te tenian, ya los accidentes prósperos, ò adversos que los esperaban. Persuádome à que la alegria, y la tristeza se pintaban en su fantasía, y no en el semblante de la estatua. Ni creo que tuviese mas realidad que ésta lo que dice Plinio de la Diana de Chio, cuyo rostro veían triste los que entraban en el Templo, y alegre los que salian.

52 En esto de imágenes hay tanto que decir, que se podria llenar un discurso separado. No negaré yo que Dios, tal vez con las varias representaciones, ò accidentes de las imagenes sagradas, quiera significar alguna cosa à sus escogidos; pero por lo comun son aprehensiones de hombres, ò mugeres ilusas. Aqui era lugar de tratar de las raras apariciones de la imagen de nuestra Señora de la Barca, en el Cabo de *Finis Terræ*, que corrieron en estos años por toda España, y en que los testigos de vista están algo encontrados. Lo que yo puedo decir es, que algunos de los mas reflexîvos no hallaron cosa sobrenatural en ellas, y á mi parecer probaban su dictamen con evidencia. Por otra parte algunas circunstancias que se referian de estas apariciones, eran ridículas: y el no haberse visto jamás semejante portento en la Iglesia Católica es bastante, por lo menos, para suspender el asenso.

PA-

PARADOXAS MATEMATICAS.

DISCURSO SEPTIMO.

§. I.

1 ENtro en esta materia con el preciso desconsuelo de no poder darme à entender bastantemente à la mayor parte de los Lectores. Son en España tan forasteras las Matemáticas, que aun entre los erudítos hay pocos que entiendan las voces facultativas mas comunes; pero la importancia de este Discurso, para desengañar al espíritu humano de lo poco que debe fiar de sus mas establecidas aprehensiones, me obligó à vencer este reparo. Sirve esto mucho à otro fin mas noble. Nunca nuestro entendimiento está mas bien dispuesto à rendirse à los sobrenaturales, y revelados mysterios, que quando hace la reflexîon debida sobre la cortedad de su alcance aun en las cosas naturales. Y esta reflexîon se excitará necesariamente en los Lectores capaces, al ver en el presente Discurso demostradas con evidencia algunas proposiciones, en que antes concebia una manifiesta repugnancia. Procuraré familiarizarme à la inteligencia de los mas tardos, quanto lo permitiere la materia; mas porque este conato en algunos puntos sería inutil sin la ayuda de figuras, hice estampar las precisas que se hallarán al fin de este Discurso. Las Paradoxas irán divididas segun el orden de las diversas Facultades Matemáticas à que pertenecen.

Posibles son dos lineas que continuamente se vayan acercando mas, y mas una à otra, y que por mas que se prolonguen nunca lleguen à tocarse.

Geometría.

§. I.

Figura I. 2 DEsde el punto *C* se tirarán las rectas que se quisiere ácia la linea *A L*, haciendo ángulos con ella, los quales tanto serán mas agudos, quanto las lineas sean mas inclinadas, ò se tiraren à mayor distancia. Tales son las lineas *C M C N C O C P C Q C L*. Córtese de todas ellas una igual porcion, v. gr. de dos dedos, ácia la linea *A L*, como se demuestra en la figura. Digo, que si desde el punto *B* se tirase una linea, cortando las que van del punto *C* à la linea *A L*, en los puntos *D E F G H I*, donde se hizo la division dicha, la linea oculta *B I*, encaminada por dichos puntos se irá acercando siempre mas, y mas à la linea *A L*. Pero por mas que se prolonguen una, y otra, nunca llegará à tocarla.

3 La razon es clara; porque los puntos de la division, à proporcion que las lineas fueren mas inclinadas, è hicieren ángulo mas agudo, estarán mas cerca de la linea *A L*, y por otra parte ninguno de aquellos puntos tocará à dicha linea, por la suposicion hecha de que la division se hizo en la distancia de dos dedos de la linea antes del punto del contacto.

4 De otro modo. Por mas que se prolongue la linea *A L*, à qualquiera distancia suya se podrá tirar una linea desde el punto *C* que haga ángulo con ella; *sed sic est*, que en esta misma linea tirada del punto *C*, se puede señalar un punto por donde se corten dos dedos de su longitud, antes de llegar al punto del contacto: luego hay un punto por donde la corte la linea que viene del punto *B*; y por consiguiente ésta quando llegue à cortarla, no tocará à la linea *A L*.

5 Llaman los Matemáticos *Asymptotos* à estas lineas, que

que prolongadas siempre distan menos, sin poder llegar à tocarse. Y aunque la voz *Asymptotos* se apropie con particularidad à las dos lineas del triángulo que comprehende à la linea Hypérbola, hay otras de este género, fuera de estas, y de las que hemos señalado en la figura. Como son dos Parábolas iguales, puesta una debaxo de la otra; tambien dos Hypérbolas se pueden descubrir de modo que sean Asymptotos. Pero en estos casos es la demostracion embarazosísima, y para entenderla es menester mas que mediana tintura de Geometría.

6 Advierto que la verdad de nuestra proposicion, aunque se convence con demostracion teórica, es imposible la execucion en la práctica, por ser imposible formar lineas indivisibles, quales eran necesarias para la execucion; pero harémos mas sensible su verdad à los que no hubieren penetrado bien la demostracion propuesta, con otra Paradoxa equivalente à la que acabamos de probar, y que en el fondo viene à ser la misma.

7 Digo que puede suceder que entre dos qualidades desiguales, aunque se vayan haciendo infinitas adiciones à la menor, nunca llegue à igualar la mayor. Esto sucederá infaliblemente, como las adiciones se vayan haciendo en progresion geométrica descendiente. Por exemplo: Pongamos una cantidad de dos varas, y otra de una; añádasela à ésta media vara, despues una quarta, luego una ochava; y asi, continuando infinitamente, añádasela siempre la mitad de la parte añadida antecedente; nunca podrá la añadida igualar à la entera, porque como lo que le falta para igualar es siempre otro tanto como la inmediata añadida, añadiéndosela solo la mitad de ésta, nunca puede llegar à igualar; esto es, nunca la quantidad de una vara podrá con infinitas adiciones llegar à tener dos varas.

8 He dicho que esta Paradoxa en el fondo es una misma con la antecedente; porque asi como la razon de no llegar à igualarse las dos quantidades, es que las adiciones se van disminuyendo en cierta proporcion geométrica;

ca; la razon de no llegar jamás à tocarse las dos lineas, es porque la inclinacion de una à otra tambien se va disminuyendo succesivamente en alguna determinada proporcion geométrica, al paso que las lineas se van prolongando.

9 La proposicion establecida puede tener su uso, como simil oportunísimo en algunas materias filosóficas, y teológicas, para confirmar la máxima repetida de que las cosas del orden inferior, por mas que crezcan en perfeccion, nunca pueden igualar las cosas colocadas en orden superior, y disolver el molestísimo argumento que contra ella se hace. Esta disquisicion ocurre en varios asuntos, pero especialmente se interesan en la máxima referida muchos Teólogos, que sin embargo de negar que el pecado en razon de ofensa sea *simpliciter* infinito, asientan que nunca puede igualarle con su valor satisfaccion alguna de la pura criatura. Los contrarios instan sobre que siendo finito el pecado, podrá crecer la satisfaccion mas, y mas, hasta llegar à igualarle: y para ocurrir à esta dificultad, digo que es oportunísimo el simil de la linea, que acercándose siempre mas, y mas à la otra, nunca llega à tocarla. Sirve tambien para explicar cómo por mas que el hombre crezca en perfeccion, nunca llegará à igualar al Angel: acercarásele mas, y mas; pero nunca llegará à tocarle. Lo mismo digo del bruto, respecto del hombre.

Geometría. *Dos paredes de un edificio, si están hechas á plomo, no pueden ser paralelas, ò equidistantes; antes bien es preciso que disten mas una de otra por la parte superior, que por la inferior.*

§. II.

10 ESta Paradoxa está ya bastantemente vulgarizada; sin embargo me pareció proponerla aqui, porque aunque muchos la saben, son muchos mas los que la ignoran. A estos parecerá à primera vista tan falsa que lo contrario juzgarán evidente: no obstante la demostracion de ella es facilísima, aun sin usar de figura. El estár las paredes hechas à plomo no es otra cosa que estár formadas en linea recta ácia el centro de la tierra, que es la linea de la direccion del plomo, y de todos los graves. Considérese ahora, que las lineas rectas que van de la circunferencia ácia el centro, quanto mas se acercan al centro, menos distan entre sí (proposicion evidente entre los Matemáticos); y se hallará, que estando las dos paredes mas vecinas al centro por la parte inferior, que por la superior, es preciso que disten menos una de otra por la inferior, que por la superior; pero esta diferencia, à causa de la gran distancia del centro, es totalmente insensible.

11 Adviértese que esta demostracion procede en suposicion de la comun opinion filosófica que los graves baxan por linea recta ácia el centro de la tierra; lo qual no es tan cierto que no admita alguna duda, como se verá mas abaxo. No obstante lo mismo sucederá, y lo mismo se puede demostrar, en suposicion de que baxen los graves por linea recta al exe de la tierra, como no estén tiradas de Oriente à Poniente, cruzando el exe; sino de Polo à Polo, siguiendo la direccion del exe.

Es imposible saber si los objetos se nos representan à los ojos, segun la verdadera magnitnd que tienen en sí mismos. Optica.

§. III.

12 LA parte mas interna del ojo es una túnica, llamada *retina*, donde paran los rayos, ò especies visibles de los objetos, despues de pasar por los tres humores, aqueo, cristalino, y vitreo, que componen el ojo, y por las túnicas que contienen los dos primeros. La

La razon de parar en la retina los rayos, y no antes, es porque asi los humores, como las demás túnicas, son transparentes, y la retina es opáca.

13 En esta túnica, pues, estando el objeto proporcionado, y el órgano en todo bien dispuesto, se forma una imagen perfectísima de aquel, la qual viene à ser el objeto inmediato en que se exercita la vision.

14 Es cosa manifiesta entre los inteligentes de la Optica que quanto esta imagen es mayor, tanto mayor se representa el objeto. Esta regla coincíde con otra de la Optica, que es, que aquellos objetos parecen mayores que se ven debaxo de mayor ángulo óptico; y aquellos menores que se ven debaxo de menor ángulo óptico; porque de hecho à proporcion del ángulo óptico, es mayor, ò menor la imagen que se forma en la retina. Pero porque el explicar qué es ángulo óptico, cómo, y de dónde se forma, sería cosa muy prolixa, tomamos ahora la medida de la aparente magnitud del objeto, solo por el tamaño de la imagen.

15 Esta imagen es mayor, ò menor, aun respecto del mismo objeto, à proporcion que el objeto está mas, ò menos distante. Por esta razon el mismo objeto quanto está mas distante parece menor, y quanto mas próxîmo parece mayor. Esto supuesto, pregunto: ¿En qué distancia se nos representan los objetos, de modo que formen la imagen proporcionada à su verdadera magnitud? Nadie me podrá responder; porque nadie lo sabe, ni para esto es dable hallar alguna regla. Que se diga que à la distancia de dos pies, que à la de quatro, que à la de ocho, todo será voluntario. Luego es imposible saber si los objetos se nos representan à los ojos segun la verdadera magnitud que tienen en sí mismos.

16 Añádese à esto, que el mismo objeto no dista igualmente segun todas sus partes, sino desigualmente del ojo. Pongo por exemplo: Una pared que tengo enfrente, à corta distancia, segun una parte suya, está mas cerca del ojo, y segun las otras succesivamente se va alexando mas, y mas. Luego partes iguales en sí mismas de un mismo objeto (v. gr. dos partes de la pared, cada una de la dimension de una vara tomando la una en la mayor vecindad al ojo, y la otra en la mayor distancia) se representan desiguales, porque forman las parciales imágenes desiguales. ¿Quál, pues, se representa segun su verdadera magnitud? Acaso ninguna.

17 Aun no pára aqui la dificultad. Es cierto, con certeza moral, yá que no con evidencia matemática, que no à todos los hombres, aun supuesta la misma distancia, se les representa un mismo objeto con igual magnitud. La razon es, porque la magnitud de la imagen no depende precisamente del tamaño, y distancia del objeto, mas tambien de la estructura, y conformacion del ojo. Segun es mas, ò menos convexô el cristalino, segun los humores, y túnicas son respectivamente mas, ò menos diáfanas, padecen mas, ò menos refraccion los rayos que vienen de los objetos; y de la mayor, ò menor refraccion, viene à ser mayor, ò menor la imagen en la retina. Esto se ve en los vidrios que se forman para ayudar la vista, los quales à proporcion de su convexîdad abultan el objeto: ni depende de otro principio el que un microscopio represente el objeto cien veces mayor que un vidrio plano. Asi hay ojos que son microscopios naturales: tales son los de los animales minutísimos. El Padre Gaspar Scotto (*a*) refiere que vió con el microscopio, y hizo ver à otros unos animalillos tan menudos que infestan à las pulgas, como las pulgas à nosotros. Con todo, es cierto que estos vivientes átomos se ven unos à otros: ven uno por uno sus propios miembros: ven el mismo alimento de que se nutren; lo qual no puede ser sin que sus ojos sean unos naturales microscopios insignes; y esto depende de su material estructura.

18 Es verdad que no cabe tanta desigualdad en los ojos de diferentes hombres: pero no se puede negar que hay al-

(*a*) *In Mag. natur. part.* 1. *lib.* 10.

alguna en atencion à que en todos los demás miembros observamos sensible discrepancia. Apenas, ni aun apenas se hallarán dos hombres que tengan perfectamente semejantes en la figura la naríz, la frente, las manos, ù otro qualquiera miembro. Lo mismo debemos discurrir de los ojos.

19 La experiencia lo confirma. Gasendo refiere de sí que tenia los ojos tan diferentes, que en el uno se le representaban los objetos con mucho mayor magnitud que en el otro; y aunque esto es una cosa admirable, se le haría notable injuria à aquel excelente varon en no creerla. El Padre Dechales dice de sí lo mismo, aunque la desigualdad no era tanta: y de un Coadjutor, Portero del Colegio donde habitaba, cuenta, que con un ojo veía bien los objetos distantes, y mal los cercanos; con el otro al contrario, veía bien los cercanos, y mal los distantes. Si estas desigualdades se observan en los ojos de un mismo individuo, mucho mas es de creer que las hay en los individuos diferentes. Y asi debemos concluir, que diferentes hombres ven, segun diferente magnitud, los objetos.

20 Opondráseme acaso, que quando diferentes hombres tratan de determinar la altura de una pared, ù de una torre, todos convienen en que tiene tantas varas, ò tantos pies. Respondo que es asi. ¿Pero cómo se me probará que las varas, ò los pies se le representan de la misma magnitud à uno que à otro? Asi que la dificultad, despues de esta convencion, toda subsiste. Concordamos en que la pared tiene tantas varas: pero queda la duda de si la vara se me representa à mí mayor, ò menor que al otro. Concordamos tambien en que cada vara tiene tantos pies, cada pie tantos dedos, y cada dedo tantas lineas: pero todo esto no es mas que ir succesivamente transfiriendo la qüestion de las mayores medidas à las menores: pues de esa última medida que se señale, preguntaré de dónde consta que al otro se le representa tan grande, y no mayor, ni menor que à mí.

Nin-

Ningun objeto se ve clara, y distintamente sino con un ojo solo. *Optica.*

§. IV.

21 ES el sentido que quando se ve algun objeto, aunque concurren ambos ojos à la vision, solo con el uno se ve claramente, y con el otro con alguna confusion.

22 Sobre el asunto de esta proposicion se encontraron los dos grandes hombres que poco ha cité, Pedro Gasendo, y el Padre Claudio Dechales. Gasendo afirmó lo que yo afirmo. El Padre Dechales le impugnó, siguiendo el sentir comun, en que parece están todos los hombres. Esta qüestion viene à reducirse à otra, conviene saber, si los exes ópticos son paralelos, ò no. Llámase exe óptico aquel rayo, ò linea, que desde el objeto, ù de un punto del objeto se entiende pasar por el centro del ojo à la retina, ù de la retina (que todo es uno) pasar por el centro de todo el orbe del ojo à aquel punto del objeto donde se termina la vista. Y como cada ojo tenga su exe óptico distinto, se duda si los dos son paralelos; esto es, si necesariamente guardan en toda su longitud la misma distancia que tienen considerados en el centro de los ojos, de tal modo que se terminen siempre dos puntos del objeto igualmente distantes que distan los centros de los ojos entre sí; ò si se pueden terminar à un punto mismo del objeto, en cuyo caso, acercándose uno à otro, se desvian del paralelismo, como es claro.

23 Es constante que el ojo, no solo ve aquel punto del objeto donde se termina el exe óptico, sí tambien un espacio muy dilatado en torno de él. Pero tambien es cierto que lo que ve con toda claridad solo es aquel punto (no se habla aqui del punto matemático, sino de el sensible, y fisico), y las demás partes del objeto se ven algo confusamente, tanto mas, quanto mas distaren de aquel punto. De aqui se infiere evidentemente que si los exes óp-

ópticos de ambos ojos se terminan en un punto mismo del objeto, con ambos ojos se verá aquel punto claramente; pero si los exes son paralelos, y se terminan necesariamente en dos puntos igualmente distantes que los centros de los ojos, ningun punto del objeto podrá ser visto claramente sino por un ojo solo, éste, ò aquel à arbitrio del que mira.

24 Gasendo prueba su opinion, y nuestra, con la experiencia arriba alegada, de que en un ojo se le representaba el objeto con triplicada magnitud que en el otro: de lo qual infiere, que quando miraba à qualquiera objeto, uno de los dos ojos estaba ocioso, porque si usase de entrambos se le representaría el objeto duplicado, esto es, no como uno solo, sino como dos; siendo preciso en la suposicion hecha que el objeto se le representase, ocupando à un tiempo, ya mayor, ya menor espacio, lo qual es imposible sin que parezca duplicado; pero Gasendo no veía el objeto duplicado: luego le veía con un ojo solo.

25 El Padre Dechales, aunque propone este argumento de Gasendo (*a*), le dexa sin respuesta. No sé si fue por descuido, ò por falta de solucion competente. Lo que yo noto en él es, que si pretende inferir total ociosidad en uno de los dos ojos, la ilacion es falsa, pues nunca sucede que alguno de los dos, estando abierto dexe de ver algo. La prueba experimental es facil. Póngase uno à poca distancia à mirar el punto medio de una pared bastantemente larga, observará que ácia uno, y otro extremo ve, aunque con alguna confusion, alguna parte, la qual, por la interposicion de la naríz, se oculta al ojo que está en la parte opuesta; lo qual prueba que en ambos ojos se está exerciendo à un mismo tiempo la potencia visiva.

26 La que me parece prueba decisiva à favor de la sentencia de Gasendo (bien que Gasendo no la trahe) es la siguiente: Póngase uno à mirar con un ojo solo, ò cerrado el otro, algun objeto pequeño, por un vidrio interpuesto à la mitad de la distancia, poco mas, ò menos: entre la vista, y el vidrio notará que el objeto se descubre por una parte determinada del vidrio, la qual señalará. Cierre luego el ojo con que miraba, y abra el otro: notará, que el objeto se le descubre por otra parte del vidrio, distante de la primera, como cosa de dedo y medio, la qual tambien señalará. Mire despues el objeto con ambos ojos, sin mudar de situacion, verá que no se le descubre por un punto del vidrio medio entre los dos señalados, ni tampoco por los dos à un tiempo, sino por alguno de ellos: luego evidentemente no le ven distintamente ambos ojos; porque el exe óptico del ojo izquierdo no puede penetrar el vidrio por el punto por donde le penetra el del derecho, ni éste por donde le penetra aquel, porque esto no podria ser sin perder la rectitud. Esto se entenderá claramente en la figura.

(*a*) *Lib.* 1. *Optic. prop.* 10.

27 Sean (Figura II.) *A B* los dos ojos, *G F* el vidrio por donde miran *E* el objeto, *A E* el exe óptico del ojo derecho, *B E* el exe óptico del izquierdo. Es claro que el ojo derecho solo puede ver el objeto por el punto *C*, y el izquierdo solo por el punto *D*, porque por aquel pasa el exe óptico del derecho, y por éste el del izquierdo; y si el ojo izquierdo viera por el punto *C*, ò el derecho por el punto *D*, se torcieran de la rectitud los exes ópticos, lo qual es imposible. Luego suponiendo, por la experiencia alegada (la qual yo repetí muchas veces), que el objeto *E* no se puede ver à un tiempo (aun mirando con ambos ojos) por entrambos puntos *C* y *D*, sino por uno solo, es claro que solo el exe óptico de un ojo se dirige al objeto, y solo éste le ve distintamente. Este argumento (si yo no me engaño mucho) es perfectamente demostrativo. *Fig. II.*

28 Opone el Padre Dechales lo primero: si quando se está mirando algun objeto se cierra qualquiera de los dos ojos, sin mover el otro, se ve aun distintamente el objeto: luego entrambos dirigian los exes ópticos al mismo objeto. Respondo negando que en el caso dicho no se mueva.

va uno de los ojos. Es verdad que no tenemos sensacion clara de este movimiento; pero esto depende, no solo de que el movimiento es velocísimo; mas tambien de que es brevisímo, y casi insensible el espacio que ha menester moverse el ojo para dirigir el exe óptico al punto que terminaba el exe óptico del otro ojo. Añado, que Gasendo testifica que habiendo hecho que otro le observase los ojos en el caso que propone el argumento, fue claramente advertido el movimiento del ojo que antes no se dirigia al objeto.

29 Opone lo segundo, que si los dos exes ópticos se terminasen à distintos puntos, viéramos à un tiempo distintamente dos objetos distintos, y asi pudieramos leer à un tiempo las dos páginas de un libro, ò las dos columnas de una plana. Respondo que no se sigue; porque uno de los dos ojos tiene en parte suspensa la actividad, de modo que no ve con entera claridad algun objeto. Y aunque acaso sea inaveriguable la causa fisica de esta suspension, no por eso debemos dexar de asentir al efecto, quando nos obliga à ello un argumento demostrativo. En infinitas materias vemos los efectos, sin poder penetrar las causas.

30 Añado que este argumento se puede retorcer fuertísimamente contra la sentencia comun, probando que de ella se sigue que los ojos verian claramente à un tiempo dos objetos distantes, mucho mas que aquellos, sobre que se forma contra nosotros el argumento. Sean (en la Figura III.) los ojos *M N* que miren al objeto *O*, como quiere la sentencia comun. Remuévase despues el objeto *O* sin variar la situacion, ni mover los ojos, y no haya objeto alguno intermedio que estorve la vista hasta el plano *P R*. Es claro que el rayo óptico del ojo *N* se termina al objeto *P*, y el del ojo *M* al objeto *R*, que distan entre sí mucho mas que los centros de los dos ojos, y por consiguiente los verian claramente entrambos. Luego en la sentencia comun se sigue que los ojos podran ver à un tiempo objetos mucho mas distantes que aquellos sobre que

Fig. III.

que se forma el argumento contra la nuestra: porque el paralelísmo de los exes ópticos solo puede, quando mas, inferir que se vean distintamente dos objetos distantes entre sí quanto distan entre sí los eentros de los dos ojos; pero en la sentencia comun, como despues de convenir en un punto los exes ópticos, es preciso que se crucen siguiendo la rectitnd, si el plano en que paran está muy distante, se terminarán à dos objetos distantes entre sí veinte, treinta, quarenta, y cien veces mas que distan los centros de los ojos.

Los dias naturales son entre sí desiguales.

§. V.

Astronomia.

31 EL dia en su primera division es, ò natural, ò artificial. El dia artificial es aquel espacio de tiempo que el Sol alumbra el Horizonte; y éste manifiestamente es desigual, salvo en las regiones que están debaxo de la Tórrida, donde son sensiblemente iguales los dias, y en las regiones Subpolares, ò Circumpolares, donde el año no consta mas que de un dia, y una noche.

32 El dia natural (que se toma por lo mismo que el espacio de veinte y quatro horas) se divide en dia del primer mobil, Sydéreo, y Solar. Dia del primer mobil es aquella duracion que corre desde que un punto del primer mobil se aparta del Meridiano (ò linea que imaginamos ir sobre nuestras cabezas de un Polo à otro), hasta que vuelve à él. Dia Sydéreo es el tiempo que gasta qualquiera estrella de las fixas en hacer el mismo círculo, saliendo, y volviendo al Meridiano. Dia Solar es el tiempo en que el Sol absuelve la circulacion misma. Este dia es mayor que el Sydéreo, porque el Sol se mueve mas tardamente que las estrellas de Oriente à Poniente; lo qual viene de su movimiento particular, con el qual por la Eclíptica retrocede (digámoslo asi) de Poniente à Oriente, cerca de un grado cada dia. Si suponemos, pues, que el Sol, y una estrella de las fixas se hallan hoy al punto del Medio-