

y son años, porque esta es la especie del minuendo y sustraendo.

*Cuestion segunda.* — En una escuela donde habia estudiando 106 niños, ¿cuántos quedarán habiendo salido 59 niños que ya han concluido sus estudios?

*Resolucion.* — Minuendo 106 niños  
                   sustraendo 59  
 quedan. . . . . residuo 47 niños.

*Cuestion tercera.* — Un niño tiene 96 premios obtenidos por su aplicacion y otro tiene 47; ¿cuántos premios tiene el primero mas que el segundo?

*Resolucion.* — Minuendo 96 premios  
                   sustraendo 47  
 exceso ó residuo 49 premios.

*Cuestion cuarta.* — Un individuo que tenia 3.000 pesos no pudiendo trabajar en cuatro años gastó en el primer año 999 pesos, en el 2º 888, en el 3º 777 y en el 4º 336; ¿cuánto le iba quedando en cada año?

*Resolucion.* — Tenia el individuo. . . . . 3.000 pesos  
 gastó. . . . . 999  
 Le quedó al fin del primer año. . . . . 2.001 pesos  
 gastó. . . . . 888  
 Le quedó al fin del 2º. . . . . 1.113 pesos  
 gastó. . . . . 777  
 Le quedó al fin del 3º. . . . . 336 pesos  
 gastó. . . . . 336  
 Luego no le quedó nada. . . . . 000

## LECCION V.

## MULTIPLICACION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

51. P. Qué es multiplicacion?

R. Es la operacion por la cual dando conocidos dos números, se busca un tercero que sea con respecto á uno de ellos lo que el otro es respecto de la unidad.

52. P. Qué nombre se da á los números que entran en esta operacion?

R. El número que se da para multiplicar se llama multiplicando, aquel por quien se multiplica multiplicador, y el resultado de la operacion producto.

53. P. De cuántos modos pueden ser los productos respecto del multiplicando?

R. Si el multiplicador es mayor que la unidad, el producto será mayor que el multiplicando: si el multiplicador es igual á la unidad, el producto será igual al multiplicando, y si el multiplicador es menor que la unidad, el producto será menor que el multiplicando.

54. P. Podeis darme otra definicion mas sencilla de la multiplicacion?

R. Tambien puede decirse que es tomar un número, que se llama multiplicando, las veces que exprese otro que se llama multiplicador.

55. P. Qué otros nombres se dan al multiplicando y multiplicador?

R. Tambien se les llama indistintamente factores del producto.

56. P. Con qué signo se indica la multiplicacion?

R. Con este signo  $\times$  que se lee *multiplicado por*, ó simplemente *por*, y se pone entre los factores, como  $2 \times 3 = 6$ , dos por tres igual seis.

57. P. Pueden considerarse en una multiplicacion tres ó mas factores?

R. Aunque en realidad serian mas de una multiplicacion aquellas en que entran mas de dos factores, suelen considerarse tres y mas factores que compongan un solo producto.

58. P. Qué debe saberse para multiplicar?

R. Los productos de los números dígitos de dos en dos, los cuales deben aprenderse de memoria.

59. P. Cómo se multiplica un número compuesto por uno dígito?

R. Se coloca el dígito debajo de las unidades del compuesto y se tira una raya por debajo. Luego se van multiplicando por el dígito las unidades del compuesto, despues las decenas, en seguida las centenas, etc.; pero solo se van escribiendo las que sobran deducidos los dieces, pues por cada diez se reserva una para agregarla al producto siguiente, y cuando deducidos los dieces no sobra nada, se escribe cero en el lugar que corresponda.

60. P. Cómo se multiplica un número dígito por uno compuesto?

R. Escribiendo el dígito debajo del compuesto y eje-

cutando la operacion como la de un compuesto por un dígito.

61. P. Porqué ha alterado V. de este modo el orden de los factores?

R. Para mayor comodidad en la operacion, y porque el producto es el mismo, aunque se invierta el orden de los factores.

62. P. Cómo se multiplica un número compuesto por otro compuesto?

R. Despues de escrito el factor de menos cifras debajo del que tenga mas, multiplico todo el primer factor por las unidades del segundo, luego por las decenas, etc., teniendo cuidado de empezar á escribir cada producto debajo de la cifra por que se multiplica, y sumando estos productos parciales, se obtendrá el producto total.

63. P. Y si alguna de las cifras del factor que hace las veces de multiplicador es cero?

R. No se multiplica por ellas, sino que se sigue á formar á la izquierda el producto parcial de la cifra significante que hubiere.

64. P. Qué se hace cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros?

R. Se agregan al un factor tantos ceros como acompañen á la unidad en el otro.

65. P. Y si el multiplicando, ó el multiplicador ó ambos factores tienen ceros á su derecha?

R. Se prescinde de los ceros durante la operacion, y al producto se agregan tantos cuantos haya en el multiplicando y multiplicador juntos.

66. P. A qué cuestiones se aplica la operacion de multiplicar?

R. A aquellas que tienen por objeto : 1º hacer una cantidad cierto número de veces mayor; 2º cuando conocido el valor de una cosa se quiere saber el de varias de la misma especie; 3º cuando se reducen unidades de especie superior á inferior, y 4º siempre que se haya de tomar un número las veces que exprese otro.

67. P. Antes de ejecutada la multiplicacion, cómo se conocerá cuál de los factores es el multiplicando?

R. Se conocerá siempre al multiplicando en que este ha de ser de la especie del producto, la cual debe saberse por la naturaleza de la cuestion.

68. P. Y despues de ejecutada la operacion, cómo se conocerá la especie del producto?

R. Por la misma naturaleza de la cuestion, y porque ha de ser de la especie del multiplicando.

69. P. Y en todo caso, cómo puede considerarse al multiplicador?

R. Como un número abstracto, que solo expresa las veces que se ha de tomar el multiplicando.

70. P. Cómo se llaman los números que contienen á otro dos veces, tres veces, etc.?

R. Un número se llama duplo de otro, cuando le contiene dos veces exactamente; triplo, cuádruplo, quintuplo, etc., si le contiene tres, cuatro, cinco veces, y en general múltiplo si le contiene varias veces.

### Explicaciones y Ejemplos.

#### 51 y 52.

La definicion que hemos dado de la multiplicacion, nos parece la mas elegante y la mas exacta de cuantas se hallan diseminadas en varios Tratados de Matemáticas. Con efecto, si se dijese que multiplicar es hacer un número tantas veces mayor como unidades contiene otro, si se explicase diciendo que era una suma abreviada, etc., etc., tales definiciones convendrian solo á la multiplicacion por números enteros y mayores que la unidad, porque ¿cuántas veces mayor se hace un número cuando se le multiplica por 1, ó por una cantidad menor que 1, ó en fin cuando se la multiplica por 0? Y si esto no es multiplicar, ¿qué otro nombre tiene ó puede dársele? Es menester convenir en que, prescindiendo del significado que la palabra multiplicar tenga en lenguaje comun, debe considerársela aritméticamente segun la definicion que hemos dado de ella, si no se quiere incurrir en mil contradicciones, cuando se haya de aplicar á otra clase de números iguales ó menores que la unidad.

#### 53.

Para explicar cómo aumentan y disminuyen los productos, segun aumenta ó disminuye el multiplicador, y cómo el producto tiene respecto del multiplicando la

misma relación que el multiplicador respecto de la unidad, nos valdrémos del siguiente ejemplo.

Sea el número 4 el que nos proponemos multiplicar por 2, por 1, por  $\frac{1}{2}$ , y por 0.

Como multiplicar al 4 por 2 es hacerle duplo, porque 2 es duplo de la unidad, el resultado será 8, es decir que:  $4 \times 2 = 8$ .

Como multiplicar 4 por 1 es hacerlo igual, porque el 1 es igual á la unidad, el producto será el mismo 4, luego  $4 \times 1 = 4$ .

Como multiplicar al 4 por  $\frac{1}{2}$  es hacerle mitad, porque  $\frac{1}{2}$  es mitad de la unidad, el resultado será 2, de modo que  $4 \times \frac{1}{2} = 2$ .

Como multiplicar al 4 por 0 es volverle nada, porque es nada respecto de la unidad, el resultado es 0, y  $4 \times 0 = 0$ .

Y comparando los resultados :

$$4 \times 2 = 8 \quad 4 \times 1 = 4 \quad 4 \times \frac{1}{2} = 2 \quad 4 \times 0 = 0$$

verémos : que un producto puede ser mayor, igual ó menor que el multiplicando, segun que el multiplicador sea mayor, igual ó menor que la unidad.

NOTA. —  $\frac{1}{2}$  significa media unidad, y he tenido que usar de esta expresion antes de hablar de la clase de números á que pertenece, por convenir así á la claridad de la anterior explicacion que de otro modo hubiera quedado incompleta.

## 54.

La definicion á que se refiere esta pregunta puede explicarse asi :

Multiplicar 4 por 2 es hacerle mayor tomándole dos veces.

Multiplicar 4 por 1 es hacerle igual tomándole una vez.

Multiplicar 4 por  $\frac{1}{2}$  es hacerle menor tomándole media vez.

Y multiplicar 4 por 0 es anularle tomándole ninguna vez ó, lo que es lo mismo, no tomándole.

## 55, 56, 57.

Multiplicar 7 por 2 es tomar al 7 las veces que expresa el número 2, y el resultado es 14, en cuyo caso serán 7 el multiplicando, 2 el multiplicador y 14 el producto; pero al 7 y al 2 se les puede llamar indistintamente factores del producto 14.

Esta operacion se indicaria del modo siguiente :

$$7 \times 2 = 14$$

Se puede decir que los números 2, 3 y 4 son factores de 24, porque multiplicados entre sí le producen.

$$2 \times 3 \times 4 = 24.$$

## 58.

Debiendo saberse de memoria los productos de los nú-

meros dígitos, agregamos aquí la colección de ellos aumentada de los productos de 10, 11 y 12, por el mucho uso que tienen en la práctica, y no la presentamos en la forma pitagórica, porque en la que está, creemos se facilite más su estudio.

**TABLA DE MULTIPLICAR.**

1 por 1, 1	2 por 1, 2	3 por 1, 3
1 2, 2	2 2, 4	3 2, 6
1 3, 3	2 3, 6	3 3, 9
1 4, 4	2 4, 8	3 4, 12
1 5, 5	2 5, 10	3 5, 15
1 6, 6	2 6, 12	3 6, 18
1 7, 7	2 7, 14	3 7, 21
1 8, 8	2 8, 16	3 8, 24
1 9, 9	2 9, 18	3 9, 27
1 10, 10	2 10, 20	3 10, 30
1 11, 11	2 11, 22	3 11, 33
1 12, 12	2 12, 24	3 12, 36

4 por 1, 4	5 por 1, 5	6 por 1, 6
4 2, 8	5 2, 10	6 2, 12
4 3, 12	5 3, 15	6 3, 18
4 4, 16	5 4, 20	6 4, 24
4 5, 20	5 5, 25	6 5, 30
4 6, 24	5 6, 30	6 6, 36
4 7, 28	5 7, 35	6 7, 42
4 8, 32	5 8, 40	6 8, 48
4 9, 36	5 9, 45	6 9, 54
4 10, 40	5 10, 50	6 10, 60
4 11, 44	5 11, 55	6 11, 66
4 12, 48	5 12, 60	6 12, 72

7 por 1, 7	8 por 1, 8	9 por 1, 9
7 2, 14	8 2, 16	9 2, 18
7 3, 21	8 3, 24	9 3, 27
7 4, 28	8 4, 32	9 4, 36
7 5, 35	8 5, 40	9 5, 45
7 6, 42	8 6, 48	9 6, 54
7 7, 49	8 7, 56	9 7, 63
7 8, 56	8 8, 64	9 8, 72
7 9, 63	8 9, 72	9 9, 81
7 10, 70	8 10, 80	9 10, 90
7 11, 77	8 11, 88	9 11, 99
7 12, 84	8 12, 96	9 12, 108

10 por 1, 10	11 por 1, 11	12 por 1, 12
10 2, 20	11 2, 22	12 2, 24
10 3, 30	11 3, 33	12 3, 36
10 4, 40	11 4, 44	12 4, 48
10 5, 50	11 5, 55	12 5, 60
10 6, 60	11 6, 66	12 6, 72
10 7, 70	11 7, 77	12 7, 84
10 8, 80	11 8, 88	12 8, 96
10 9, 90	11 9, 99	12 9, 108
10 10, 100	11 10, 110	12 10, 120
10 11, 110	11 11, 121	12 11, 132
10 12, 120	11 12, 132	12 12, 144

59.

Hablemos de la regla para multiplicar un número compuesto por un dígito, y para practicarla nos propondremos multiplicar 63.973 por 3.

Principiare por colocar el multiplicador 3 debajo de

unidades del multiplicando y pasaré una raya por debajo.

63.973 multiplicando.

3 multiplicador.

191.919 producto.

Hecho esto, multiplicaré todas las cifras del multiplicando por el multiplicador empezando por las unidades en esta forma :

3 por 3 son 9 : que escribo.

3 por 7 son 21 : escribo 1 y llevo 2.

3 por 9 son 27 y 2 son 29 : pongo 9 y llevo 2.

3 por 3 son 9 y 2 son 11 : pongo 1 y llevo 1.

3 por 6 son 18 y 1 son 19 : pongo 9 y llevo 1.

Y no habiendo mas cifras que multiplicar, escribo la cifra 1 que llevaba del último producto.

60 y 61.

El producto es el mismo aunque se inviertan los factores :  $3 \times 4 = 4 \times 3$ .

Con efecto, descomponiendo al 3 y al 4 en unidades, veremos que 3 filas de 4 unos es lo mismo que 4 filas de 3 unos.

4 4 4 4	4
4 4 4 4	4
4 4 4 4	4
3 3 3 3	12

Esto supuesto, cuando se ha de multiplicar un número

dígito por otro compuesto, invierto el orden de los factores para mayor comodidad, supuesto que esta inversion no altera el valor del producto.

Supongamos que se ha de multiplicar 6 por 13.468 — é invirtiendo los factores será :

13.468 multiplicador.

6 multiplicando.

80,808 producto.

Donde empezamos á ver, que no es el lugar que ocupa lo que constituye á un número multiplicando ó multiplicador, sino la naturaleza de la cuestion.

62.

Pasemos á la multiplicacion de dos números compuestos, y sea el número 26.936 el que se ha de multiplicar por 24.

Escribo el menor debajo del mayor.

26.936	}	Factores.
24		
107.744	}	Productos parciales.
538.72		
646.464		Producto total.

Después de multiplicado todo el multiplicando por las 4 unidades del multiplicador, principiando á escribir los productos bajo de ellas, y luego por las decenas con el

mismo orden, he sumado los productos parciales y obtenido el producto total.

## 63.

Algunas veces suele haber ceros entre las cifras del que hace las veces de multiplicador, por ejemplo : si se quiere multiplicar 37.037 por 108.

Después de planteada la operación.

$$\begin{array}{r} 37.037 \\ 108 \\ \hline 296296 \\ 37037 \\ \hline 3.999.996 \end{array}$$

he formado el producto del multiplicando por las 8 unidades del multiplicador, y siendo 0 las decenas de este, pasé á la 1 centena por la que multipliqué igualmente al multiplicando : por último he sumado los productos parciales para obtener el total.

## 64.

Tratándose de multiplicar 356 por 10, 100, 1000, etc., no habrá mas que añadir uno, dos, tres ceros, etc., al dicho número de este modo :

$$\begin{array}{l} 356 \times 10 = 3560 \\ 356 \times 100 = 35600 \\ 356 \times 1000 = 356000 \end{array}$$

Donde se ve, que en añadir uno, dos ó mas ceros es hacerle diez, ciento, mil veces mayor, y la inversa sucedería si teniendo ceros á la derecha un número cualquiera, se le quitasen uno, dos ó mas para hacerle diez, ciento, mil veces menor.

## 65

Hablaremos de una operación de multiplicar en que ambos factores tienen ceros á la derecha, por ejemplo : sea el número 36.000 que se ha de multiplicar por 4.500, y planteada la operación :

$$\begin{array}{r} 36.000 \\ 4500 \\ \hline 180 \\ 144 \\ \hline 162000000 \end{array}$$

he prescindido de los ceros : multipliqué 36 por 5, luego por 4, sumé los productos parciales y agregué cinco ceros, que son los que había á la derecha de ambos factores.

Los siguientes ejemplos abstractos servirán de práctica de todas las reglas anteriores.

34558	37000	7003
2002	4080	460
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
69116	296	42018
69116	148	28012
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
69,185,116	150,960,000	3,221,380

4,587	10,000	70,000
4,000	100	400
4,587,000	1,000,000	28,000,000

66, 67, 68, 69.

Hablarémos de la aplicacion de la regla de multiplicar á los diferentes casos que ocurren en la práctica.

*Cuestion primera.* Una casa que tiene de largo 9 varas se quiere hacer 4 veces mayor : ¿ qué largo se le dará á la casa ?

*Resolucion.* — Esta cuestion da lugar á una multiplicacion, porque se quiere hacer un número mayor de la que es. El largo de la casa es el multiplicando, porque es el número que se va á tomar algunas veces. Tambien conozco que 4 es el multiplicador, porque expresa las veces que el largo de la casa debe tomarse. Plantearé pues la operacion en esta forma :

$$\begin{array}{r} 9 \text{ varas.} \\ 4 \\ \hline 36 \text{ varas.} \end{array}$$

Y hallo de este modo en el producto el largo que se le dará á la casa.

*Cuestion segunda.* — Cuánto importarán 326 quintales de cacao á 20 pesos quintal ?

*Resolucion.* — Conocido el precio de un quintal de cacao, quiero averiguar el valor de varios, y por lo tanto

la cuestion da lugar á una operacion de multiplicar : el precio es el multiplicando, porque es el que se ha de tomar varias veces, y el número de quintales es el multiplicador, porque expresa las veces que el precio se ha de tomar. Sin embargo, como el número de los pesos es menor que el de los quintales, plantearé así la operacion.

$$\begin{array}{r} 326 \\ 20 \text{ pesos.} \\ \hline 6520 \text{ pesos.} \end{array}$$

Y hallaré en el producto el total importe del cacao.

En este caso volvemos á hacer notar que es la naturaleza de la cuestion la que nos ilustra acerca de cuál de los números es el verdadero multiplicando y no el lugar que en la operacion ocupa.

*Cuestion tercera.* — 36 arrobas ¿ cuántas libras serán ?

*Resolucion.* — Siendo el objeto de la cuestion reducir unidades de especie superior á inferior, la operacion por la cual se resuelve es de multiplicar, y como busco libras el multiplicando son libras. Lo haré así.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 25 \text{ libras.} \\ \hline 180 \\ 72 \\ \hline 900 \text{ libras.} \end{array}$$

Luego 36 arrobas hacen 900 libras.

*Cuestion cuarta.* — Un hacendado que tenia 500 ca-



bezas de ganado, le ha aumentado en el primer año de modo que tiene dos tantos de lo que tenía al principio; en el segundo año tres tantos de lo que tenía al fin del primero, y al concluir el tercer año tiene cinco tantos de los que tenía al fin del segundo. Se pregunta: ¿cuántas cabezas de ganado tendrá?

*Resolucion.* — Esta se reduce á varias multiplicaciones en el orden siguiente:

Tenia al principio. . . . .	500 cabezas.
	<u>2</u>
Al fin del primer año. . . . .	1,000
	<u>3,000</u>
Al fin del segundo. . . . .	5
	<u>15,000</u>
Y al fin de tercero. . . . .	45,000 cabezas.

*Cuestion quinta.* — Se han comprado 200 pesos en azúcar á un tratante que la vende á razon de 5 libras por cada un peso. ¿Cuántas libras debe entregar?

*Resolucion.* — 200  
                   5 libras.  


---

 1,000 libras.

Planteada la operacion y resuelta, hallo que ha de entregar 1.000 libras de azúcar; cuyo resultado me da á conocer que no siempre es dinero el producto aunque lo sea uno de los factores.

*Cuestion sexta.* — Se desea saber cuántos minutos tienen dos dias.

*Resolucion.* — Como cada dia tiene 24 horas, y cada hora 60 minutos, multiplicaré los 2 dias primero por 24 y lo que resulte por 60 en esta forma:

	24 horas.
Los. . . . .	2 dias.
	<u>48 horas.</u>
hacen, . . . . .	60 minutos.
	<u>2880 minutos.</u>

y dichas horas hacen. 2880 minutos.

Se debe prestar mucha atencion en las cuestiones que dan lugar á la multiplicacion, para conocer cuál de los factores es el multiplicando; porque este ha de dar su nombre al producto, mientras que el multiplicador se puede considerar como un número abstracto, y á fin de no sufrir equivocacion, una vez conocido el multiplicando, se le escribe la clase de unidades á que pertenece, aunque no se haga lo mismo con el multiplicador. Así lo hemos procurado observar en la resolucion de las cuestiones anteriores.

70.

Se ha dicho ya lo que es un número duplo, triplo, cuádruplo, y en general múltiplo de otro. Resta, pues, hacerlos mas patente con los ejemplos.

El número 60 es duplo de 30, porque le contiene dos veces: triplo de 20, porque le contiene tres veces: cuádruplo de 15, porque le contiene cuatro veces: quintuplo de 12, porque le contiene cinco veces, y séxtuplo de 10,

601992

porque le contiene seis veces. También es 60 múltiplo de 5, de 4, de 3, y de 2, porque los contiene varias veces. Todo número entero es múltiplo de 1, porque el uno se contiene en cualquier número entero una ó mas veces exactamente, y se llaman factores de un número los que multiplicados por otro le producen. Por consiguiente, todo número es múltiplo de cualquiera de sus factores.

También los números y sus factores se llaman simples, cuando no tienen otro factor que la unidad, y compuestos, cuando tienen otros.

El número 5 es simple, porque no contiene mas factor que la unidad.

El número 6 es compuesto, porque tiene los factores 2 y 3, pues  $2 \times 3 = 6$ .

Los números 4 y 6 son factores de 24, y son factores compuestos el 1º de  $2 \times 2$ , y el 2º de  $2 \times 3$ .

Es muy útil ejercitarse en la composición y descomposición de los números en factores.

## LECCION VI.

### DIVISION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

71. P. Qué es division?

R. Es la operacion por la cual, conocidos dos números, se busca un tercero que sea respecto al uno lo que la unidad es respecto del otro.

72. P. Cómo se llaman los números que entran en esta operacion?

R. El que se ha de dividir, se llama dividendo; aquel por el cual se ha de dividir, divisor, y el resultado cociente.

73. P. De cuántos modos puede ser el cociente respecto del dividendo?

R. Por la naturaleza de la division, puede ser menor, igual ó mayor que el dividendo; porque si la unidad es menor que el divisor, el cociente será menor que el dividendo: si la unidad es igual al divisor, el cociente será igual al dividendo; y si la unidad es mayor que el divisor, también el cociente será mayor que el dividendo.

74. P. Cómo se define generalmente la division?

R. Diciendo, que es la operacion por la cual se averigua las veces que el divisor está contenido en el dividendo.

75. P. Qué signo se usa para indicar esta operacion?

R. Unas veces se pone el dividendo encima y el divisor debajo de una raya, y otras el dividendo á la izquierda y el divisor á la derecha de dos puntos. Por ejemplo:  $4/2$ , ó  $4 : 2$  quieren decir, 4 dividido por 2.

76. P. Qué relacion tiene la operacion de multiplicar con la de partir?

R. Que puede considerarse al dividendo como un producto, al divisor como uno de los factores, y á la division como una operacion que tiene por objeto hallar el otro factor.

77. P. Qué debe saberse para dividir con prontitud?

R. Los cocientes exactos ó aproximados de los núme