de Galileo ha sido la madre de las de Castelli, y de Viviani, y de tantas otras balanzas hidrostáticas, que despues con tanto fruto han servido para exâminar los pesos, no solo de los sólidos, sino mucho mas de los líquidos. Así que Galileo, con tantas y tan claras luces sobre el equilibrio de los fluidos, puede justamente ser llamado el primer verdadero maestro de la hidrostática. ¿Pero que no hubiera podido esperar de él la hidráulica, y quantas luces no hubiera acarreado al movimiento de los fluidos, si hubiese dexado escrito quanto sobre esta materia habia meditado, y tenia intencion de exponer al público? Sólo la carta sobre el rio Bisencio nos enseña algunas verdades sobre dos canales de igual pendiente, pero de diversa longitud, el uno tortuoso, el otro recto, y sobre la velocidad del agua en tales canales, y en las variaciones de direccion; y habla con tal dominio y maestría de la materia, que manifiesta saber mucho mas de lo que escribia, y haberse internado no menos en la hidráulica, que en la hidrostática. No solo ayudó Galileo á estas ciencias con su propio estudio, sino que tal vez les acarreó aun mayores ventajas con lo mucho que excitó á sus discípulos á cultivarlas con provecho: Castelli, Torricelli, Viviani, Cavalieri y otros eruditos conocedores del movimiento y del equilibrio del agua salieron de la escuela de Galileo. A Castelli debemos un nuevo ramo de hidráulica con la teoría que introduxo de la medida del agua corriente, en la qual nos enseñó á calcular la diminucion del volumen producido por la velocidad, no observada por los demas. Torricelli abrió tambien un nuevo campo á esta ciencia, buscó el movimiento y la velocidad, por decirlo así, *virtual* de un fluido aun no conocida, y la determinó fixando, que no solo un fluido corriente tendrá, como el sólido, una velocidad correspondiente á la altura de donde desciende, sino que el fluido encerrado en un vaso, saliendo por un agujero hecho en dicho vaso, tendrá una velocidad igual á la de un sólido que descendiese de la altura del nivel del fluido; y que el agua saliendo por una fuente saldrá siempre, quitados los impe-

Castelli.

Torricelli.

pedimentos, á una altura igual al nivel de la del depósito. Aun ayudó mas Torricelli á la hidrostática, y á toda la física con la celebradísima invencion del barómetro. Galileo habia observado que el agua en el tubo, y generalmente en el vacuo, asciende treinta y dos pies y no mas: quiso probar Torricelli si esta observacion se verificaba á proporcion en los demas fluidos, y halló en efecto que el mercurio, cerca de 14 veces mas pesado que el agua, no ascendia mas que á 27 ó 28 pulgadas, y reflexîonando sobre la causa de este fenómeno, encontró que la columna de ayre atmosférico, que está sobre el mercurio del reservatorio del barómetro, es la que hace elevar en el cañon al mercurio hasta ponerse en equilibrio. Este descubrimiento de Torricelli fué despues incontrastablemente confirmado por Pascal, el qual con las conocidas experiencias del Monte Puy-de-Dome y de la torre de Santiago de París, probó que quanto mas alto se sube, y por consiguiente es mas pequeña la columna del ayre atmosférico, que oprime al mercurio en el vaso del barómetro, tanto menos as-

asciende el mercurio en el tubo. De aquí han pasado los físicos á medir con el barómetro la altura de la atmósfera, aunque no hayan llegado á determinarla con precision, y pueden con el mismo fixar con bastante exâctitud la altura de las montañas, conocer las variaciones de la atmósfera, y hacer varios usos muy útiles á las ciencias y á la sociedad; y todo esto hace mas y mas gloriosa y útil la invencion de Torricelli. Viviani, Michelini, Boreli y toda la Academia del Cimento, con descubrimientos, con experiencias y con tratados, han ilustrado mucho la materia de las aguas; y la hidrostática conoce deber á Galileo y á su escuela, á la Toscana y á toda la Italia sus casi primeras y mejores luces.

Los franceses.

Sin embargo, no estaba reducida á la Italia la cultura de la hidrostática: á la Francia debe igualmente mucho esta ciencia. Dexo aparte las varias especulaciones sobre los fluidos, de que trató Cartesio acá y acullá en sus obras, y en las quales, aunque tocadas solo de paso, esparció, como en todos los demas puntos, conocimientos no poco útiles. Dexo los *fenómenos hidráulicos* de Merseno, aunque en ellos se leen experiencias no poco útiles. Pero Pascal y Mariotte tienen ciertamente todo derecho para ser colocados entre los primeros maestros de aquella ciencia. Pascal, autor de las sobredichas experiencias barométricas, lo fué tambien del primer tratado, donde se demuestran con exâctitud geométrica algunas propiedades del equilibrio de los fluidos (a). Mas adelante pasó Mariotte, y ha merecido mas el estudio de los posteriores hidrostáticos. Los primeros italianos solo habian tomado algunos puntos particulares por objeto de sus investigaciones, y si bien les aplicaron gran sutileza de ingenio, y exâctitud de observaciones, pero faltos de oportunos instrumentos para las correspondientes experiencias, y sin los auxîlios de las luces de los anteriores geómetras, como suele suceder á los primeros ilustradores de qualquier ciencia, no hicieron mas que ensayar las materias, disipar las tinieblas, esparcir algunas luces, y

Pascal.

Mariotte.

(a) *Traitè de l' equil. des liq.*

y abrir á otros el camino para establecer la verdad. Mariotte, auxîliado de los principios, y de los hallazgos de los hidrostáticos anteriores, con las luces de la geometría, y con el subsidio de los instrumentos, pudo con repetidas ingeniosas experiencias, y con justos raciocinios establecer sólidas teorías sobre el equilibrio, y sobre el movimiento de las aguas, fixar las velocidades en alturas diversas, y de aquí pasar á determinar la cantidad que sale de un vaso, ó corre por un canal, y nos dexó en esta parte un cuerpo de doctrina bastante completo, y una obra clásica y magistral. Varignon, Parent, Pitot y varios otros franceses trataron acá un punto, acullá otro, é ilustraron de varios modos la hidrostática práctica y teórica. Parecia sin embargo

Otros italianos.

que debia quedar para la Italia la gloria de descubrir con mas acierto los pasos de las aguas: la Italia, que tanto provecho, y tambien tanto daño recibe de las aguas, tenia obligacion y necesidad de observar atentamente los movimientos de las mismas, y fixar sus leyes con exâctitud. Las disputas entre las provincias y potencias con-

confinantes, para desfrutar el goce de las aguas, y para evitar sus daños, obligaban á los mas famosos geómetras á estudiar con atencion estas materias, y á veces producian útiles y gloriosos descubrimientos. Montanari, mas conocido por otras observaciones, se adquirió tambien buen nombre por el estudio y las observaciones de las aguas, particularmente de aquellas que pertenecen á la laguna de Venecia. El

Montanari.

gran Cassini, en medio de sus especulaciones celestes, fué tambien destinado á exâminar las aguas, y contempló sus canales, y sus movimientos con el mismo empeño, y con la misma exâctitud con que estaba acostumbrado á mirar las orbitas y los movimientos de los planetas, y la constitucion de los cielos. Pero Cassini, lleno ya de gloria por sus teorías sobre las estrellas, dexó para otros la de darlas sobre los fluidos. Guglielmini fué el verdadero director de las aguas, midió las corrientes, exâminó la naturaleza de los rios, y fué por decirlo así el Cassini de las aguas. Castelli habia dado principio á la medida de las aguas corrientes, y habia calculado su velocidad no contemplada por

Cassini.

Guglielmini.

por otros; pero no habia pasado á exâminar las diferencias de las velocidades, diversas en la superficie, en el medio y en el fondo: Guglielmini la ha exâminado en todas sus diversas situaciones, y con repetidas experiencias, y con físicos y geométricos raciocinios, ha establecido sus leyes para la medida de las aguas corrientes, y ha formado una ciencia de la hidrometría. Mas originales han sido sus especulaciones sobre la naturaleza de los rios; y su obra sobre esta materia ha sido llamada por Manfredi (*a*), no solo original, sino única en su género, y en la qual se enseña no una ciencia, sino dos, una acerca de las aguas, y otra acerca de los cauces de los rios. La ciencia de las aguas no podia decirse absolutamente nueva, habiendo sido ya tratada por Castelli, por Torricelli, por Mariotte, por algunos otros, y por el mismo Guglielmini, bien que aun en esta supo él hacer en dicha obra muchos adelantamientos, corregir errores, y encontrar nuevas verdades. Pero la ciencia acerca de los cauces de los rios,

(*a*) Pref. all' Annot.

rios, la que considera las direcciones, los declives, las longitudes, los derrames, los desembocaderos, y las demas particularidades de dichos cauces, era tan nueva que ni aun hàbia ocurrido á los filósofos que de esto se pudiese formar una ciencia. Guglielmini fué el primero que reflexîonase, que el nacimiento y formacion de los cauces, siendo obra de la naturaleza, debia sujetarse á sus leyes constantes; que de la fuerza de las aguas, y de la resistencia de la materia, que forma la cama de los cauces, debian tomarse aquellas leyes; que en el acto de obrar la fuerza contra la resistencia la una y la otra son variables, y crece ó se disminuye la una, al disminuirse ó aumentarse la otra, y con estos principios se aplicó á buscar las verdaderas leyes que sigue la naturaleza en la formacion y alteracion de los cauces, y á encontrar una completa teoría de ellos, y un arte bien fundada para regularlos. La situacion, ó bien sea la profundidad, longitud y declive de los fondos, su diversa naturaleza, hora de arena, hora de guija, hora de piedras, hora de otras cosas, lo recto ó tortuoso de los cauces, el in-

incremento ó decremento, el desembocadero de un rio en otro, los efectos de su union, los escollos de los campos, los nuevos cauces, todo en suma lo que mira á la naturaleza de los rios, y al arte de regularlos, ha sido observado por él con agudo ingenio, y con maduro juicio; y si en todo no ha podido alcanzar la verdad, en todo ha esparcido muchas luces útiles, y ha abierto el camino, y señalado las huellas para encontrarla.

Las especulaciones de los hidrostáticos ahora nombrados estaban fundadas sobre las observaciones y experiencias; y dirigidas por una fácil y elementar geometría, se encaminaban al uso práctico, y á la popular utilidad. Entonces tomó un vuelo mas alto la hidrostática, y guiada por una mas sublime y transcendental geometría apoyada á la naturaleza misma del movimiento, y á las propiedades particulares de los fluidos, estableció principios mas abstractos, y dic-
Newton. tó leyes mas universales. Newton dió á la hidráulica aquella marca de certidumbre y de evidencia geométrica, que solia imprimir sobre quantas materias se ponia

nia á tratar (*a*). La presion de los fluidos por todos lados sobre sí mismos, y sobre los sólidos, la densidad de los mismos producida por la presion superior, la resistencia al movimiento de los sólidos, la fuerza para mover estos, y otras muchas verdades, fueron en pocas páginas expuestas y demostradas por él con su acostumbrada severidad. La observacion no tanto de la catarata, quanto de la vena estrechada á la salida del agua por el agujero de un vaso, ha corregido las medidas de los anteriores hidrostáticos, y ha dado nuevas leyes á la hidrometría. Maclaurin ilustró y sostuvo con todo el rigor geométrico la catarata, y toda la doctrina hidráulica de su maestro (*b*). El marques Poleni (*c*) y Daniel Bernoulli (*d*) exâminaron con severo y justo rigor la nueva medida de Newton, y la encontraron conforme á la verdad; y aunque creyeron, como tambien han creido mas recientemen-

(*a*) *Princ. Math.* &c. lib. II, sec. V. &c.

(*b*) *Traitè des flux.* tom. II. (*c*) *De Castel. & Epist. ad Marin.* (*d*) *Hydrodyn.* sec. IV.

mente Bossut (*a*) y Mari (*b*), poderle oponer algunas variaciones, y reducirla á mayor exâctitud en las diversas circunstancias de los vasos y de los agujeros, sin embargo el descubrimiento de aquella medida, oculta á todos los otros hidrómetras, toda se debe á la sutil penetracion de Newton. Y si Juan Bernoulli (*c*) y d' Alembert (*d*), han despreciado y combatido la catarata, y la doctrina de Newton y de Maclaurin, no por ello han logrado que sea enteramente abandonada de los hidrostáticos, ni ellos mismos dexan de recomendar con muchas alabanzas el ingenio del inventor. La velocidad del agua que sale en qualquier direccion que sea, y sea qual fuese la figura del ojo ó agujero, la fuerza, de la qual procede todo el movimiento del agua, la presion sobre el resto del vaso, y otras muchas curiosas y útiles teorías, son exâminadas por él con su acostumbrada sutileza. El Conde Ricca-

(*a*) *Hydrod.* tom. II. (*b*) *Teor. idraul.* tom. I.
(*c*) *Hydraul.* (*d*) *De la resist. des fluid.* Introd. *y De l' equil. & du mouv. des fluid.* §. 182.

cati y Daniel Bernoulli, Michelotti y Jurin han disputado con bastante ardor, para mayor gloria de Newton, sobre la verdad de algunas proposiciones suyas; y despues de las mas sutiles indagaciones, y las mas atentas observaciones, han tenido que sujetarse á las demostraciones de aquel sublime maestro, y recibir como verdad bastante segura, lo que por algunos estaba despreciado como una paradoxa. La observacion de los movimientos retardados del agua, que sale por los agujeros de los vasos, y las leyes de estos movimientos; el exâmen del movimiento propagado por las partículas de los fluidos, y del movimiento circular y vertical de los mismos, los bellos corolarios, y las importantísimas teorías que de aquí se derivan, prueban mas y mas la originalidad y superioridad de la mente de Newton, que se hace ver y admirar en la hidrostática, como en todas las otras partes de las matemáticas. Nuevo aspecto tomó la ciencia de los fluidos despues de haberla manejado Newton; los italianos Grandi, Manfredi, Poleni y otros, dueños del cálculo y de la sublime geometría, y por otra parte embebi-

Otros geómetras hidrostáticos.

bidos en las observaciones, y en las prácticas descubiertas por sus nacionales, dieron mayor extension, y mayor precision y verdad á las doctrinas de Galileo, de Castelli, de Guglielmini y de Newton, y las enriquecieron con sus propias especulaciones. Juan Bernoulli, Erman y algunos otros trataron con todo el rigor geométrico algunos puntos de esta ciencia, y prepararon los ánimos de los matemáticos para recibir la grande obra de Daniel Bernoulli, su original y profunda *Hydrodinámica.* La teoría del movimiento de los fluidos habia ocupado, como hemos visto hasta ahora, á los mas ilustres geómetras, y habia obtenido por su medio la resolucion de algunos problemas, y el descubrimiento de varias verdades; pero aun no se habia pasado á establecer principios, para poderla dar de un modo general, y reducirla á ciencia exâcta. Daniel Bernoulli tuvo la gloria de elevarla á este honor. El fixó dos principios, uno de la conservacion de las fuerzas vivas, y el otro de dividir el fluido que se mueve en extracciones paralelas, y de suponer á todas las partículas de cada extraccion un movimien-

Daniel Bernoulli.

miento comun, que tenga por todas la misma velocidad, y la misma direccion; y auxîliado de estos principios resolvió todos los problemas pertenecientes á la expulsion y salida de un fluido, contenido en un vaso, ó por un simple agujero, ó por uno ó mas tubos, ó que se mantenga siempre lleno el vaso, ó que se vaya vaciando. El movimiento de los fluidos en los vasos de qualquier figura, la presion de los mismos fluidos puestos en movimiento contra la orilla de los canales que los contienen, las leyes de sus oscilaciones en los sifones, ó en los vasos comunicantes, el empuje de los fluidos contra los planos expuestos á sus acciones, la teoría del ayre y de los fluidos elásticos, todo se ve sujetado por él á aquellos dos principios, y si á veces alguno de estos puntos parece no poder ser comprehendido en ellos, su singular sagacidad sabe resolverlo en tan ingeniosas y plausibles consideraciones físicas, que finalmente lo lleva á donde le da la gana, y lo pone baxo la direccion de sus principios. Lo versatil de su ingenio en encontrar en la analisis muelles para sujetar á sus cálculos todas las circunstancias de de un fenómeno, y el arte de disponer las experiencias como correspondian al presente objeto, que se dexan ver en todos sus escritos, despuntan aquí particularmente, y todo presenta á Bernoulli un autor original, el primero, como dice d' Alembert (a), que haya emprendido determinar el movimiento de los fluidos con métodos seguros y no arbitrarios, el padre é inventor de una nueva ciencia. Pero no por esto estuvo exênta la doctrina de Daniel de graves oposiciones. Maclaurin rehusó admitir el principio de la conservacion de las fuerzas vivas como verdad primaria y como basa de una resolucion; no quiso que la teoría de Bernoulli fuese considerada como exâcta por todos lados, estando fundada sobre una hipótesis, que no puede suponerse exâctamente verdadera, y siguió la doctrina de Newton, que procuró ampliar y defender (b). Juan Bernoulli habia primero admitido, y aplicado á los teoremas hidrostáticos el principio de la conser-

Maclaurin.

Juan Bernoulli.

(a) *De l' equil. & du mouv. des fluid.* Pref.
(b) *Traitè des flux* tom. II.

servacion de las fuerzas vivas (a); pero despues zeloso, quizá sin exemplo en toda la historia literaria, de su hijo Daniel, por haber entrado con él á la parte en el premio de la Academia de las Ciencias de París, y por deberlo acaso reconocer interiormente por mas acreedor, quiso abandonar como indirecto aquel principio, sobre el qual su hijo fundaba la hidrodinámica, que lo habia coronado de tanta gloria, y se dedicó á buscar otro en su concepto mas directo y universal, sobre el qual erigió su hidráulica para oponerla á la hidrodinámica de su hijo (b). El principio de Juan Bernoulli consiste en substituir á la suma de los pesos de todas las extracciones del fluido una sola fuerza, que no obre mas que en la superficie, substituir otra semejante á la suma de las fuerzas motrices de las partículas del fluido, y hacer despues estas dos fuerzas iguales entre sí. La teoría de Juan Bernoulli tuvo tambien necesidad de recurrir al prin-

(a) *Comm. Acad. Petro.* tom. II.
(b) *Hydraul. opp.* tom. IV.

cipio de la conservacion de las fuerzas vivas, sobre el qual apoyaba la suya Daniel, y estaba ademas sujeta á algunas dificultades, que despues manifestó d' Alembert (a), y su hidráulica no ha podido superar la gloria de la hidrodinámica del hijo. La qüestion sobre la figura de la tierra contribuyó tambien á formar mas exâctas teorías sobre la hidrostática. Buscóse esta figura por medio de la medida de los grados, y por la observacion de los péndolos; pero tambien se quiso deducir de su constitucion, y por mera teoría. A este fin era preciso exâminar atentamente las leyes del equilibrio de los fluidos, y la situacion y figura á que deberian reducirse en el movimiento circular y de rotacion de la tierra con las fuerzas centrífuga y centrípeta, era preciso reducir á mas exâctos cálculos muchas teorías hidrostáticas. Huingens y Newton fueron los primeros que buscaron por estos medios la figura de la tierra. Maupertuis y Bouguer encontraron insuficientes para este fin los prin-

Figura de la tierra determinada por las leyes de la hidrostática.

(a) *De l' equil.* &c. lib. II, cap. III.

principios de uno y de otro. El principio de Newton era la igualdad de los pesos de las columnas centrales, esto es, de las columnas que se tiran del centro al polo, al equador y á las otras partes diversas del globo. Maclaurin generalizó este principio, deduxo de él muchos nuevos teoremas, y lo demostró rigorosamente con el método sintético de los antiguos, y con una sagacidad y elegancia, que causaron admiracion á los geómetras (a). Aun dió mayor generalidad á aquel principio Clairaut (b): él fué el primero que deduxo de este las leyes fundamentales del equilibrio de una masa fluida, cuyas partes todas esten animadas por fuerzas, sean las que se fuesen, y encontró las equaciones de diferencias parciales, por las quales se pueden expresar estas leyes, con lo que hizo mudar el aspecto de la hidrostática. Y de este modo de la qüestion tan agitada de la verdadera figura de la tierra recibió la hidrostática mucho mayor exâctitud y per-

Clairaut.

 fec-

(a) *Mém. sur le flux & le reflux. de la mer.*
(b) *Theor. de la fig. de la terr.*

feccion, y se formó casi una nueva ciencia.

D' Alembert.

Mayores adelantamientos le acarreó aun d' Alembert, quien en su tratado del equilibrio y del movimiento de los fluidos, en el de la resistencia de los mismos, y en los opúsculos procuró substituir principios sencillos y fecundos en lugar de los métodos de los geómetras anteriores, y trató toda la ciencia de los fluidos de una manera mas elegante, mas sencilla, mas directa, y mas universal. Exâminó las propiedades de los fluidos diversas de las de los sólidos; y de la propiedad que ellos tienen de comprimir igualmente, y de ser igualmente comprimidos por todas partes, deduce claramente las leyes principales de la hidrostática, y la resolucion geométrica y rigurosa de muchos problemas hasta entonces no bien resueltos. Conocidos los principios generales del equilibrio de los fluidos, pensó en hacer uso de ellos para encontrar las leyes de su movimiento. A este fin quiso aplicar al movimiento de los fluidos el método que habia establecido para el de los sólidos, esto es, de mirar la velocidad del cuerpo que se mueve, como compuesta de otras dos velocidades, de las quales la una es destruida, y la otra no perjudica al movimiento de los cuerpos adyacentes; y para que en el movimiento del fluido no se perjudiquen mutuamente sus partículas, suponiendo que la velocidad vertical de todos los puntos de una extraccion horizontal es la misma en todos, encontró que la velocidad de la extraccion debe ser en razon inversa de su longitud, porque no perjudique al movimiento de los otros. Auxîliado de este principio sujetó á las leyes de la hidrostática ordinaria los problemas que miran al movimiento de los fluidos, como habia sujetado á las leyes de la estática los del movimiento de los sólidos, y de este modo reduxo todas las leyes del movimiento á las leyes del equilibrio, y formó una nueva época en la ciencia del movimiento. D' Alembert fué el primero, segun dice la Grange (*a*), que reduxo á equaciones analíticas las verdaderas leyes del movimiento de los fluidos, y en lugar de las equaciones que habian da-

(*a*) *Mech. analit.* sec. part. sept. sec.

dado algunos geómetras anteriores, supo tambien substituir otras mas generales y mas rigurosas; pero sin embargo no era aun bastante su doctrina analítica, y muchas de aquellas equaciones no están mas que indicadas, sin llevarse la analisis tan adelante como se requería para tener resultados precisos, y que pudiesen satisfacer la escrupulosidad geométrica. Lo hizo despues Eulero (a), y trato la materia baxo el mismo punto de vista, pero con mas claridad y extension; y d' Alembert y Eulero parecia que hubiesen agotado los recursos que puede presentar la analísis para el conocimiento del movimiento de los fluidos. La observacion y la práctica hicieron ver á Don Jorge Juan muchos elementos que no habian sido conocidos, quanto menos exâminados y adaptados por los otros geómetras para la formacion de sus equaciones; reformó en gran parte y corrigió sus cálculos hidrodinámicos, y nos dió teorías no menos ajustadas á

Juan.

(a) *Acad. de Berl.* an. 1755. *Acad. de Pietr.* 1756, & al. *Scient. nav.* &c.

á la rigorosa geometría, y mas conformes á la experiencia y á la verdad (a). Finalmente la Grange quiso reducir á la mayor sencillez toda la teoría de los fluidos; y viendo que los geómetras anteriores para establecer sus cálculos necesitaban recurrir á algunos supuestos, y á principios fundados sobre las propiedades particulares de los mismos fluidos, procuró formar los suyos sin suposicion alguna, y ateniendose solo á los principios generales, y sujetar tanto los fluidos como los sólidos á las mismas leyes del equilibrio y del movimiento, y reunir así la estática y la hidrostática, la dinámica y la hidrodinámica, como ramos de los mismos principios, y como resultados de las mismas fórmulas generales.

La Grange.

Estos puede decirse que son todos los progresos de la hidrostática en las especulaciones geométricas, y en la parte puramente teórica. Pero esta parte, aunque tal vez pueda ser reputada por la mas sublime y mas noble, es sin embargo sobrado abstracta é ideal, para que pueda ha-

Otros hidrostáticos mas prácticos.

(a) *Exâm. marit.* &c. tom. I.

hacerse algun uso de ella, y es ademas poco segura. Así que otros filósofos, queriendo hacer esta ciencia mas útil á la sociedad, no se contentaban con especulaciones profundas, sino que procuraban adelantar en la práctica; y algunos sin cuidarse mucho de los cálculos y de las fórmulas algebráicas, corriendo tras los hechos, y los fenómenos de los fluidos, y ateniendose mas á los principios meramente físicos, que á los matemáticos, y otros mas prudentes, queriendo unir lo uno y lo otro, los cálculos analíticos, y las observaciones físicas, han procurado encontrar las verdades prácticas, no establecer las teóricas, y se han aplicado á construir máquinas, formar ingenios, y ponerse en estado de dominar las aguas, y hacerlas mover á su arbitrio. Así Pitot, Parent, Papin y varios otros han inventado algunas máquinas no menos útiles al público, que gloriosas á sus inventores; y mas que todos Belidor, en su *Arquitectura hidráulica*, ha enseñado científicamente toda la práctica de este arte. Otros no contentandose con la mera práctica, por mas razonada y docta que fuese, han querido unir

unir á los conocimientos prácticos las teorías geométricas; y Lecchi en la *Hidrostática exâminada en sus principios* ha dado una de las obras mas instructivas, mas exâctas, y mas conformes á la verdad, que se hayan publicado sobre tales materias; y Bossut ha compuesto una *Hidrodinámica*, la qual, comparada con la grande obra de la *Hidrodinámica* de Bernoulli, hace ver, en concepto de Condorcet (*a*), quanto se haya adelantado dicha ciencia en este siglo, plan mas vasto, tratadas qüestiones desconocidas á Bernoulli, y resueltas otras muchas con mayor sencillez y precision; y Ximenez, Frisio, Lorgna, Mari y algunos otros, han juntado á las instrucciones prácticas, sutiles teorías fundadas sobre la experiencia y sobre los cálculos, y de varios modos se ve en nuestros dias ilustrada por muchos la hidrostática. Despues de tantos estudios, tantas experiencias, tantos cálculos, tantas teorías, parecia que debiese ser bastante conocida la hidrodinámica, y que pudiese aplicarse con bastante exâctitud á los usos de la sociedad; pero al contrario se en-

Lecchi.

Bossut.

Nuevas experiencias hidrostáticas.

(*a*) *Elog. de M. Dan. Bernoulli.*

contraba, que al paso que era digna de alabanza la sagacidad de los geómetras que habian trabajado sobre esta materia, debia confesarse que aun no estaba bastante ilustrada, y que se necesitaba exâminarla mejor para sacar de ella ventajas. Así que fueron estimulados los geómetras á hacer una serie de experiencias en grande, á exâminar atentamente estas experiencias, y combinarlas con las teorías; y finalmente en el año de 1775 d' Alembert, Bossut y Condorcet, hicieron de órden del gobierno, con autoridad pública, las experiencias que juzgaron convenientes para fixar la resistencia de los fluidos con exâctitud y utilidad; y en efecto se vieron nuevos resultados algo diversos de los procedentes de otras experiencias; y Condorcet propuso un método para encontrar las leyes de los fenómenos deducidas de las observaciones para poderse aplicar facilmente á las suyas. Pero sin embargo estas experiencias no han satisfecho plenamente los curiosos deseos de los hidrostáticos, ni han tenido aquella extension de miras que se requeria, ni en aquella misma parte que han tomado por objeto de

de la resistencia de los fluidos se han repetido con tal variedad y cuidado, que hayan podido mostrarnos los verdaderos pasos de la naturaleza, ni en efecto han producido en los matemáticos aquella sensacion, que parecia deberse esperar de los ilustres nombres de sus autores, y del aparato y pública autoridad con que fueron hechas. Queda pues el campo abierto á los hidrostáticos para acarrear una sólida ventaja á las ciencias, estableciendo las correspondientes experiencias, y atentas observaciones, y encontrando las equaciones y las fórmulas generales, que libres de toda suposicion arbitraria estén solo fundadas sobre la verdad de los fenómenos observados, que se hagan sencillas y fáciles para trasladarlas en números, y que puedan ser útiles en la práctica. Despues de tantas experiencias, y de tantos cálculos no sabemos aun con seguridad si es mayor la velocidad del agua en la superficie ó en el fondo de los canales, ni de que modo se hace el acrecentamiento de la velocidad, ni se ha encontrado un método seguro para medir dichas velocidades, ni un instrumento infalible para hacer las justas nivelaciones. ¿Quantos elementos para las operaciones analíticas no ha observado Juan, desconocidos á los otros geómetras (*a*)? ¿Y como es posible que sin exâminarlos se puedan formar cálculos, que no sean contradichos por la naturaleza? Diversos son los conocimientos que se requieren para las aguas en los tubos y en las máquinas, en los canales y en los rios, en los lagos y en la mar. Las experiencias de los fluidos en artificiosos ingenios, y en estudiadas máquinas podrán servir para hacer conocer sus movimientos y sus fuerzas en algunas pocas y reducidas circunstancias; pero ciertamente no bastan para manifestarlos en todos sus estados, y en sus mas comunes y naturales pasos. La observacion atentísima y perspicaz de los espontáneos eventos, y de los fenómenos naturales, repetida en varias circunstancias, y con miras diversas, hará conocer mejor los fluidos á los ojos eruditos, que las pequeñas y violentas experiencias, las quales sin embargo podrán á veces reglar las miras de las observaciones, y verificar sus re-

(*a*) *Exám.* &c. tom. II, lib. II.

resultados. De este modo podrán encontrarse con las experiencias, y con las observaciones muchos hechos intrincados, y descubrirse muchas verdades particulares, y sobre su conocimiento establecerse seguros principios, y sólidas teorías, y recibir la parte geométrica aquella exâctitud y perfeccion de que ahora no es capaz. ¿De que sirve el ver llenas las páginas de sutilísimos cálculos, si fundados sobre principios falsos, y sobre arbitrarios supuestos no pueden tener la consistencia necesaria? El prurito de hacer ostentacion de cálculo, mas que el deseo de establecer la verdad, determina muchas veces á los geómetras en la eleccion de los principios, sin cuidarse de exâminarlos antes, y reconocer su oportunidad, como si la geometría debiera mandar á la física en vez de servirla, y ofrecerse obediente á sus disquisiciones. Busquense pues principios verdaderos y seguros, sencillos y fecundos, destierrese toda suposicion, por mas natural y evidente que parezca, y se darán entonces equaciones y fórmulas, que conduzcan á resultados no desmentidos por la naturaleza, y por los hechos. CA-

CAPITULO VII.

De la Náutica.

De la mecánica, y de la hidráulica se forma la náutica, ó aquella parte de ella que pertenece á la construccion, y al manejo de las naves; esta puede llamarse una ciencia nueva, cuyo principio cuenta poco mas de un siglo. La parte astronómica é hidrográfica, ó el arte del pilotage, ha tenido algo antes alguna cultura científica; pero la mecánica, aunque reducida á ciencia tan tarde, ha hecho en poco tiempo muchos progresos, y ha obtenido célebres ilustradores. ¿Que inmenso campo de erudicion sagrada y profana, y de curiosas investigaciones no nos ofreceria la historia de la navegacion, si pudieramos exâminar sus principios, y seguir todos sus progresos? Pero nuestro instituto nos sujeta solo á la parte científica, y aun en esta lo vasto de la materia de toda la obra nos obliga á una muy reducida brevedad. Orígen de la náutica. De la union de pocas tablas,

blas, y del ahuecamiento de algun tronco, que sirvieron para las primeras navegaciones, pasaron los antiguos á construir tales naves, que d' Alembert (a) manifiesta creer que en la parte de la construccion adelantasen mas que los modernos; y ciertamente deberia pensarse así, si las grandiosas naves, que tan pomposamente nos describen algunos escritores, sirvieron realmente de algun uso náutico, y no solo de ostentacion y de vanidad. ¿Quantas paginas de citas y de textos no necesitariamos para discutir si fué Danao, Jason ó algun otro el inventor de la primera nave grande de los antiguos; si realmente fué Eolo el primero que usó las velas, y por ello fué llamado por los griegos *Dios de los vientos*; si los focences fueron los primeros que tuvieron valor para engolfarse en largas navegaciones; si los cartagineses inventaron las quadriremes; si los sidonios y los fenicios fueron los primeros que navegaron de noche con el auxîlio de las estrellas, y tantas otras qüestiones aun

(a) *De la resist. des fluid.* Introd.

aun no bastante bien exâminadas por los erudítos? Y despues de largas discusiones ¿que podrémos sacar mas que violentas é inconcluyentes congeturas? Nosotros pues solo diremos, que el arte de navegar quedó entre los antiguos muy inferior al nuestro, mas lentas y reducidas sus navegaciones, sin medios é instrumentos con que poderse gobernar en alta mar lejos de la tierra; que su construccion naval era tambien muy diversa de la nuestra; que hacian mucho uso de los remos, y entendian poco el manejo de las velas; que necesitaban para los combates navales de agudas proas, de duros rostros, de fuertes flancos, y ponian poco cuidado en los palos y las velas, en el centro y el metacentro, en la figura de la menor resistencia, y en otras sutiles especulaciones de nuestros dias; que tenian algun conocimiento de las estrellas para regular su curso; pero que era muy imperfecto para atreverse á engolfar en el océano, y apartarse mucho de la tierra; y que qualquiera que haya sido su pericia en la construccion de las naves, y en el arte de navegar, toda era obra de la práctica, no se de-

derivaba de establecidos principios, y de fundadas teorías, no formaba una verdadera ciencia. Y en efecto entre la gran multitud de escritores griegos, que sobre todas materias componian infinitos libros, no veo escritor alguno de náutica, ni sé que ninguno de ellos haya tratado el arte de navegar. Los primeros autores que han llegado á nuestra noticia son los árabes, de quienes quedan no pocos escritos que abrazan esta ciencia. El célebre Thabit ben Corrah, que ha ilustrado tantas partes de las disciplinas matemáticas, escribió tambien sobre esta una obra describiendo las estrellas, y su ocaso para uso del arte náutica (*a*): encuentrase en la biblioteca del Escorial la obra de un anónimo, que trata aun mas directamente del arte de navegar; y otros doctos árabes dexaron sobre la misma sus escritos científicos. Así que, viendo tantas obras de los árabes sobre la náutica, y ninguna de los escritores anteriores, podremos asegurar con algun fundamento, que á ellos se debe el haber reducido á ciencia matemática el arte prác-

Arabes primeros escritores de náutica.

(*a*) Casiri *Bibl. ar. hisp. Esc.* tom. I. p. 388.

práctica de la navegacion, qual fuese entonces. Ademas de esto hemos probado ya que la brúxula, sea qual fuese su primer orígen, puede justamente contarse entre los útiles inventos que nos han trasmitido los árabes (*a*). El uso de esta, los conocimientos astronómicos, en que tanto estudiaron, como veremos mas adelante, y el manejo de la trigonometría, que adelantaron con tanta felicidad, como hemos dicho antes, habrán hecho que por sus meditaciones naciese una ciencia del arte de navegar. En efecto la sobredicha obra de Thabit contiene conocimientos astronómicos acomodados á la náutica; y los primeros ensayos de esta en los estudios de los europeos no eran mas que nocturlabios, astrolabios, brúxulas, cartas de marear, instrumentos y métodos para dirigir las navegaciones con la aguja tocada al iman, ó de marear, con los conocimientos astronómicos y trigonométricos, con la vista del cielo, y con la inspeccion de las estrellas.

Portugueses primeros promovedores de la náutica.

Sagres, pequeño lugar del Cabo de S. Vicente, ha sido la cuna, donde ha nacido para nosotros esta ciencia, donde á principios del siglo XV estableció el infante de Portugal don Henrique una academia de náutica, y con el estudio de Jaime de Mallorca, de Josef y de Rodrigo, y de otros versados en la marina y en las matemáticas se inventaron (*a*) las cartas hidrográficas, que forman una parte tan importante de la náutica; se descubrieron nuevos instrumentos y nuevos métodos para gobernarse en los mares con la observacion de las estrellas; se fixaron leyes y principios para dirigir bien los rumbos; se adelantó y mejoró la náutica con los conocimientos de la astronomía y de la geometría, y se reduxo por su medio á verdadera y exâcta ciencia. Toaldo, ilustrando un obscuro opúsculo veneciano del siglo XV, intitulado *Rason del martologio*, que él fundadamente supone que quiera decir *marilogio*, *ó regla del mar*, explica ingeniosamente ciertos números, que á primera vista parecen ininteligibles, por números trigonométricos, y por esto quiere dar á los venecianos la gloria de haber me-

Aplicacion de la trigonometría á la náutica.

(*a*) V. tom. II. cap. X.

(*a*) V. tom. VI. lib. III. cap. II.

sido los primeros que aplicaron á la náutica la trigonometría (*a*). Pero por mas verdadera que sea, como ciertamente es ingeniosa y docta la explicacion de aquella regla y de aquellos números, no sé quan justa pueda parecer su conclusion á favor de los venecianos. El autor de aquel opúsculo no da mas que un prontuario para poder navegar con la mente, como él dice, ó para executar materialmente las operaciones trigonométricas, que los geómetras náuticos habian encontrado teóricamente para seguir los buscados rumbos, y regularse en la navegacion; pero no manifiesta haber sido él ni otro veneciano el inventor de aquellas operaciones. Y como todos los problemas que trata, que solo son los mas sencillos del pilotage, todos son relativos á las cartas hidrográficas llamadas *planas*, y estas cartas son obra de la academia náutica del infante don Henrique, parece mas probable que á esta igualmente deba atribuirse la aplicacion de la trigonometría á la náutica, quando no quiera decirse haber antes provenido de

(*a*) *Saggi di studj Veneti*. III.

de los sarracenos escritores de una y de otra. El conocimiento de las latitudes, y de las longitudes, es muy necesario á la navegacion para que no fuese buscado por los náuticos. No era este dificil en las latitudes, las quales con la observacion de la estrella polar, fácil de executar aun en la mar, pueden encontrarse con bastante exâctitud. Pero el problema de las longitudes no queria tan facilmente dexarse superar de la inteligencia de los matemáticos. Desde principios del siglo pasado vemos ofrecidos grandes premios por el rey de España y por los holandeses al que propusiese un medio seguro para encontrarlas en la mar. Galileo se presentó á uno y á otros con sus satélites de Júpiter, y con los instrumentos para observarlos en la mar, con el barquillo lleno de agua dentro de la nave para conservar el nivel en medio de los movimientos de esta, con el *celatone* (*) para mantener constantemente aplicado al ojo el telescopio, y con el relox de péndola para contar exâc-

Problema de las longitudes.

(*) Al parecer era un instrumento, que puesto en la cabeza ó la frente, servia para asegurar el telescopio.

exâctamente las horas; pero diversas razones impidieron la conclusion, y el problema habia quedado por resolver hasta nuestros dias. Los métodos imaginados por Galileo eran ciertamente adaptables á la resolucion, y acarrean mucha gloria á su inventor, que en aquel tiempo supo idearlos; pero con razon podemos pensar que no hubiera sido igualmente feliz la execucion: los repetidos é incesantes estudios que en este siglo han sido precisos para ponerlos en uso con la debida exâctitud, nos hacen temer que no hubiera podido entonces Galileo reducir al deseado efecto lo que le presentaba su mente fecunda. A principios de este siglo ofreció el Parlamento de Inglaterra un gran premio al que con bastante exâctitud resolviese el problema de las longitudes. Para esto bastaba un exâctísimo relox, que señalando constantemente la hora precisa del mediodia del lugar de donde ha salido la nave, manifieste quantos grados dista aquel lugar del lugar donde se encuentra actualmente, requiriendose 15 grados de longitud para que haya una hora de diferencia. Pero la agitacion de la nave des-

desconcierta el movimiento del relox, y por esto no se habia sabido formar uno tan perfecto que conservase en la mar, como conserva en la tierra, uniforme su movimiento. Bastaba observar la inmersion y la emersion de los satélites de Júpiter, sabiendose por la tabla en que lugar deban verse á cada momento estos fenómenos; pero para estas observaciones tan sutiles se requieren grandes anteojos de larga vista, y el movimiento de la nave impide el uso de ellos. Bastaba tambien la observacion mas fácil de la inmersion, ó de la emersion de alguna estrella del zodiaco baxo el disco de la luna; pero se necesitaba para esto conocer exâctamente el movimiento de la luna, y la luna habia estado rebelde y obstinada en no sujetarse á los cálculos matemáticos. La curiosidad ingeniosa de los hombres, no menos que el deseo del premio, ha sabido de algun modo superar esta dificultad. Arrisson ha construido un relox, el qual se ha mantenido en la mar tan uniforme y exâcto, que ha superado los términos de la exâctitud que requeria el programa del Parlamento, y ha obtenido el premio propuesto. Irvino in-

inventó una silla elástica, que siguiendo con su elasticidad el movimiento de la nave, tuviese siempre en el mismo plano los ojos del observador, y facilitase las observaciones de los satélites de Júpiter. Eulero y Mayer formaron tablas tan exâctas del movimiento de la luna, que merecieron, como tambien Irvino, un premio de Inglaterra. Y así de varios modos, pero principalmente con el relox de Arrisson, se ha resuelto en nuestros dias este arduo problema, aunque en todos exîja ó admita aun mayor perfeccion, y ha contribuido mucho al mejoramiento de la
Brúxula. navegacion. El uso de la brúxula es el mas poderoso auxîlio que haya obtenido la náutica. Esta es la guia, sino la mas precisa y segura, la mas pronta, mas fácil y mas comun que en qualquier lugar, en todo tiempo, baxo qualquier cielo, indicando con la aguja de marear el septentrion, señala de algun modo el camino que pueden seguir los navegantes faltos de toda luz de cielo y tierra. En efecto con el auxîlio de la brúxula se engolfaron en el océano los portugueses y los españoles, y guiados por la misma descubrieron nuevos mun-

dos. Pero la aguja tocada con la piedra iman, aunque siempre esté vuelta hácia el septentrion, sufre sin embargo sus declinaciones, que la apartan hora mas, hora menos de la línea que toca el polo. Si fuesen siempre constantes estas declinaciones, ó si pudiera tenerse una regla para saberlas determinar, se podrian calcular estas determinaciones, y encontrarse igualmente el punto polar. A este fin se inventó un *compas de variacion*, que manifiesta de algun modo, observandose todos los dias la salida y la puesta del sol, qual y quanta sea en aquel dia la declinacion de la aguja. Allejo, que ha estudiado mas filosóficamente esta materia, presentó á la Real Sociedad de Londres una teoría de las variaciones magneticas; propuso un nuevo compas, que él llama *azimuthal*, y las señala con mayor exâctitud; y despues de haber observado atentamente estas variaciones en varios viages marítimos, publicó sus cartas hidrográficas, en las quales, como él mismo dice en la prefacion, hay propiamente de nuevo el encontrarse en ellas las líneas curvas tiradas sobre diferentes mares, para hacer ver los grados de *variacion* de a aguja de marear. A mas de las declinaciones sufre esta aguja sus inclinaciones, las quales bien conocidas podrán dar mayores luces para la seguridad de la navegacion. La Academia de las ciencias de París propuso para el premio anual la determinacion de estas inclinaciones, y fué honrado con el premio académico el método presentado por Daniel Bernoulli. Brander formó con este fin un instrumento llamado por él *inclinatorio*. La Hire, Muschembroek y algunos otros han procurado dar la mayor perfeccion y exâctitud á la construccion de la aguja, y de la brúxula; y aunque sus investigaciones le han acarreado algunas mejoras, sin embargo queda aun á los doctos observadores mucho que rectificar y perficionar. Todos estos estudios dirigidos á la cultura científica de la náutica miraban al arreglo del curso de la nave, y al arte del pilotage, y esta sola parecia que fuese el objeto de la ciencia náutica. En efecto, Pedro Medina, Nuñez, Zamora, Cespedes, los primeros escritores de algun crédito, y los primeros verdaderos maestros de aquella ciencia, todos trataban de la observacion de

de las estrellas, de la direccion de los rumbos, de la brúxula, de los vientos, de las corrientes, del estudio y del arte del pilotage. Hácia fines del siglo pasado empezó á ocupar la atencion de los geómetras la construccion y el manejo de las naves, y esto, que antes solo era obra de pura práctica, ha producido en estos años doctísimas teorías.

El pilotage, como no exîje mas que la simple geometría elementar, podia tratarse en los siglos pasados con bastante exâctitud; y en efecto ha tenido en los dos últimos precedentes escritores bastante doctos: pero la parte del manejo necesitaba de muy fina aplicacion de la geometría sublime á una mecánica complicada y espinosa, para poderse exâminar sin el auxîlio de los modernos métodos geométricos. Pardies fué el primero que se atrevió á dar un pequeño ensayo, quando en su *Tratado de mecánica*, publicado en 1663, encontró por modo de exemplo una demostracion del camino que debe seguir la nave movida por un viento lateral. Este solo ensayo debia haber excitado la atencion de los geómetras y de los ma-

Matemáticos ilustradores del manejo de la nave.

Pardies.

marineros: nuevas teorías geométricas, nuevos conocimientos de práctica náutica, nueva ciencia teórica y práctica se veia nacer, y tomar la geometría y la náutica nueva extension, y nuevo esplendor. Pasaron sin embargo algunos años antes que ninguno se moviese á seguir aquel camino, que habia abierto el docto jesuita; y el primero que entró en él animosamente fué en 1689 el marino y geómetra caballero Renau en su obra original sobre esta materia, impresa por expresa órden del Rey en 1689 (*a*). Esta puso en agitacion á la mayor parte de los matemáticos; esta hizo nacer realmente la nueva ciencia del manejo de la nave; y esta produxo una nueva náutica. Dos determinaciones contiene la misma, dificiles é importantes: una de la situacion de la vela la mas ventajosa por lo que mira al viento y al rumbo; la otra del ángulo mas conveniente del timon con la quilla. La doctrina de Renau era conforme á la de Pardies,

Renau.

(*a*) *De la theor. de la manoeuvre des Vaisseaux.*

dies, y tuvo muchos célebres sequaces; pero encontró un muy fuerte é ilustre contrario en el docto Huingens, el qual manifestó algunas contradiciones en aquella doctrina, é hizo ver que segun los principios de Renau las velocidades directas de la nave debian ser mucho mayores, y que de aquellos no se deducia como mas ventajoso el ángulo que él señalaba á las velas (*a*). Respondió Renau (*b*) haciendose fuerte con la regla de la descomposicion de las fuerzas, que parecia serle enteramente favorable, y publicó despues una memoria, donde cree demostrar el principio de la mecánica de los fluidos, de que se habia servido, y que le habia sido contradicho por Huingens (*c*). Muchos fueron los partidarios del uno y del otro, y muchos mas se declararon por Renau que por Huingens. Pero este contaba á su favor á Jacobo Bernoulli, que valia por muchos, y tambien á Juan, que por

Huingens.

Jacobo y Juan Bernoulli.

(*a*) *Bibl. univers.* ann. 1693.
(*b*) *Journ. des Savans*, 1695.
(*c*) *Mémoir. où est demontré un princ.* &c.

por la relacion de la qüestion que le hizo el marques de l' Hopital se habia inclinado antes á la doctrina de Renau, y habiendola despues exâminado en sí misma se declaró por Huingens. Jacobo sostuvo con alguna modificacion la doctrina de este, y se apartó tanto de él, como de Renau en no querer considerar la velocidad del viento como infinita respecto á la de la nave (*a*). Juan trató con mas extension la materia (*b*), y unió á ella mas aparato de geometría y de cálculo de lo que hasta entonces se habia visto. No quiso seguir la opinion de su hermano en limitar la velocidad del viento, y esto le quitó el poder determinar con exâctitud la velocidad de las naves; pero llevó por otra parte ventaja, teniendo consideracion á la obliquidad con que el viento empuja la nave, lo que no habian hecho ni Jacobo, ni Huingens, ni otro alguno. Buscó el ángulo que debe formar la vela con

(*a*) *Act. Lips.* 1696.

(*b*) *Essai d' une nouv. théor. de la manoeuv. des Vaiss.*

con la quilla; sentado el que forma la vela con el viento, exâminó las resistencias sufridas por la nave, no solo suponiendola, como hacian los otros, como un rectángulo, sino pasando tambien á considerarla como formada por un rombo, por un romboides, y por segmentos circulares; calculó la curvatura de las velas, sus fuerzas, y los puntos donde estas pueden suponerse reunidas; trató en suma esta parte de la náutica con la debida extension, y con la correspondiente dignidad; y hubiera sido de suma utilidad su doctrina si hubiese juntado alguna práctica á la sublime geometría, que poseia tan completamente. Al contrario el P. Hoste, profesor por muchos años en el real colegio náutico de Tolón, y autor de dos obras muy alabadas, y bien acogidas de los marineros (*a*), hubiera acarreado muchas mayores ventajas á la práctica de la navegacion, si á los conocimientos, que con el continuado estudio habia ad- Hoste.

(*a*) *Théor. de la constr. des Vaiss., & l' Art des Armées navales.*

adquirido de esta, hubiese aplicado el sólido fundamento de mas justas y finas teorías. Con la atenta é infatigable lectura de las historias y de los viages, con el fin de instruirse mejor en la náutica, habia observado las ingeniosas y prudentes operaciones de los mas célebres capitanes de marina, y de los mas felices viageros: y estas observaciones le daban muchas luces para establecer sus leyes sobre el modo de construir las naves, manejar las velas, ordenar las esquadras, tomar las variaciones de los vientos, y sobre infinitas operaciones útiles, y aun necesarias en la práctica de la marina. Así que en todas aquellas materias que no exîgen principios geométricos, ó los mas recónditos conocimientos mecánicos, ha merecido la aprobacion de los perítos en la náutica, tanto prácticos como teóricos; pero donde se necesitaban sutiles indagaciones sobre las resistencias de los fluidos contra las superficies que los empujan, sobre las fuerzas de las velas para resistir al viento, y sobre otros arcanos mecánicos, no pudo sostener el peso de la dificultad, ni hacer que su doctrina obtuviese la aprobacion

cion de los teóricos, y la confianza de los prácticos.

Faltaba aun hacer una obra plenamente instructiva, que pudiese servir de seguro código para las oportunas leyes de la construccion, y del manejo de la nave. Escribió brevemente Parent sobre algunos puntos particulares; pero fundando sus cálculos sobre los principios usados por Jacobo Bernoulli, y despreciando otros muy necesarios, no pudo sacar los convenientes resultados (*a*). Escribió Pitot procurando reducir á práctica la teórica de este arte (*b*); pero siguiendo él la teórica de Bernoulli, y siendo esta poco adaptable á la práctica, no deduxo mas que reglas falsificadas por la experiencia, y contradichas por los hechos. Escribió Maclaurin como gran geómetra que era; pero superficialmente, y tocando solo un problema de los muchos que se debian tratar (*c*). Pero todos estos escritos se reducian

Otros escritores de náutica.

(*a*) *Essais & Rech. de Math & de Phys.* t. III.
(*b*) *La théor. de la manoeuv. des Vaiss. reduite en pract.* (*c*) *Trait. des fluid.* tom. II.

cian á un limitado número de proposiciones sueltas, y no formaban una obra completa, no nos daban un cuerpo de doctrina, no presentaban una exâcta ciencia.
Bouguer. Bouguer fué el primero que realmente pueda llamarse autor clásico en esta parte. Empeñado con mucho ardor en cumplir dignamente el empleo á que estaba destinado de hidrógrafo regio, habia ya escrito en 1727, con grande aparato de geometría, sobre la *arboladura de las naves*; y queriendo despues continuar completando la doctrina de la navegacion, dió en 1746 un tratado de la nave, de su construccion, y de sus movimientos. Despues en 1753 escribió un libro del pilotage mas fácil y sencillo para la inteligencia de los pilotos; y finalmente en 1757 publicó la grande obra del manejo de las naves que completó el curso de marinería. He expresado tal vez con sobrada individualidad las fechas de estas obras para hacer ver quan reciente sea el nacimiento de esta ciencia, y quan tierna deba considerarse, y distante de su madurez. Bouguer procuró juntar las verdades descubiertas por los geómetras anteriores, singularmente por Bernoulli; abandonó algunos principios suyos, que le parecieron, ó falsos, ó inconcluyentes; añadió sus reflexîones y sus inventos, y trabajó en mejorar la práctica, y proponer una completa teórica. Al mismo tiempo dió Eulero á luz en 1749 la grande obra de la ciencia naval, en la qual, guiado siempre de su genio analítico, reduxo al mas severo cálculo, y elevó á la mas sublime geometría todas las operaciones de la construccion y de la direccion de las naves: la figura, la colocacion y el manejo de cada parte; el timon, las velas, los palos, los remos, todo fué contemplado por él con severidad geométrica, todo fué sujetado á su amada analísis; y las resoluciones que ha dado, sino siempre son conformes á la verdad, sirven sin embargo de guia para buscarla en quantas disquisiciones se deben hacer para ilustrar el arte náutica. Bouguer y Eulero han obscurecido de algun modo á los escritores precedentes, y han venido á ser los maestros de esta ciencia: singularmente Bouguer, como ha procurado acomodarse á la práctica, y se ha hecho mas inteligible á todos, y mas fácil á la comprehen- Eulero.

sion de los geómetras y de los marineros, ha obtenido una fama mas universal, y se ha hecho mas clásico, y de mayor uso en la marina. Pero tanto él, como Eulero carecian de la observacion práctica, sin la qual no basta la mas sublime y severa geometría para establecer verdaderas teorías; así que enseñaron doctrinas poco adaptables á la práctica, y propusieron reglas falsificadas por la experiencia, y no pueden por ello servir de seguras guias en el arte de la navegacion. Necesitaba esta un hombre que versado en el álgebra y en la geometría, profundo en la mecánica y en la hidrostática, criado entre las olas del mar, y entre las tablas de las naves, y dueño de las mas doctas obras de los escritores náuticos, se dedicase con todo empeño á desentrañar esta materia, y nos diese una obra que comprehendiese toda la náutica, dictada por la mas perspicaz práctica, y atenta observacion, arreglada á los mas sólidos principios de la mecánica é hidrostática, reducida á la exâctitud de la mas severa geometría, y expuesta con las sencillas y generales fórmulas de una segura analísis. Tal era el docto geómetra

Juan.

y

y perito náutico Don Jorge Juan, el qual provisto de todos los auxîlios geométricos, é ilustrado de una continua y variada práctica, internado en los arsenales y en los puertos de España, de Francia y de Inglaterra, se puso á contemplar todas las operaciones de la marina, y á exâminar sus principios, rectificó las reglas, ó falsas ó inutiles, y estableció otras mejores, y así finalmente en 1771 presentó en su verdadero aspecto la ciencia náutica (*a*). Como esta no puede manejarse solidamente sino está fundada sobre los seguros principios de la mecánica y de la hidrostática, quiso sabiamente Juan anteponer este fundamento, y establecerlo y fixarlo sin peligro de ruina, y dió en el primer tomo un completo tratado de estas ciencias, donde con las luces de su larga experiencia pudo corregir varios errores, en que habian incurrido los geómetras anteriores, verificar sus sutiles teorías, reducirlas con el auxîlio de la geometría y del álgebra á mas seguros y útiles

(*a*) *Exám. marit. teorico-práctico*, &c.

les cálculos, y hacerse aun en estas autor clásico y magistral. De aquí pasando inmediatamente á la náutica describió las naves en sus varias partes, en sus usos, en sus figuras, y señaló para cada una las medidas mas oportunas, buscó los centros de las naves, y determinó el centro del volumen, el centro de gravedad, y el metacentro: las resistencias, los momentos, las fuerzas, las velocidades, el timon, los remos, las velas, los palos, las inclinaciones, los ángulos, y en suma todo quanto es digno de consideracion en el arte de navegar, todo es contemplado por él con ojos penetrantes y seguros, todo mirado en su verdadero aspecto, todo expuesto con precision y exâctitud, todo reducido á oportunas fórmulas y equaciones, todo sellado con la marca de la verdad geométrica y práctica. Los ingleses y los franceses han querido apropiarse una obra tan preciosa, é ilustrarla y enriquecerla con traducciones y comentos; y todos los venideros respetarán á Juan como maestro de la navegacion, como regulador de los vientos, como el Eolo y el Neptuno de los náuticos, el dios de la marina. Estos son

son los progresos que en poco tiempo ha hecho la náutica: las nuevas mejoras que se harán en la mecánica y en la hidrostática, manejadas por los prácticos observadores, acarrearán mas y mas adelantamientos á esta ciencia; y si ella procura siempre adquirirse igualmente los auxîlios de las matemáticas y de los conocimientos prácticos, podrémos fundadamente esperar verla acercarse á largos pasos á la deseada perfeccion.

CAPITULO VIII.

De la Acústica.

Aristóxeno entre los antiguos (*a*), y entre los modernos Eximeno (*b*), y tambien puede decirse d' Alembert (*c*), han sostenido vigorosamente, que la música es obra del oido, no tiene correlacion con la matemática, y solo debe ponerse entre las

La música puesta entre las ciencias matemáticas.

(*a*) *Harm. elem.* lib. II. (*b*) *Dell' orig. e delle regole della musica* lib. I, cap. II. (*c*) *Elem. de music. Disc. prélim.*

les cálculos, y hacerse aun en estas autor clásico y magistral. De aquí pasando inmediatamente á la náutica describió las naves en sus varias partes, en sus usos, en sus figuras, y señaló para cada una las medidas mas oportunas, buscó los centros de las naves, y determinó el centro del volumen, el centro de gravedad, y el metacentro: las resistencias, los momentos, las fuerzas, las velocidades, el timon, los remos, las velas, los palos, las inclinaciones, los ángulos, y en suma todo quanto es digno de consideracion en el arte de navegar, todo es contemplado por él con ojos penetrantes y seguros, todo mirado en su verdadero aspecto, todo expuesto con precision y exâctitud, todo reducido á oportunas fórmulas y equaciones, todo sellado con la marca de la verdad geométrica y práctica. Los ingleses y los franceses han querido apropiarse una obra tan preciosa, é ilustrarla y enriquecerla con traducciones y comentos; y todos los venideros respetarán á Juan como maestro de la navegacion, como regulador de los vientos, como el Eolo y el Neptuno de los náuticos, el dios de la marina. Estos son

son los progresos que en poco tiempo ha hecho la náutica: las nuevas mejoras que se harán en la mecánica y en la hidrostática, manejadas por los prácticos observadores, acarrearán mas y mas adelantamientos á esta ciencia; y si ella procura siempre adquirirse igualmente los auxîlios de las matemáticas y de los conocimientos prácticos, podrémos fundadamente esperar verla acercarse á largos pasos á la deseada perfeccion.

CAPITULO VIII.

De la Acústica.

La música puesta entre las ciencias matemáticas.

Aristóxeno entre los antiguos (*a*), y entre los modernos Eximeno (*b*), y tambien puede decirse d' Alembert (*c*), han sostenido vigorosamente, que la música es obra del oido, no tiene correlacion con la matemática, y solo debe ponerse entre las

(*a*) *Harm. elem.* lib. II. (*b*) *Dell' orig. e delle regole della musica* lib. I, cap. II. (*c*) *Elem. de music. Disc. prélim.*

las artes deleytables, y no tener lugar entre las ciencias exâctas. Seria para mí muy ventajoso el seguir esta opinion, y omitir este capítulo en un libro, que saldrá mas largo de lo que permite nuestra obra; pero el ver desde el tiempo de Pitágoras, desde el tiempo mismo de la cultura de las matemáticas colocada entre estas la música, aun con preferencia á la óptica y á la mecánica, y despues constantemente conservada en la *Encyclopedia* de los griegos, y en el *quadrivio* de los latinos, tratada en todos los siglos en los cursos de matemática, é ilustrada hasta en nuestros dias por d' Alembert, por Eulero y por los mas célebres matemáticos, no nos permite, dexando para otros el exâmen de la qüestion, abrazar la opinion de aquellos filósofos, y excluir de la historia de las matemáticas la de la acústica ó de la música. Sin embargo esperamos que nos sirva de alguna disculpa, si tratamos con sobrada restriccion esta materia, el que, segun la opinion de tan ilustres escritores y maestros de la misma, no deberia tener lugar en nuestra obra. Dexemos pues para los doctos y diligentes escritores de la

Origen de la música.

la música el buscar en Jubal el inventor de algunos instrumentos de sonido, ó de los cantos acompañados de este; dexemoslos recorrer el Egypto, la Palestina, la Frigia, la Grecia y otras antiguas naciones, y exâminar en ellas su música; dexemoslos entretener con los Thautes, con los Osirides, con los Apolos, con los Mercurios, con los antiguos Dioses, y con los héroes fabulosos á quienes sea deudora la humanidad por la invencion de algun instrumento músico; dexemos toda curiosa disquisicion de los primeros adelantamientos del arte música, y pasemos á mirarla solo quando se nos presenta reducida á cálculo con alguna apariencia de ciencia exâcta. Esto generalmente se atribuye á Pitágoras, el qual se quiere que haya encontrado las justas relaciones que deben tener las cuerdas, y los otros instrumentos, para causar sonidos, que sean armoniosos y musicales. Bien sabida es la fábula referida por Nicomaco (*a*), por Macrobio (*b*) y por otros muchos

Pitágoras.

Observacion del sonido atribuido á Pitágoras.

(*a*) *Enchyr. harmon.* l. I. (*b*) *Satur.* l. II. c. I.

chos de los sonidos armónicos de los martillos de un herrero, descubiertos por Pitágoras de pesos diversos de 6, 8, 9, 12, y de la aplicacion de estos pesos á cuerdas igualmente largas y gordas, con la qual formó siempre la armonía de los sonidos en quarta, quinta y octava, esto es con los pesos 6 y 12 en octava, 6 y 9 en quinta, y 6 y 8 en quarta. Por mas recibida que haya sido esta narracion de griegos y latinos, de antiguos y modernos, debe sin embargo ponerse entre las fábulas griegas, y despreciarse como falta no solo de verdad, sino de verisimilitud. Stillingfleet (*a*), Montucla (*b*), Burney (*c*) y algunos otros modernos, han observado la imposibilidad de formar con los martillos, dando golpes sobre el ayunque, una armonía sensible, y mucho mas con las cuerdas tirantes por tales pesos, los quales deberian ser no en razon simple, sino en quadrada de los sonidos. Pero

(*a*) *Princ. and. prouv. of harmony.*
(*b*) *Hist. des math.* part. I. lib. III.
(*c*) *Hist. of music.* tom. I. cap. V.

ro puede ademas observarse en esta relacion, que no solo se quiere manifestar á Pitágoras poco inteligente en la acústica, sino tambien falso raciocinador. Si los martillos, que dando golpes producian tales sonidos armónicos, eran de aquellos pesos, ¿por que aplicar despues los pesos para tirar las cuerdas, y no ponerlos en las mismas cuerdas, y hacerlas mas ó menos gordas segun dichas razones? Pero aunque una narracion semejante no sea realmente derivada del hecho, sin embargo es cierto que variada alguna circunstancia era conforme á la doctrina del filósofo músico Pitágoras. Está llena la antigüedad de hechos semejantes de sus discípulos, con los quales intentaban manifestar la proporcion de los intervalos músicos. Teon de Smirna (*a*) dice, que Laso ermoniense, é Hipaso de Metaponto encontraron estos intervalos poniendo en dos vasos enteramente semejantes diferentes porciones de agua, esto es, dexando el uno vacio, y el otro medio lleno, formaban la octava ó el diapason, el diatesa-

Otras observaciones semejantes.

(*a*) *De music.* cap. XII.

saron ó la quarta llenando de agua una quarta parte, y el diapente ó la quinta poniendo una tercera. No se quan verdadero será el hecho de estas consonancias en los imaginados vasos, y temo mucho que pueda ser desmentido por quien haga una exâcta experiencia. Tal vez podrá parecer mas conforme á la verdad otra invencion del mismo Hipaso, que se ve referida por un escoliador de Platon en un fragmento publicado recientemente por Morelli (a). Tomaba él quatro platos de bronce de igual diámetro, pero de solidez diversa, de modo que el primero fuese sexquitercio del segundo, sexquialtero del tercero, y doble del quarto, y tocando estos quatro platos formaba una sinfonía. Estos y otros hechos semejantes, sino son del todo ciertos, á lo menos siendo referidos por Nicomaco, por Teon y por otros matemáticos y maestros de música, y creidos de todos los antiguos, prueban ciertamente quales fuesen sus ideas en estas ma-
té-

(a) Aristid. *Orat.* &c. ex Bibl. Ven. D. Marci, Præf.

terias, y hacen ver quan groseramente pensasen en la parte acústica, ó bien sea en la mecánica de las vibraciones sonoras, ó de la produccion de los sonidos, y como opinasen sobre las proporciones armónicas.

Diversas sectas de los griegos.

Muchas fueron sobre estas las diversas sectas de los griegos; donde era tan universal el amor y la cultura de la música, donde el estudio de la misma tenia tanta parte en la educacion pública y privada, donde no solo los músicos y los poetas, sino tambien los filósofos, los matemáticos y los legisladores, procuraban con empeño la perfeccion de esta ciencia, precisamente habian de nacer sobre ella diferentes opiniones, y sentencias contrarias, debian formarse diversos partidos y salir varias sectas. Nosotros dexaremos que Martini, Burney y otros historiadores de la música hablen de la secta Agenoria, de la Damonia, de la Epigonia, de la Eratoclea y de otras anteriores á Aristóxeno, y de la Archestracia, de la Agonia, de la Feliscia, de la Ermipia y de otras posteriores á él, y solo presentaremos brevemente las tres que obtuvieron
ma-

mayor crédito en toda la antigüedad, esto es, la Pitagórica, la Aristoxénica y la Tolomayca. Los pitagóricos, apasionados á las razones numéricas, y á las sutilezas metafísicas, querian regular toda la música con sus raciocinios, y nada se cuidaban del juicio de los sentidos. De aquí pasaron á fixar que no podia haber consonancias sino de intervalos que se expresasen por razones en extremo sencillas, como quarta, quinta y octava, por estar comprehendidas en las razones $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$. Eran curiosas y seductoras las muchas y bellísimas combinaciones de razones numéricas y armónicas, que sabian sacar de ellas los pitagóricos, y que daban alguna autoridad á su sistema; pero no eran menos patentes los errores á que los conducia un raciocinio semejante. Por exemplo la octava doble, ó la décimaquinta, como expresada por la simple razon de $\frac{1}{3}$, era recibida por consonancia; pero la quarta sobre la octava, ó bien sea la undécima octava de la quarta, como expresada por la razon $\frac{3}{8}$, era desechada como disonante por mas que el oido juzgase diversamente, y la recibiese por consonante. Y así se deri-

Pitagórica.

rivaban algunos otros errores de la teoría pitagórica, que la hacian comparecer poco segura, sin embargo de ser abrazada de tantos y tan profundos filósofos. Así que la abandonó Aristóxeno, y estableció una nueva doctrina, que tuvo tambien muchos sequaces, y formó una secta igualmente célebre que la pitagórica. Aristóxeno, hijo de un músico, y discípulo de Aristóteles, debia sujetarse mas al juicio de los sentidos, que á los raciocinios matemáticos; y en efecto despreciaba las calculaciones numéricas, y las consonancias ideales y abstractas de Pitágoras fundadas sobre las razones de los intervalos, y solo abrazaba las que podia determinar el oido por la diferencia de los tonos. Suponia que un tono fuese un intervalo bien conocido, que el oido por la comparacion de la quarta con la quinta pudiese juzgar con suficiente exâctitud y facilidad; y por esto hacia al tono la medida de los otros intervalos, de los mas grandes por adicion, y de los mas chicos por detraccion: la quarta era segun él compuesta de dos tonos y medio, la quinta de tres

Aristoxénica.

tres y medio, y la octava de cinco tonos y dos semitonos, ó de seis tonos. Pero esta teoría, ademas de no ser conforme á la verdad, se opone al mismo principio de Aristóxeno, porque no puede, como él quiere, comprehenderla facilmente el oido, y exîge mas cálculos y combinaciones numéricas, que la teoría y las razones de los pitagóricos. Los antiguos, tanto pitagóricos, como aristoxénicos, no conocian mas que tonos mayores en razon de $\frac{9}{8}$, qual es ahora entre quarta, y quinta ó *fa*, *sol*, que es decir 32, 36: de aquí provenia que las terceras eran para ellos disonantes, como tambien lo serian para nosotros ateniendonos á aquellas razones. Pero era muy fácil reflexîonar que algun temperamento en aquel sistema de tonos podia producir mucho aumento en la armonía; y en efecto esto procuró Tolomeo. Didimo alexandrino, famoso gramático del tiempo de Neron, erudíto filólogo, é infatigable escritor, entre los muchos centenares de libros que dexó escritos sobre todas materias, se dedicó tambien á tratar de la música, y compuso una obra

Tolomayca.

obra de la diferencia de la pitagórica y de la aristoxénica (*a*). Esta obra, de la qual, segun dice Porfirio (*b*), sacó Tolomeo la mas útil enseñanza, contenia la invencion de introducir en la escala el tono menor, y de este modo hacer la tercera verdaderamente armónica y consonante. Tolomeo supo aprovecharse de esta invencion, y formó de ella el principal ornamento de su sistema. Didimo colocó en la escala despues del semitono mayor $\frac{16}{15}$ el tono menor $\frac{10}{9}$, y despues el tono mayor $\frac{9}{8}$: Tolomeo mudó este órden poniendo el tono mayor despues del semitono, y despues del tono mayor el menor, por tener de este modo el menor número posible de terceras alteradas. Parece que Tolomeo estuviese inflamado de vivos deseos de formar nuevas escalas, y de variar las de los músicos anteriores; pues en efecto ha dexado ocho formas diferentes de la escala diatónica, añadiendo tres enteramente suyas, é introduciendo muchas novedades en las otras cinco recibidas por los mú-

Tom. VII. Lll

(*a*) Porphyr. *Com. in harm. Ptol.* (*b*) *Com.* &c.

músicos anteriores. El número de los tonos fué tambien reformado por él; y de trece ó quince que se contaban en su tiempo, los reduxo á siete, creyendo ser mas cómodo el hacer tantos tonos, quantas son las especies de la octava (*a*). Estas y otras verdades formaron el sistema músico de Tolomeo, que fué en algunas partes menospreciado, pero en otras tuvo quasi tantos sequaces como el astronómico del mismo. Como el tetracordio era el fundamento sobre que se erigian las teorías de los griegos acerca de la música, nacian diversas opiniones entre ellos relativas á las escalas de los tetracordios. Tres eran estos entre los griegos; el diatónico, que usaba solo los tonos, el cromático, que procedia tambien por semitonos, y el enarmónico, que hacia tambien uso de los quartos de tono; y sobre el sistema de cuerdas, sobre la constitucion, ó sobre la escala de los tonos de cada uno de ellos se dividian las opiniones. Diversas eran las razones numéricas, y diversos los intervalos de Archîtas, de los de Aristóxeno: Eratós- te-

Diversidad de tetracordios, y de sus escalas.

(*a*) *Harmon.* lib. II, cap. IX.

tenes, Didimo, Tolomeo y otros muchos, proponian otros diversos. El tetracordio enarmónico debe su orígen, segun dice Aristóxeno, citado por Plutarco (*a*), primero á Olimpo, despues á los lidios y á los frigios; pero la dificultad de la execucion de aquellos quartos de tono, y la facilidad de dar ahullidos y chillidos, hizo que despues lo abandonasen los mismos griegos, y no se usaba ya en tiempo de Plutarco y de Tolomeo. Sobre la diversidad de los modos lidios, frigios, dóricos y tantos otros, y sobre la combinacion de estos modos eran tambien muy diferentes las opiniones de los griegos, como lo eran igualmente sobre la forma, y sobre las proporciones de los instrumentos músicos; y en todo se veia quanto ocupase la música las meditaciones y el estudio de aquella nacion singular.

Diversidad de los modos.

Si quisieramos entrar en el inmenso pielago de los escritores que se emplearon en ilustrar esta ciencia, ¿como podriamos poner fin á este tratado? Tenemos la fortu-

Escritores de música.

(*a*) *De música.*

tuna de que Fabricio (*a*) nos ha dado un catálogo bastante completo de estos escritores; y posteriormente Martini (*b*), no solo ha reconocido quantos escritores, y quantas noticias de ellos ha encontrado en Fabricio, en Meibomio, en Vosio y en otros escritores, sino que llevado del justo amor á su amada arte, ha añadido otros hombres ilustres, que tal vez una severa crítica no los hubiera admitido; pero de todos modos la diligencia de estos escritores nos debe dispensar de un trabajo semejante por mas que pudieramos añadir alguna nueva noticia, aunque poco importante. Diremos solo que despues de Laso ermiones, contemporáneo de Xenofonte y de Simonides, hacia la olimpiada LVIII, creido por los mismos griegos antiquísimos el primero que hubiese escrito de música, hasta los tiempos mas recientes de la literatura griega, han sido infinitos los músicos, matemáticos, filósofos, políticos, gramáticos, históricos y escri-

to-

(*a*) *Bibl. gr.* tom. II, lib. III, cap. X.

(*b*) *Stor. della mus.* tom. III, cap. VII, VIII.

tores de todas clases, que han empleado sus erudítas fatigas en ilustrar este arte, y podrá decirse con verdad, que tal vez de ninguna otra podrá contarse tanta copia, y de ninguna ciertamente nos ha quedado igual número. ¿Donde se encontrarán escritos griegos de la pintura, de la escultura y de la arquitectura? ¿Que nos queda de la poética fuera de la obra imperfecta de Aristóteles? De la misma retórica, que ha conservado mas monumentos didácticos, no tenemos tantos escritores como se leen aun de la música, publicados ó recopilados por Meursio, Meibomio, Wallis y otros. Las mismas matemáticas, la aritmética, la geometría, y aun tal vez la astronomía, no pueden gloriarse de tantos doctores griegos, quantos tenemos de la música; y los mismos maestros de las otras partes de las matemáticas lo fueron tambien de esta: el aritmético Nicomaco el geómetra Euclides, el astrónomo Tolomeo dividieron sus estudios entre su predilecta ciencia y la música. Estos, Aristóxeno, Aristides, Quintiliano, Porfirio, Teon y los otros escritores que se conservan aun, forman una vo-

lu-

luminosa biblioteca de la música griega.
Su mérito. Pero en medio de tanta copia de escritos músicos debemos confesar que hay aun mucha escasez de buena doctrina, y reconocer no poca esterilidad en medio de tanta fecundidad de escritores. Solo el fragmento de la poética de Aristóteles es aun al dia de hoy venerado por los poetas como el código de sus leyes. Su retórica, y los libros de Demetrio, de Dionisio de Halicarnaso, de Longino y de Hermógenes son los libros clásicos de los estudiosos de la eloqüencia. Euclides, Apolonio, Archîmedes y Tolomeo son tenidos todavia por los oráculos de los matemáticos. Solo de la música en tanta copia de doctos escritores no tenemos un verdadero maestro. Aristóxeno es tenido por Burney como el Rameau griego, que tuvo en Euclides su d' Alembert *(a)*; pero tanto Aristóxeno como Euclides, poco mas enseñaron que nombres y definiciones. Nicomaco es el único entre los muchos escritores de la música pitagórica que se haya

(a) *His. of music.* cap. V.

ya conservado *(a)*. ¿Pero que saca Nicomaco de la música, sino vanos cotejos de las voces y de los astros, é inutiles cálculos de las razones de los sonidos? Aristides Quintiliano, segun dice Meibomio *(b)*, recogió en sus tres libros sobre la música, quanto enseñaron los aristoxénicos de las partes musicales de este arte, y quanto imaginó la antigüedad sobre la moral, y sobre la física y cosmología de la misma, y puede decirse haber él juntado la doctrina y la gloria de todos los músicos antiguos. En efecto Aristides nos da alguna mas distinta idea del ritmo, y de otras partes de la música griega que los otros escritores griegos; pero ademas de que una gran parte de su obra se emplea en vanas doctrinas de la armonía del alma, de comparaciones de los pulsos con los ritmos, de la sensibilidad de los instrumentos músicos, y de otras inepcias semejantes, todo lo que mira á la parte verdaderamente armónica y musical, no es mas

(a) Meibom. *Præf. in Nicom.*
(b) In Aristid. Quint. *Ep. ad Lect.*

mas que explicaciones y definiciones, y doctrina meramente teórica, que poco ó nada conduce para la verdadera práctica de aquel arte. Tolomeo, como nos dice Porfirio (*a*), tomó la mayor parte de lo que escribió de los escritos de los otros griegos, y fué, segun el juicio de Burney (*b*), el mas docto, mas exâcto y mas filosófico escritor en esta materia. Pero el mismo Tolomeo es en muchos puntos ininteligible, y en otros de raciocinios y demostraciones pasa á sueños y delirios. Generalmente en tanto número de escritos de música no puede encontrarse uno que realmente sea sólido é instructivo, ni hay entre tantos ilustres escritores un Aristóteles, un Demetrio, un Longino, un verdadero maestro. Dexamos para otros mas llenos de conocimientos, y menos faltos de tiempo, el indagar filosoficamente las verdaderas causas de este fenómeno literario, y solo insinuaremos, que tal vez el haber tratado todos la música como una ciencia teórica, mas que como arte prácti-

(*a*) *Com. in Harm. Ptol.* (*b*) *Hist.* &c. l. c.

tica, ha producido en sus escritos aquellos vanos raciocinios, y aquella esteril aridez.

Ciencia acústica de los griegos.

Pero ¿podrémos sin embargo decir que realmente llegó á alto grado su saber en esta materia? Ciertamente no puede decirse que fueron muy grandes sus conocimientos mecánicos en la formacion del sonido. Nicomaco (*a*) nos explica con extension la doctrina de los pitagóricos, y el estrepito y sonido que querian produxesen todos los cuerpos movibles, y las proporciones acústicas de los sonidos musicales que creian poder deducir del movimiento circular de los siete planetas. Sé que Gregori (*b*), Maclaurin (*c*) y algun otro moderno han pretendido encontrar en este sistema pitagórico el sublime descubrimiento de Newton de las leyes de la atraccion de los cuerpos celestes; pero confieso que no puedo ver en él mas que una suma escasez de conocimientos as-

 tro-

(*a*) *Enchir. harm.* lib. I.
(*b*) *Astron. Phys. & Geometr. Elem.* Præf.
(*c*) *Expos. de la phil. Newton.* lib. II. cap. II.

tronómicos, é ignorancia de los mecánicos y acústicos. Esta ignorancia la vemos por otra parte manifestada en todos los griegos, por las relaciones esparcidas y creidas de los martillos, de los vasos y de los platos; las quales prueban sin embargo que tenian alguna confusa idea de los principios del sonido, y de los elementos de longitud, solidez y tension que deben entrar en su cálculo. Aristóteles en el pequeño tratado *Del objeto del oido, y de las cosas á él pertenecientes;* y Eliano en el segundo comentario del *Timeo* de Platon, referidos por Porfirio (*a*), son los únicos antiguos que yo sepa, ademas del mismo Porfirio, que hayan tratado de la mecánica del sonido; pero aquellos profundos filósofos solo supieron descubrir que el movimiento del ayre es la causa del sonido, que el grave lo produce el movimiento retardado, y el agudo el acelerado, y que por esto las cuerdas mas largas y mas gordas harán un sonido mas grave, padeciendo groseras equivocaciones en hacer su aplicacion á los instrumentos de

(*a*) *In harm. Ptolom.*

de ayre, y generalmente sabiendo muy poco de la mecánica del sonido. Pero sin embargo no tendré dificultad en dar crédito á los portentos que se refieran de la finura, delicadez y gusto de la música griega. Los griegos de una tan fina sensibilidad para las bellezas de las artes, que forman la admiracion de todos los siglos; los griegos tan delicados particularmente en el oido, que hasta en los escritos y discursos prosáicos no podian sufrir con paciencia una palabra dura, una aspera union de silabas ó de letras, una cláusula falta de armonía, un periodo poco sonoro, una pronunciacion menos suave, y en todo buscaban la eufonía, el número, la sonoridad; los griegos tan apasionados á la música, que en los estudios escolásticos, y en la educacion civil jamas la perdian de vista; que no solo en los templos y en los teatros, sino que tambien en las mesas, en los convites, en las visitas y en toda concurrencia usaban de la música como el mas digno culto de los Dioses, y el mas suave deleyte de los hombres; los griegos tan prácticos en la misma, que no habia noble alguno ni ple-

Mérito de su música.

 be-

beyo, grande ni chico, militar, político ni literato, que no formase de ella su estudio, su ocupacion y sus delicias; los griegos, que á tan alto punto elevaron todas las artes y las ciencias, ¿á que perfeccion no habrán llevado la música? Llámense en hora buena faltos y reducidos sus instrumentos, tengase por sencilla y llana su melopeya; la fina, animada, exâcta y perfecta execucion, es la que da valor al canto y al sonido, que recompensa qualquier mérito de los instrumentos, y de la composicion, y aquella finalmente que constituye la perfeccion del arte música. Pero nosotros dexamos para los historiadores de ella el manifestar distintamente sus vicisitudes, el distinguir mas exâctamente de lo que se ha hecho hasta ahora, que union tuviese la música con la poesía, quales han sido las mejoras que se le han acarreado tan celebradas de algunos escritores, qual el corrompimiento de que otros se lamentan, y qual la verdadera índole, qual la época de su perfeccion y de su decadencia, y el darnos una idea mas distinta y exâcta de lo que la tenemos de la música de aquella nacion, que

que tan justamente interesa la erudíta curiosidad. De los efectos médicos, morales y políticos de la música griega se ha escrito tanto en estos tres últimos siglos, y particularmente en el nuestro, que seria inutil el querer hablar ahora mas. Sea la que fuese la verdad de los hechos que nos han descripto los antiguos, podrá decirse que estos no deben darse por prueba de la delicadez del gusto griego: efectos semejantes no tanto provienen de la perfeccion de la música, quanto de la disposicion del que la oye; y mas se han visto y se verán siempre en pueblos rústicos con música informe, que en naciones cultas donde las artes hayan llegado á adquirir alguna perfeccion.

Efectos de la música griega.

No nos detendremos mas en la música de los romanos, los quales si en la práctica y en los instrumentos se diferenciaron de los griegos en algo, que pueda interesar la curiosidad de los historiadores del arte, nada adelantaron en la teórica, ni dexaron escritos que ilustrasen esta ciencia, y que puedan merecer nuestras investigaciones. San Agustin, Casiodoro, Marciano Capela, y mas que todos Boecio, son

Música de los romanos.

son los escritores latinos de la música; pero escritores que no dixeron mas que lo que habian aprendido de los griegos, á quienes seguian ciegamente. Mayores luces podrán tal vez sacarse de los escritos de los árabes, los quales mas que los latinos, ilustraron la música con los escritos, y le dieron el auxîlio de los conocimientos matemáticos. En efecto por un códice de Al-Farabi intitulado *Elementos de música* (*), que se conserva en la

De los árabes.

(*) Al-Farabi en el libro segundo de esta obra expone las opiniones de los teóricos, que habian llegado á su noticia, y manifiesta quanto hubiese adelantado cada uno de ellos en aquella ciencia, corrige sus errores, y, como dice él mismo, llena el hueco de su doctrina para provecho de los censores de aquellos autores. Dirigido por las luces de la física se burla de las vanas imaginaciones de los pitagóricos sobre los sonidos de los planetas, y sobre la armonía de los cielos. Explica físicamente como por las vibraciones del ayre se produzcan los sonidos más ó menos agudos de los instrumentos, y que miras deben tenerse en la figura, y en la construccion de ellos para tener los sonidos que se desean. El freqüente uso que hace de las palabras grie-

la biblioteca del Escorial, se ve que los árabes, aunque sequaces de la doctrina de los griegos, no la abrazaron sin exâmen; que tuvieron tal vez mas justos conocimientos de la parte mecánica de los sonidos que sus propios maestros, y que en varios puntos corrigieron los errores, y suplieron la falta de su doctrina. Pero de los escritos arábigos sobre la música que están sepultados en las bibliotecas, poco ó nada sabemos para poder sacar de ellos al-

griegas escritas en árabe, manifiesta quan griega fuese la doctrina arábiga de la música, y la figura de una escala, ó de la armonía de quince tonos que nos presenta, al paso que prueba no haber abrazado la secta de los tolomaycos, no haciendo consonantes las terceras; prueba igualmente que tampoco era de la pitagórica, puesto que hacia consonantes la undecima y la duodecima, ó bien sea las octavas de quarta y de quinta. He creido una cosa grata á los doctos lectores el referir estas bréves noticias para dar alguna idea de los escritos arábigos sobre la música, y dar igualmente un testimonio público de mi reconocimiento al eruditísimo Señor Casiri, que me hizo el favor de formarme un largo extracto.

alguna luz, y conocer los progresos que tal vez deberá aquella ciencia á sus erudítas fatigas, aunque nos son poco conocidos. Mas distintas y claras noticias podriamos dar de la música de la iglesia si el mero uso del canto y del sonido, si alguna variedad y alguna diferencia introducida en el mismo en varias iglesias, y en tiempos diversos, y no el curso solo de la doctrina acústica y música fuese el objeto de nuestras especulaciones. Remitimos pues á los curiosos investigadores de estas noticias á la grande obra de Gerbert sobre el canto, y sobre la música de la iglesia (*a*), á Lebeuf (*b*), á Burney (*c*) y á otros escritores históricos ó didascalicos de la música, que hablan mucho de la sagrada, y solo insinuamos que de la profana y gentílica música de los griegos pasaron á la iglesia griega los modos de los cantos sagrados: que de la iglesia griega ú oriental, como dice S. Agustin (*d*), los introduxo S. Ambro-

Música de la iglesia.

(*a*) *De cantu & musica sacra.*

(*b*) *Traité hist. & practic. par le chant eccles.*

(*c*) Vol. II. (*d*) *Confess.* lib. IX, cap. VII.

brosio en la suya de Milan, y despues en las otras occidentales; que casi dos siglos despues reformó san Gregorio el canto, y desechado el suave, y algo refinado, que en muchas iglesias se usaba, introduxo otro mas llano y serio, ó, por decirlo así, mudó el canto *figurado* en canto *llano*, ó bien fuese el inventor de la nueva música eclesiástica, ó solo, como algunos quieren, compilador de varios modos usados en varias iglesias mas conformes á su devoto espíritu; que de la iglesia romana se extendió en diversos tiempos la música gregoriana á todas las otras del occidente; que en las orientales introduxo S. Gregorio Damasceno una reforma en la música, semejante á la gregoriana; que las iglesias griegas aun modernamente han conservado su música, sin desdeñarse de adoptar alguna parte de la nuestra (*) ; y que

(*) V. Lampadario, Leon, Alacio y otros. La biblioteca Naniana en Venecia contiene tantos códices de varios siglos con las notas musicales, que ellos solos dan una casi seguida serie de monumentos para completar la historia de la música eclesiástica griega.

que dexando los griegos posteriores, que poco, ó por mejor decir ningun influxo han tenido en nuestra música moderna, Beda, ó quien sea baxo su nombre, Ubaldo, Odon y otros latinos de los tiempos baxos escribieron sobre la música, sujetandose á la práctica de las iglesias occidentales, pero usando con freqüencia palabras técnicas griegas, que claramente manifiestan derivarse la música eclesiástica de la griega; y que finalmente en el siglo XI el célebre Guido Aretino formó de algun modo una nueva época en esta arte, que la diferenció de la griega, y la hizo parecer nueva, y de alguna manera dió principio á la música moderna.

Guido Aretino. Muchas son las obras que escribió Guido sobre esta materia, las quales por la mayor parte han quedado olvidadas en las bibliotecas, quando sus inventos músicos obtuvieron desde luego fama universal, y despues le han adquirido nombre inmortal en la posteridad. Las produciones del ingenio, no los trabajos de una penosa fatiga, son las que se transmiten á los siglos posteriores, y á las remotas naciones: y Guido por algunos in-

inventos músicos será inmortal, y celebrado en todos los pueblos cultos, mientras que tantos venerados doctores, y graves escritores de su tiempo yacen eternamente sepultados entre el polvo con sus libros escolásticos, desconocidos y obscuros á la docta posteridad. Guido tomó, como los griegos, por fundamento de la música el tetracordio diatónico; pero como los griegos habiendo unido dos tetracordios tuvieron por conveniente añadirles una cuerda, que se llamaba *proslambanomenos*, así él añadió otra, y formó un hexâcordo, donde felizmente se combinaban varias modificaciones de tonos, y esta cuerda señalada por él con la G griega es la famosa *Gamma* celebrada entre las invenciones de Guido. Sobre el hexâcordo debió él establecer su solféo, y á este fin tomó las seis sílabas tan celebradas del hymno de san Juan, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, queriendo que la cuerda fundamental de cada una de las tres propiedades del canto se entonase con el *ut*, y las otras sucesivamente con las siguientes, y dispuso de modo los hexâcordos que obligó á los cantores á no pasar de un salto de la pro-

 pie-

piedad, que llaman de *Bequadrado*, á la de *Bemol*, ni al contrario, sin pasar por la propiedad que llaman de *natura*. La mano armónica tan celebrada por los escritores de aquel tiempo, la escritura, ó los caractéres músicos, esto es, los puntos, las rayas y las claves, se creen tambien inventos de Guido; y el contrapunto, ó como él dice la *diafonía*, de lo que quiere gloriarse la música moderna sobre la antigua, aumenta tambien el mérito músico de aquel famoso maestro: y si Burney (*a*) pone fundada duda sobre la total originalidad de Guido en alguno de estos inventos, conviene sin embargo en atribuirle en todos tantas mejoras, que puede con algun derecho pasar por inventor. Despues de las novedades musicales atribuidas á Guido, la mas importante ha sido la de las notas, ó de los caractéres de los tiempos, que señalan quanto deba detenerse la voz sobre cada sílaba. Esta generalmente la refieren los modernos á Juan de Muris en el siglo XIV, bien que el mismo Juan y otros escritores mas antiguos, la derivan de Fran-

Francon y Juan de Muris.

(*a*) Tom. II, cap. II.

Francon de Colonia, docto monge del siglo XI, y Burney (*a*) por algunas expresiones del mismo Francon, y por otras memorias contemporaneas cree debersele dar aun mayor antigüedad. Otra novedad introduxo posteriormente Felipe de Vitri, si es cierto, como se quiere comunmente, que él añadiese á las notas musicales la *mínima*, la qual por otra parte se ve ya anteriormente nombrada por el Papa Juan II en un decreto del año 1322. El mismo Felipe se cree tambien el primer compositor de los motetes, que despues han estado tan en uso en la música moderna: y la primera coleccion y publicacion de motetes notados en música con sus partes, que ha llegado á mi noticia, ha sido la de Victoria de Avila, hecha en Roma en 1585 (*b*). Dexaremos para los doctos historiadores de la música el exâmen de estos puntos erudítos, y solo diremos que has-

Felipe de Vitri.

(*a*) Ibid. cap. III.

(*b*) *Thomæ Ludovici à Victoria Abulensis Motecta festorum totius anni cum Communi Sanctorum á 4, 5, 6, & 8 vocibus.*

hasta en aquellos siglos de tinieblas y de ignorancia, en aquellos siglos vacíos para la historia de las otras ciencias, puede contar la música muchos ilustradores, y gloriarse de muchos útiles adelantamientos: el servicio eclesiástico, y el culto divino excitaban el ardor de los devotos y religiosos escritores á procurar mejoras á aquel arte, que se creia casi necesario para su decoro. En efecto Guido y Francon eran monges, y en el largo catálogo que podria formarse de los escritores de música de aquellos tiempos, pocos se encontrarán que no sean monges ó eclesiásticos. No por erudicion y cultura, no por completar el quadrivio de las escuelas, no por ilustrar las doctrinas matemáticas, sino para cantar dignamente los divinos oficios se cultivaba el estudio de la música; y los monumentos mas antiguos que tenemos de todas las variaciones que se introducian en aquella ciencia, todos provienen de los libros de coro, ó de los cantos de las iglesias.

Introduccion de la música en la poesía vulgar.

Pero cultivandose tambien entonces con ardor la poesía vulgar, y ocupandose en ella muchos nobles personages, y hasta

ta los mismos príncipes, se empezó igualmente á buscar el auxîlio de la música para mayor ornamento de la poesía vulgar; y muchas veces los poetas no solo componian la poesía, sino que tambien inventaban el tono con que debia cantarse, y á veces ellos mismos notaban en música sus composiciones poéticas. El mas antiguo monumento, que ha llegado á mi noticia, es uno que se encuentra en la biblioteca Vaticana de Anselmo Faidit, de principios del siglo XIII, á la muerte de Ricardo primero, llamado *Corazon de Leon*, tambien poeta, si es cierto, como se dice, que las notas musicales sean del mismo poeta Faidit. Posteriores á este, pero de mas auténtica legitimidad son las *Cánticas* del rey de Castilla Alfonso *el Sabio* de la mitad de aquel siglo, que exîsten en la biblioteca de Toledo con las notas músicas, y con las correcciones ó apostillas del mismo rey. Burney refiere otro poema de la Vaticana, compuesto por Tibaldo rey de Navarra, el qual seria anterior á las *Cánticas* del rey don Alfonso, si su escritura musical fuese ciertamente obra del mismo tiempo del poéma; pero el códidice de la Vaticana, segun el mismo Burney (*a*), es una copia sobrado incorrecta para creerla muy inmediata al tiempo de la produccion del original; lo que tambien puede disminuir no poco la fé que deba darse á la antigüedad de la música de las canciones de Faidit. Arteaga (*b*) cita al monge Francon, que refiere un verso provenzal, ó mas bien frances, puesto en música, el qual podrá acaso dar alguna prueba de otro poéma anterior al de Faidit con las notas musicales. No sé en que forma, ni con que objeto trae Francon aquel verso: si la aplicacion de las palabras á las notas musicales está realmente tomada del mismo poéma, será ciertamente una prueba incontrastable; pero si solo la hizo Francon siguiendo el hilo de su tratado, no podrá traerse por exemplo de dicha anterioridad. En efecto observo que Burney, que ha hecho una diligentísima y muy individual analísis de los tratados músicos de Francon, no hace mencion alguna del poéma, de donde este saca dicho verso, y

(*a*) Lib. C.
(*a*) *Le Rivol. del Teat. music. ital.* t. I. c. IV.

y antes bien refiere como el primer monumento que él conozca de poesía vulgar puesta en música la sobredicha cancion de Faidit. Pero sea la que se fuese la antigüedad de la música en la poesía vulgar, lo cierto es que dicha aplicacion, que ahora es el principal objeto de los estudios músicos, no merecia en aquellos tiempos mucha atencion de los doctos, y que esta enteramente se dirigía al mejoramiento de la música de la iglesia. Para esta se tenian escuelas privadas mas prácticas, que teóricas en las catedrales y en los monasterios, y á esta se referian todos los escritos de música que entonces salian á luz, tanto prácticos como teóricos.

Sin embargo era aun en aquellos tiempos mirada de algunos la música como una ciencia especulativa, y una parte de las matemáticas, mas que como un arte deleytable, ó un instrumento de la devocion; y no solo tenia acogida en las iglesias y en los claustros, sino tambien en las universidades literarias. La primera que yo sepa haberla honrado con gentil acogida, fué la Universidad de Salamanca, en la qual, segun el testimonio muy autorizado Escuelas públicas de música.

en esta materia del célebre Francisco Salinas (*a*), se erigió ya en el siglo XIII por el rey Alfonso el *Sabio* una cátedra de música. *Intellexit enim*, referiré para mayor autoridad sus mismas palabras. *Alphonsus Castellae rex hujus nominis decimus cognomento* Sapiens, *non minus musicae disciplinam, quam caeterarum mathematicarum, in quibus ille maxime excelluit disci oportere. Quamobrem inter primas, et antiquissimas cathedram illius erexit.* En las universidades de Inglaterra se ven desde el siglo XV algunos graduados de música, ó bachilleres, ó maestros, ó doctores, como Hambois, Habengton, Saintwix y algunos otros. Escuela de música tenia igualmente desde la mitad del mismo siglo la Universidad de Bolonia, erigida por el Papa Nicolao V: y en efecto en el año 1482 imprimió en ella una obra de música Bartolomé Ramos (*b*), donde se ve que habiendo él ocupado por algunos años la cátedra de música de Salamanca, regentaba algun tiempo habia la de Bolonia, á don-

(*a*) *De Música* Præf. (*b*) *Tract. de Música.*

donde habia sido honrosamente llamado. No sé como Sassi (*a*) y Tiraboschi (*b*) hayan podido dexarse seducir de un epigrama, tal vez no bien entendido de Biffi, para asegurar, que ningun príncipe habia aun pensado en fundar escuela pública de música; que Ludovico Sforza duque de Milan, fué el que dió el primer exemplo; y que Franchino Gafurio fué el primer profesor en aquella ciudad; lo que no pudo ser mas que á fines del siglo XV. En todo aquel siglo, y aun antes, habia escuelas públicas en muchas universidades, y en ellas se explicaba comunmente la obra de Boecio, la qual, como él mismo confiesa, no es mas que una compilacion de la doctrina de Nicomaco, y de otros pitagóricos; así que quantos estudiaban entonces la música, todos se formaban con la enseñanza pitagórica sobre las razones de los tonos; y los escritores eclesiásticos no habian pensado en introducir en ellos alguna reforma. Restablecimiento de la música.

Ooo 2 Pe-

(*a*) *Hist. typ. Mediol.* (*b*) *Storia della Letter. Ital.* tom. VI, part. I, lib. III, cap. II.

Pero en aquel siglo se hizo mas comun la lengua griega, y los escritores griegos llegaron á ser mas familiares y domésticos, y por ello los profesores erudítos se dieron á estudiar no solo á Boecio, sino á todos los músicos griegos, é introducir en su arte alguna mayor delicadez. Entre los muchos sistemas músicos de los griegos habia el sistema *atemperado*, que hemos insinuado brevemente en el tolomayco; esto es un sistema que para formar mejor armonía introducia alguna alteracion en los intervalos (*a*); y en efecto los tolomaycos alteraron la razon del tono añadiendo el tono menor. Pero los latinos todos pitagóricos ó boecianos, juraban ciegamente en la doctrina de sus maestros, y no pensaban en abrazar el temperamento de los tolomaycos, y ni aun tal vez lo conocian, lejos de introducir otros. Ramos, mirando con ojos filosóficos la música, tuvo mayor habilidad, ó mayor osadía, y encontró un útil temperamento, queriendo alteradas las razo-

nes

(*a*) V. Rousseau *Dict. de Music.* Temperam.

nes de la quarta y de la quinta; y si tuvo que sufrir las oposiciones de Burcio, y de Gafurio, fué, casi despues de un siglo, sostenido y promovido por Zarlino, y al fin triunfó tanto en la práctica como en la teórica de los músicos. Eximeno doctamente explica la necesidad de los temperamentos en los intervalos musicales, y las mejoras acarreadas á la música con la doctrina de Ramos, Fogliari y Zarlino (*a*); y aquella copiosa y exâcta explicacion suya nos dispensa de detenernos mas en esta materia. Un vasto campo se ofreceria á nuestras investigaciones, si quisieramos dar alguna noticia de los escritores de música que despues de la mitad del siglo XV, despues de la introduccion de las luces de la literatura griega, despues del principio de la nueva cultura y delicadez acarreada á las nobles artes, se han visto salir en toda la culta Europa. Lampillas insinúa algunos de los españoles, los quales bastan para su intento, pero po-

Escritores de música.

(*a*) *Dubbio sopra il Saggio di Contrappunto, &c.* pag. 85, 86.

podrian añadirse muchos mas (*a*). Arteaga nombra en efecto otros muchos, y nos hace esperar una obra suya sobre la ciencia música de los españoles, que no solo será gloriosa á su nacion, sino que dará muchas luces para toda la historia de la música moderna (*b*). Nosotros remitiendonos á estos y á otros autores de otras naciones, que han hablado de los escritores músicos de todas, solo diremos que aunque en cada una fué infinito el número de tales escritores en aquellos dos siglos XV y XVI, sin embargo fueron respetados entre todos, como principales maestros, Zarlino y Salinas, los quales son aun al dia de hoy mirados con mucho aprecio por los inteligentes de aquella ciencia. Zarlino. Las instituciones armónicas de Zarlino, aunque muy cargadas de vanas y fantasticas razones, se hicieron sin embargo libro clásico para los estudiosos de la música práctica, y todas sus obras musica-

(*a*) *Sagg. Istor. Apol. della Lett. Spagn.* part. II, tom. II, diss. III, §. V.

(*b*) *Rivol. del Teatr.* &c. tom. I.

cales sirvieron para ilustracion de su amada arte. Pero los siete libros *De música* de Salinas tuvieron aun una fama mas universal, y despues han conservado mas durable reputacion. Salinas. Aquel célebre ciego profundamente instruido en la música práctica y en la teórica, y ademas erudíto filólogo, poeta, filósofo y matemático, que justamente es llamado de muchos el moderno Didimo, y podria tambien llamarse el Saunderson español, despues de mucho estudio de los griegos y de los latinos, despues de muchas meditaciones y despues de continuo exercicio, dexó á la posteridad en aquella docta obra, quanto las erudítas investigaciones, las atentas especulaciones y las repetidas experiencias, en el largo transcurso de cincuenta ó mas años, le habian sugerido sobre la práctica, y sobre la teórica de la música. Pero sin embargo estos doctos escritores no ocuparon todo el campo de la doctrina música, ni cerraron á los demas todos los caminos de distinguirse en útiles y curiosas investigaciones. La ilustracion de la música antigua, y el paralelo y la aplicacion de ella á la moderna, se hizo el es-

estudio no solo de los músicos, sino también de los erudítos. Doni, Vossio, Meursio y sobre todos Meibomio, y mas recientemente Burette, emplearon felizmente en esta parte sus gloriosas fatigas, y á sus erudítos trabajos debemos los mas claros y seguros conocimientos que al presente tenemos de la música griega. Las doctas disputas, los oportunos descubrimientos, y los felices sucesos, que en estos siglos tanto han contribuido á los mayores adelantamientos de la música, darian copiosa materia para un largo tratado, si la naturaleza del presente capítulo, y la vastedad de los argumentos que faltan á tratar, no nos diese continuamente voces al oido, y nos detuviera la pluma para llamarnos al asunto propuesto, y tenernos sujetos dentro de los límites de las matemáticas. Pero cabalmente en el siglo pasado empieza la ciencia del sonido á ser tratada con algun rigor matemático, y á sujetarse la acústica á las leyes de la mecánica.

Galileo. Galileo debe ponerse á la frente de esta ciencia, como hasta ahora lo hemos visto á la de casi todas las otras. De la doc-

doctrina del péndolo saca él los principios fundamentales de la música (*a*). Con ella resuelve el problema de las dos cuerdas templadas unísonamente, que al sonido de la una se mueve la otra, y resuena; explica muchos fenómenos físicos acústicos, apoya su doctrina de las vibraciones sonoras, y claramente prueba consistir el sonido en las undulaciones del ayre producidas por el movimiento de las cuerdas, y llegadas á nuestros oidos. Si estas undulaciones se unen reguladamente para herir el oido, nace una consonancia, y esta es mayor, quanto mas freqüentemente sucede la reunion. La octava es formada por dos cuerdas, de las quales una hace dos vibraciones mientras la otra no hace mas que una; en la quinta una hace tres, y la otra solo dos; en la quarta una quatro, y tres la otra; y asi de las dos terceras, &c. y de aquí proviene que las vibraciones de las cuerdas en la octava, ambas á dos con la aguda llegan unidas al oido, y todas tres en la quinta, &c. y por

(*a*) Dial. I. *della nuova Scienza.*

por esto la mas perfecta consonancia es la octava, despues la quinta, y así de las demas. Pero si las vibraciones de las cuerdas son inconmensurables, esto es, que jamas se unan, ó no lo hagan mas que despues de mucho tiempo, nace entonces la disonancia; y por esto es disonante la segunda, que tiene la razon de 8, 9, y necesita 8 vibraciones de la cuerda grave, y 9 de la aguda, para que concurran á herir las dos á un tiempo el oido. Para formar esta variedad de sonidos, y estos tonos diversos, es preciso establecer la variedad que tales sonidos requieren en las cuerdas. Lo largo, gordo y tirante de la cuerda fixa la agudeza del sonido que deberá producir: lo largo y gordo en razon inversa, y lo tirante en la directa. Esta doctrina era ya conocida de los pitagóricos; pero groseramente y sin la debida precision: Galileo fué el primero que la trató con exâctitud, y dió los primeros elementos de la acústica, que despues han servido de basa á las sublimes teorías de los mas sutiles geómetras. Determinó pues Galileo, que dos cuerdas igualmente largas, gordas y tirantes sonarán uníso-

sonas; pero que para formar por exemplo una octava, ó dos sonidos, el uno doble mas agudo que el otro, deberá la cuerda mas aguda ser de doble menor longitud, ó de doble menor diámetro, ó bien de quadrupla tension, ó tirante con quadruplo peso, que es decir, que lo agudo del sonido seguirá la razon simple inversa de la longitud y del diámetro de la cuerda, y la quadrupla directa de la tension, ó de los pesos que la tiran. La doctrina de Galileo tanto en la parte armónica, como en la mecánica de los sonidos, es en general la de los pitagóricos: ¡pero que diferencia de la doctrina pitagórica á la galileana! Elevada de la popular inexâctitud á la precision matemática, apoyada no á falsas y groseras experiencias de martillos, de vasos y de platos, sino á finísimas y justísimas observaciones de los movimientos de los péndolos, de las undulaciones de los fluidos, y de las vibraciones sonoras, levantada de una metafísica tenebrosa, y de una misteriosa obscuridad á la mas clara luz de simples raciocinios y de palpables experiencias, se habia hecho sólida y firme, y digna de la

 aten-

atencion de los filósofos aun en el esplendor de la matemática y física de nuestros dias. ¿Y que han dicho en esta parte mas que Galileo el geómetra Eulero, y el físico Nollet? El mismo Sauveur, aunque autor de una nueva ciencia, apoya su doctrina sobre la doctrina de Galileo ahora insinuada. Si el filósofo músico Eximeno, justamente empeñado en substraer su amada ciencia de las trabas de la matemática, rebate la razon de la consonancia propuesta por Galileo, como no bastante general, ni aplicable á todos los casos de la armonía (*a*), confiesa sin embargo concurrir en ella tantas experiencias, y tantas apariencias de razon, que no es de maravillar que Galileo y los otros filósofos se hayan inducido á abrazarla; ni encuentra que replicar contra su doctrina mecánica de la formacion de los sonidos diversos, aunque prueba ser desmentida por la práctica la aplicacion en los instrumentos. La

Cartesio. doctrina música de Cartesio es tan conforme á la de Galileo, que el mismo Cartesio

(*a*) *Orig. e reg. della Musica* lib. I. cap. II.

parece que quiera evitar la tacha de plagiario, y procure refundirla en Galileo (*a*); y Poisson, ilustrador de su música, mas uso hace de las razones, y de las experiencias de Galileo, que de las de su autor Cartesio (*b*). A la sombra de estos dos consumados filósofos crecia la música, y llamaba la atencion de Merseno, de Gassendo, de Wallis y de otros célebres escritores ocupados en la ilustracion de las ciencias mas nobles. La Academia del Cimento, sin entrar en el exâmen de la armonía, tomó en consideracion el conocimiento del sonido, estableció oportunas experiencias, y nos dió importantes luces sobre la celeridad y propagacion de este. Boyle, Flamsteed, Allejo y varios otros han buscado con repetidas experiencias la justa determinacion de esta velocidad. Entre tanto Newton, oyendo las lecciones de la naturaleza mas en sus geométricas razones, que en las impresiones de los sentidos, por medio de una Newton.

(*a*) Ep. XCI, part. II.
(*b*) *Elucid. phys. in Cartesii Musicam.*

una teoría muy ingeniosa y docta, pero complicada y obscura, de las vibraciones del ayre, y por consiguiente de la velocidad del sonido, demostró la proposicion, de que „ propagadas por el fluido „ las vibraciones, todas las partecillas del „ fluido adelantandose, y retirandose con „ movimiento recíproco brevísimo, se aceleran siempre, y se retardan segun la „ ley de un péndolo que oscila" y encontró con su teoría una velocidad de sonido casi la misma que nos da la experiencia (*a*). La teoría de Newton pareció tan obscura á Juan Bernoulli el hijo, que en el discurso sobre la *Propagacion de la luz*, premiado por la Academia de las Ciencias de París en 1736, no esperando poderla entender claramente, en vez de estudiarla con atencion, juzgó mejor proponer otro método mas fácil, y mas llano para seguirlo, y llegó por medio de él á la misma fórmula, que Newton habia dado con el suyo. Pero tanto un método como otro han encontrado oposiciones en los

Juan Bernoulli.

(*a*) *Princ. Math.* &c. tom. II, prop. XLVII.

los geómetras, porque ambos á dos suponen que el sonido se comunica por fibras longitudinales vibrantes, que se forman sucesivamente, y son siempre iguales entre sí, y este supuesto ni está demostrado, ni apoyado sobre sólidas pruebas. Se quiere tambien oponer, que Bernoulli con su método debería en aquella hipótesis haber encontrado una velocidad diversa de la que él encuentra, que es realmente la verdadera. Eulero, primero en una conclusion defendida en Basiléa en 1727, y despues en la *Disertacion sobre el fuego*, que dividió el premio de la Academia de las Ciencias de París en 1738, tuvo sospechas de falsedad sobre la teoría de Newton, y propuso otra fórmula para determinar la velocidad del sonido, diversa de la newtoniana; pero ni manifestó el defecto de ésta, ni dió la demostracion de la suya. Cramer hizo algunas doctas observaciones sobre la teoría de Newton, y manifestó que su demostracion no provenia de la naturaleza de la cosa, sino solo de la hipótesis, que se habia tomado, y que valdria igualmente aplicandose á otra proposicion enteramenmente diversa. Los doctos comentadores de Newton, Jacquier y Seur, refieren extensamente esta objecion que les habia comunicado Cramer; y ellos mismos, confesando que la demostracion de Newton no está exênta de defecto, procuran sostener su proposicion tomando por otra parte la demostracion; pero sus cálculos son tan complicados, que no podemos fiarnos enteramente en sus conclusiones; y en efecto los geómetras posteriores no han abrazado la doctrina de Newton; y la Grange, despues de un profundo exâmen, la ha encontrado fundada en hipótesis incompatibles entre sí, y que necesariamente conducen al error (*a*). Sin embargo todos estos puntos, la doctrina de Galileo y de Cartesio sobre la música, las experiencias de los físicos, y las teorías de los geómetras sobre el sonido no eran mas que pequeños ensayos de los muchísimos argumentos que ofrece esta materia, y de las infinitas especulaciones que faltaban hacer. La necesidad que los filósofos han tenido de los telescopios, y mi-

(*a*) *Act. de Turin* tom. I.

microscopios, les ha obligado á estudiar con suma aplicacion los diferentes caminos, y los diversos accidentes de la luz, y formar acerca de ella una ciencia, que teniendo por objeto nuestra vista, toma el nombre de óptica; pero como no han tenido igual necesidad de conocer exâctamente lo que pertenece al sonido, ni han mirado la música mas que por el deleyte del oido, para el qual no creian necesario buscar las reglas en el fondo de la filosofía, no habian dirigido por aquella parte sus especulaciones, ni habian pensado en formar una ciencia para el oido, como la tenian para los ojos. Sauveur quiso entrar en este pais casi enteramente desconocido, y quanto mas se internaba, tanto mas encontraba que exâminar, tanto mas creia necesario formar una ciencia acústica, la qual le parecia que debia ser mas vasta, y no menos curiosa é importante que la óptica, que tanto ocupaba el estudio de los matemáticos. Las experiencias, las observaciones, los cálculos, las reflexîones lo conduxeron á muchos descubrimientos nuevos, y presentaron á sus filósoficos y penetrantes ojos muchas bellas é im- Sauveur.

importantes novedades. El descubrimiento del sonido fixo, la distincion del sonido fundamental, y del armónico, la observacion de las *undulaciones*, ó de las vibraciones parciales y separadas de una misma cuerda, de los *nudos* y del *centro* de tales undulaciones, y de las curiosas deducciones que se derivan de ellas, la invencion de ciertas máquinas acústicas, que hubieran sido tan útiles y excelentes como las de la óptica, nueva lengua musical mas extensa, y mas cómoda, nuevos caractéres, nuevas reglas, nuevas divisiones de sonidos, nuevo sistema de intervalos, y en suma una nueva música, ó por mejor decir una acústica, de quien la música no es mas que una parte, son los frutos de sus especulaciones, que él presentó como en bosquejo á la Academia de las Ciencias de París (*a*), y que queria llevar á su madurez y perfeccion. Era ciertamente un fenómeno extraño y maravilloso, que Sauveur, como dice Fontanelle (*b*), no teniendo voz ni oido, no pensase en otra cosa que en la música; estaba reducido á tomar prestado el oido y la voz, y daba en cambio demostraciones desconocidas á los músicos, que le prestaban aquel auxîlio. ¿Qué ventajoso no sería para la humanidad el que la filosofía llegase á dar tantos auxîlios al oido como ha dado á la vista? Si Sauveur hubiese podido llevar al término deseado las divisadas teorías, si la muerte no hubiese cortado el curso de sus meditaciones, hubiera él sido el Newton de la acústica, y nosótros tendriamos esta ciencia reducida á la perfeccion de la óptica. Pero sin embargo debemos á su diligencia muchos descubrimientos sobre varios accidentes de la propagacion del sonido, muchas observaciones sobre los instrumentos de cuerda y de ayre, y muchos curiosos y útiles conocimientos sobre varias partes de la música, y de la acústica; y de algunos puntos de su doctrina se han derivado despues el sistema físico del sonido de Mairán (*a*), y el armó-

(*a*) An. 1700, 1701, &c.
(*b*) *Eloge de Mr. Sauveur.*

(*a*) *Acad. des Scien.*, an. 1737.

mónico de Rameau, y de d' Alembert. Las tentativas de Sauveur, y mas aun las breves señales de Newton sobre las vibraciones de las cuerdas sonoras, estimularon á los matemáticos á tratar este problema con rigor geométrico, y vencer la dificultad que presentaba su complicacion.

Tailor. El primero que tuvo la gloria de resolverlo felizmente fué Tailor, quien llegó á demostrar con exâctitud las diferentes leyes de tales vibraciones, y sujetar al cálculo el movimiento de las cuerdas oscilatorias (*a*). Considera él la longitud y la masa de estas, y despues la longitud de una determinada péndola de segundos, y la relacion de la circunferencia de un círculo á su diámetro, y de aquí pasa á dar una fórmula que expresa el número de las vibraciones de la cuerda durante una oscilacion de la péndola. Busca la figura que toma la cuerda quando forma las vibraciones, y encuentra que no es mas que una especie de cicloyde prolongada, que él llama compañera de la cicloyde, y otros geó-

(*a*) *Math. increm. directa & inversa*, 1715.

geómetras llaman curva de los arcos. Para determinar esta figura supone, que todos los puntos de la cuerda llegan al mismo tiempo á la situacion rectilínea, y aunque esta suposicion parece bastante manifestada por la experiencia, quiere sin embargo demostrarla aun sin el auxîlio de ella. Juan Bernoulli, que exâminó el problema *de las cuerdas de vibracion* despues de Tailor, dió tambien la misma resolucion. Parecia tal vez á estos geómetras, que dicha hipotésis bastase para dar razon de los principales fenómenos de los tonos músicos, y tal vez creian que no bastasen sus fuerzas para resolver el problema fuera de aquella hipótesis en toda su extension. Esta resolucion, aunque de Tailor y de Bernoulli, no satisfizo la escrupulosa delicadez de d' Alembert, y se dedicó á probar que aun en aquella hipotesis puede tomar la cuerda infinitas otras figuras, que igualmente satisfacen el problema, y que sin aquella hipótesis se puede determinar en general la curvatura que en cada momento debe tener la cuerda haciendo sus vibraciones; é hizo en seguida muchas ingeniosas investigaciones sobre la na- D' Alembert.

naturaleza de estas curvas, que él llama *generatrices*, y de la manera que ellas pueden engendrarse, que han acarreado muchas luces á los matemáticos, á los geómetras y á los algebristas, y fué el primero que resolvió el problema en su extension (*a*). La resolucion de d' Alembert era realmente general, pero siempre suponiendo que la curva generatriz fuese regular, y que pudiese ser comprehendida en una equacion continua. Eulero trató el problema con un método análogo al de d' Alembert; pero le dió mas extension, y concluyó que qualquier curva *serpeante*, continuada por una y por otra parte alternativamente encima del exe, y debaxo de él, sea regular ó irregular, será propia para la resolucion de aquel problema (*b*). Esta resolucion, aunque hecha con un método muy análogo al de d' Alembert, y semejante á la suya en muchos puntos esenciales, era sin embargo diversa, mas directa, mas analítica, mas aplicable á todas

Eulero.

(*a*) *Acad. de Berlin*, an. 1747.
(*b*) *Acad. de Berlin* 1748.

das las qüestiones de esta especie, y evidentemente mas general. No pudo llevar con paciencia d' Alembert, el haber de partir con otro la gloria de un tan bello descubrimiento, ni vió en la resolucion de Eulero mas que las señales de semejanza con la suya, ni la creyó suficiente para todos los casos, en los quales en la curva generatriz no se siguiese la ley de la continuidad (*a*). Pero no tardó á responderle Eulero, y sostuvo tener su resolucion toda la exâctitud necesaria, y la correspondiente generalidad (*b*). Mientras de este modo se combatian aquellos dos héroes de la matemática, salió al campo otro atleta no menos valeroso, el profundo y sólido Daniel Bernoulli, y de algun modo quiso quitar á ambos á dos la gloria que tanto se disputaban, y darla toda entera á Tailor, primer resolvedor de aquel problema. El cree demostrar que la solucion de Tailor es capaz de satisfacer todos los casos posibles, y establece la proposicion general, que qualquiera que pueda ser el movimien-

Daniel Bernoulli.

(*a*) Ibid. an. 1750. (*b*) Ibid. an. 1753.

miento de una cuerda tirante, esta jamas formará otra cosa que una, ó un complexo de dos ó mas cicloydes prolongadas. Despues quiere que los cálculos de d' Alembert y de Eulero no enseñen nada mas que los de Tailor, y reduce el mérito de la resolucion que da él mismo, á solo haber sabido aplicar al método de Tailor una analísis tan nueva, que no exîstia en tiempo de este, esto es, la de las diferencias parciales. Respondió Eulero á las objeciones de Bernoulli, y el calor de la disputa entre dos geómetras tan profundos, hizo brotar muchas nuevas é importantes verdades sobre las oscilaciones de las cuerdas y del ayre, sobre la formacion del sonido, sobre los instrumentos de cuerda y de ayre, y sobre otros muchos puntos pertenecientes á esta materia. Era de ver con gusto, acompañado de admiracion y de respeto, la larga y gloriosa lucha de aquellos dos sublimes ingenios (a): uno explicaba todas las fuerzas de la analísis, el otro

(a) V. *Eloge de Mr. Daniel Bernoulli, Acad. des Sciens. de Paris* 1782.

otro para poderse gobernar sin tener necesidad de ella, empleaba todo el arte, y toda la sagacidad de un ingenio inagotable de recursos; uno esparcia prodigamente esfuerzos y cálculos, porque nada costaban á su genio fecundo é inexhausto, el otro siempre sencillo, elegante y fácil ponia su gloria en hacer mucho con pocas fuerzas, sin temer comparecer falto de ellas, y ambos á dos ilustraban, y tenian suspensa y admirada de su sublime saber á toda la Europa matemática (a). Despues de Newton, Tailor, los dos Bernoullis, d' Alembert y Eulero entró animosamente en el campo el jóven la Grange, y le tocó coger los laureles. El exâmina la doctrina de Newton sobre la propagacion del sonido, expone la analisis pura y exâcta del problema segun los primeros principios de la mecánica, y hace conocer la insuficiencia y la falsedad del método newtoniano, y propone otro camino para la resolucion fundado sobre principios seguros é incontrastables. Discute las teorías de

La Grange.

(a) V. *Acad. de Berlin* 1753, &c.

de Tailor, de d' Alembert, de Eulero, y las reformas y las objeciones de Daniel Bernoulli; y pesadas las razones de unos y de otros, concluye que sus cálculos no bastan para decidir tales qüestiones, y propone una resolucion que parece tener todo el mérito de la solidez y de la generalidad. Pasa despues á desenvolver la teoría general de los sonidos armónicos, de los instrumentos de cuerda y de ayre, y por medio de una fórmula sencilla determina el sonido fixo, y los sonidos armónicos que propuso Sauveur, con aquella exâctitud y facilidad, á que aquel no pudo llegar; y da nuevas y seguras luces para el conocimiento del sonido, aplicables tambien á la práctica de la construccion y del manejo de los instrumentos, á la teoría del eco simple, y á otros curiosos y dificiles puntos de la acústica. Las fórmulas tan sencillas y generales, la integracion de tantas equaciones, la analísis tan fina, clara y exâcta, la penetracion de su ingenio, la solidez de su juicio, llamaron la atencion de todos los geómetras: los mismos atletas de aquella noble lid Eulero, d' Alembert y Bernoulli, los vene-

rados oráculos de esta ciencia oyeron con respeto la voz del jóven geómetra, y no se desdeñaron de ponerlo á su lado en el trono que ellos ocupaban del imperio matemático. Todos tres escribieron desde luego al jóven la Grange, abrazando muchos puntos de su doctrina, pidiendo de otros mayor ilustracion, y venerandolo en todos casi como su árbitro y juez; y si la Academia de Berlin habia sido pocos años antes el campo de batalla entre aquellos tres ilustres campeones, la Academia de Turin se hizo en su nacimiento el teatro de honor, donde hicieron brillante comparsa la acústica y el álgebra, y donde puede decirse que concurrieron á cortejar á la Grange Eulero y d' Alembert, los soberanos y príncipes de las disciplinas matemáticas. ¡Que gloria para un jóven geómetra verse á la primera produccion llevado en alas de la fama por todas las academias y escuelas, y recibir los aplausos de los mas célebres geómetras, y los inciensos y adoraciones de todos los otros! Esta gloria singular que obtuvo entonces la Grange, siempre la ha conservado, y acrecentadola constantemente hasta nuestros dias, esparciendo siempre nuevas luces sobre la presente materia, que tan copiosamente habia ilustrado (*a*). Es pues muy glorioso para el conde Jordan Riccati el merecer ser nombrado aun despues de la Grange, y los poco ha celebrados geómetras: el tercer sonido observado por Tartini, el sonido falso, y algunos otros puntos nuevos solo por él han sido tratados geometricamente; y si no ha igualado á sus ilustres antecesores en el primor de la analísis, y en la profundidad de los cálculos, tal vez los ha superado en la novedad de algunas materias, en la extension de las investigaciones, y en el estudio de conformar con la práctica sus teorías, lo que es un mérito no muy comun en tales especulaciones (*b*).

Jordan Riccati.

Mientras estos geómetras contemplaban tan atentamente la parte mecánica del sonido, otros dirigian su atencion á la par-

(*a*) V. *Acad. de Turin* tom. I, II, III. *Recherches*, &c. y *Mechan. anal.* sec. part. sect. IX.

(*b*) *Delle corde elastiche*, 1767; *Suono falso* artic. del *Prodromo della nuova Enc. ital.*

parte física, y otros á la parte armónica del mismo. Mairan, encontrando alguna analogía entre los sonidos y los colores, quiso llevarla mas adelante, y propuso una hipótesis sobre la propagacion del sonido, que se semejaba mucho al sistema de Newton sobre el esparcimiento de la luz y de los colores. El sonido no es mas que las vibraciones de las partículas del ayre producidas por el cuerpo sonoro, y comunicadas á nuestro oido. Queria pues Mairan que las partículas del ayre fuesen de diversa elasticidad, y que al mover la cuerda tocada todas las partículas de ayre que la circuyen, solo siguiese la vibracion en las que fuesen análogas á las vibraciones de aquella, y no de otras cuerdas; del mismo modo que puestos unísonos dos clavicordios inmediatos, si suena una cuerda de uno, se oye en el otro un pequeño eco, pero solo en la cuerda unísona, y no en las otras. Con esta diversa elasticidad de las muléculas aereas, y con esta analogía de algunas con las vibraciones que exîge un tono, y de otras con las de otro, explica con bastante facilidad muchos fenómenos de la pro-

Mairan.

pa-

pagacion de los sonidos diversos, que en qualquier otro sistema son muy embarazosos y difíciles, y da razones harto probables de varios accidentes de la armonía. Pero sin embargo esta hipótesis de Mairan no ha sido abrazada de muchos físicos: la diversa elasticidad de las muléculas del ayre muy contraria á su equilibrio, y la infinita variedad que se quiere de tales muléculas, poco conforme á la simplicidad de la naturaleza, han parecido de mayor dificultad que quantas puede soltar dicha hipótesis. Eulero no contento con haber resuelto analíticamente el problema de las cuerdas sonoras, quiso tambien tratar físicamente del sonido, y formar un sistema de los principios de la armonía, y una nueva teoría música (*a*). Su principio es, que los tonos serán mas consonantes, ó agradables al oido, quanto mas facilmente se dexará comprehender de la mente la razon de sus vibraciones sonoras; y forma despues la escala de los grados diversos de suavidad en los diversos tonos, y

Eulero.

(*a*) *Tentamen. nov. theor. mus.* &c.

y establece todo el sistema de la armonía musical. Muchos inconvenientes en la teórica, y muchos mas en la práctica manifiesta Eximeno en el sistema músico de Eulero (*a*), á quien remitimos á los lectores que deseen verlos. Mayor crédito se ha adquirido Rameau, excelente músico, y útil escritor de música, no solo en la Francia, sino tambien en las otras naciones; afortunado por haber tenido por ilustrador y reformador de su doctrina no menos que á un d' Alembert (*b*). Y es digno de admiracion que los mas célebres geómetras de Europa, mientras disputaban sobre los áridos cálculos de la parte mecánica del sonido, se ocupasen tambien casi á un mismo tiempo en las deleytables amenidades de la armónica; mas prudente, en mi concepto, d' Alembert por haberse sujetado al sistema de un músico, sin empeñarse en hacer de nuevo uno suyo, y por haber desechado los difíciles cálculos, sin hacinar, como él di-

Rameau.

D' Alembert.

(*a*) *Orig. della Musica* lib. I, c. III.
(*b*) *Elem. de Musique.*

dice, cifras sobre cifras en su escrito. Del fenómeno observado ya por Sauveur, que al tocar una cuerda se oye ademas del sonido propio de esta la duodécima y la décima septima mayor de aquel tono, sacan Rameau y d' Alembert los principales puntos de la melodía y de la armonía, y muchas útiles doctrinas sobre todas las partes de la música. El descubrimiento del tercer sonido, esto es, que quando con dos instrumentos semejantes se forman dos sonidos diversos, se oye otro diferente de ambos á dos, ha dado mas nombre

Tartini. á Tartini, aunque algunos se lo han disputado (a), que su obscurísimo *Tratado de la armonía*, que fundó sobre este descubrimiento, y que vanamente intenta apoyar con razones aritméticas y geométricas. Despues de tan ilustres músicos, despues de tan célebres filósofos y tan sutiles

Eximeno. matemáticos, compareció Eximeno muy versado en la matemática y en la música para conocer íntimamente la naturaleza de la una y de la otra, y muy sincero filóso-

(a) D' Alembert *Elem. de Musique, Dis. prél.*

sofo para decir libremente su opinion sin respeto á otros escritores, y quitar á la matemática todo influxo sobre la música. Expone él, y refuta los sistemas músicos de los matemáticos y de los músicos que le habian precedido, y quiere fundar su sistema, no sobre cifras y figuras, ni sobre raciocinios matemáticos, sino solo sobre la observacion de la naturaleza. Los tonos de la música no son para él mas que los acentos del habla; y siete son solamente los tonos de las voces y de las cuerdas armónicas, porque por mas que sean las personas, á quienes se haga entonar la voz que les sea mas fácil y natural, no se oirán otras que las de los siete tonos; y así es perfecta la armonía de tercera, quinta y octava, y son consonantes los intervalos que se encuentran entre aquellas cuerdas, porque este es el temple dictado por la naturaleza, y el que sin reglas de música harán muchas personas que quieran formar naturalmente un concierto. De estas simplicísimas observaciones saca las reglas de la música, y hace volver á entrar este arte en la verdadera filosofía. Rousset, Martini, Sacchi y algunos otros han escrito ó escriben todavia de la música; pero nosotros no podemos seguir todos los pasos de esta ciencia, y tal vez hemos hablado de ella mas de lo que correspondia á nuestro instituto. La música mas ha de ser mirada como arte deleytable, que como ciencia matemática; la acústica, que debe comprehender toda la doctrina del sonido, puede aun considerarse como naciente, y apenas tocada en pocos de sus puntos: empleen en ella sus estudios los geometras y los físicos, que con experiencias y con cálculos, descubrirán muchas útiles verdades, que son ahora desconocidas, y nos formarán una verdadera ciencia de la acústica, como la tenemos de la óptica que pasaremos á exâminar.

INDICE ALFABETICO

DE LAS COSAS MAS NOTABLES *que contiene este tomo.*

A

han escrito ó escriben todavia de la música; pero nosotros no podemos seguir todos los pasos de esta ciencia, y tal vez hemos hablado de ella mas de lo que correspondia á nuestro instituto. La música mas ha de ser mirada como arte deleytable, que como ciencia matemática; la acústica, que debe comprehender toda la doctrina del sonido, puede aun considerarse como naciente, y apenas tocada en pocos de sus puntos: empleen en ella sus estudios los geómetras y los físicos, que con experiencias y con cálculos, descubrirán muchas útiles verdades, que son ahora desconocidas, y nos formarán una verdadera ciencia de la acústica, como la tenemos de la óptica que pasaremos á exâminar.

INDICE ALFABETICO

DE LAS COSAS MAS NOTABLES *que contiene este tomo.*

A

Cas-

Fon-

G

H

J

K

L

M

N

P

Q

R

Ro-

S

T

V

W

X

Z

ERRATAS DE ESTE TOMO.

Pagina.	*Linea.*	*Dice.*	*Lease.*
8	25	Apolinos	*Apolonios*
16	25	explicaciones	*especulaciones*
34	7	literatura	*literaria*
39	2	componia	*componian*
77	9	multilicados	*multiplicados*
119	24	1370	1730
126	9	que fué	*fue que*
129	2	habian	*habia*
191	7	hacen	*hace*
207	16	particulares	*parciales*
218	3	estudiosos	*estudios*
221	25, 26	contracto	*contacto*
260	7	eoremas	*teoremas*
287	21	antigüedad	*antigua*
324	16	el diámetro	*al diametro*
370	19	las mecánicas	*la mecánica*
475	5	entendido	*entendido,*

NOTA.

En el tomo VI, pag. 627, lin. 15, donde dice : *de los*, lease *por los*.