71 ps.... 2 rs.... 3 cuart. próximamente. Del mismo modo se podrán ejecutar las operaciones de sumar, restar y partir denominados, convirtiéndolos antes en decimales.

LECCION XXII.

DE LAS POTENCIAS Y RAICES EN GENERAL, Y DE LA ELEVACION Á LA SEGUNDA POTENCIA Y EXTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS ENTEROS, QUEBRADOS, MIXTOS, DECIMALES Y DENOMINADOS.

254. *P.* Qué se entiende por potencia de una cantidad numérica?

R. El producto que resulta de tomarla varias veces por factor.

255. *P.* Qué nombre se da al producto formado de este modo?

R. Se llama segunda, tercera, cuarta potencia segun que el número elevado haya entrado dos, tres ó cuatro veces por factor.

256. *P.* Qué es raiz de una cantidad?

R. El número que elevado á cierta potencia puede producirla.

257. *P.* Qué nombre se da á las raices?

R. Se llama raiz segunda, tercera, etc., segun que para producir la cantidad sea necesario tomarla dos ó tres veces por factor.

258. *P.* Cómo se llaman las potencias y raices segundas y terceras?

R. Las raices segunda y tercera se llaman raiz cuadrada y raiz cúbica, y las potencias segunda y tercera se llaman cuadrados y cubos.

259. *P.* Qué es exponente?

R. El número que expresa las veces que una raiz se ha de tomar por factor para formar la potencia; y se llama exponente de la potencia, cuando afecta á la raiz que se ha de elevar; y exponente de la raiz, cuando afecta á la potencia de la cual se quiere extraer.

260. *P.* Cómo se expresa que un número se quiere elevar á alguna potencia?

R. Escribiendo el número dentro de un paréntesis y colocando el exponente á su derecha y algo mas arriba, fuera de dicho paréntesis.

261. *P.* Y cómo se expresa que á un número se le ha de extraer raiz?

R. Poniendo el número debajo de la raya superior de este signo $\sqrt{}$ que se llama radical, y en el ángulo se coloca el exponente que expresa la raiz que se quiere extraer.

262. *P.* Qué es todo número respecto de sí mismo?

R. Todo número es raiz primera y potencia primera de sí mismo.

263. *P.* Cómo se eleva al cuadrado un número entero?

R. Multiplicándole por sí mismo.

264. *P.* Puede formarse de otro modo el cuadrado de los números enteros?

R. Sí, señor; pues el cuadrado de un número que no sea dígito se compone de tres partes, á saber: el cuadrado de las decenas, duplo de decenas por unidades, y cuadrado de las unidades.

265. *P.* Cómo se elevará un quebrado á la segunda potencia?

R. Elevando al cuadrado su numerador y su denominador, lo que equivale á multiplicarle por sí mismo.

266. *P.* Cómo se eleva al cuadrado una cantidad decimal?

R. Multiplicándola por sí misma, y teniendo cuidado de separar en la potencia para decimales un número de cifras duplo de las decimales que tenga la raiz.

267. *P.* Cómo se eleva al cuadrado un número complexo?

R. Multiplicándole por sí mismo, despues de reducido á quebrado de la especie superior ó á enteros y decimales, y hallando luego el valor del quebrado ó decimal segun la division superficial.

268. *P.* Qué debe saberse de memoria antes de aprender á extraer la raiz cuadrada?

R. Los cuadrados de los números dígitos que son los siguientes:

raices. .	1 —	2 —	3 —	4 —	5 —	6 —	7 —	8 —	9
cuadrados	1 —	4 —	9 —	16 —	25 —	36 —	49 —	64 —	81

269. *P.* Qué mas debe tenerse presente?

R. Lo primero, que el cuadrado de decenas debe hallarse en las centenas, el duplo de decenas por unidades ha de estar en las decenas, y el cuadrado de las unidades

ha de tener unidades. Lo segundo, que el cuadrado de un número dígito no puede pasar de dos cifras, el de un número de dos cifras no puede tener mas de cuatro, el de un número de tres cifras no pasará de seis, etc. Lo tercero, que no todos los números tienen raiz exacta; y lo cuarto, que el que no tenga raiz exacta en enteros, no la tendrá en enteros y quebrados.

270. *P.* Cómo se extrae la raiz cuadrada de un número entero?

R. Escrito el número debajo del signo radical, se tira á su derecha una raya como para dividir. Se separan las cifras de dos en dos de la derecha hácia la izquierda. Se ve cuál es el mayor cuadrado contenido en la primera division de la izquierda, se escribe debajo de dicha division y se resta, poniendo de una vez en el lugar correspondiente al divisor la raiz del cuadrado que se restó, la cual es la primera cifra de la raiz que buscamos. Hecho esto se bajan las dos cifras siguientes, y se separa la de la derecha con un punto. Las que quedan á la izquierda se dividen por el duplo de la raiz hallada (cuyo duplo se escribe sobre dicha raiz) y el cuociente es la segunda cifra de la raiz, que se escribe á la derecha de la primera y á la derecha del duplo. Se multiplica esta nueva cifra por toda la coleccion que está encima, y el producto se resta de *todas* las cifras bajadas. A la derecha del residuo se bajan otras dos cifras, se separa una y las restantes se vuelven á dividir por el duplo de la raiz hallada (que se escribe sobre el primer duplo), y el cuociente es la tercera cifra de la raiz que se escribe á la derecha de las otras halladas y á la derecha del duplo. Se multiplica la última cifra hallada por toda la coleccion superior, y se resta de todas las cifras bajadas. A la derecha del residuo se bajan otras dos cifras, y así hasta acabar.

271. *P.* Qué debe hacerse cuando un residuo, aun despues de bajadas las dos cifras siguientes y separada la última, no puede dividirse por el duplo de la raiz hallada?

R. Se pone cero á la raiz, se añade un cero al duplo, se bajan otras dos cifras, y se continúa la operacion.

272. *P.* Cómo se conoce si la cifra puesta en la raiz es mayor de lo que debe ser?

R. Cuando el producto de la cifra por el duplo de las anteriores y por sí misma no puede restarse de las cifras bajadas, lo que se enmendará poniendo una cifra menor en la raiz.

273. *P.* Y cómo se sabe si la cifra puesta en la raiz es menor de lo que debe ser?

R. Cuando despues de multiplicada por el duplo de la anterior y por sí misma, y restado el producto de las cifras bajadas, el residuo sea igual ó mayor que el duplo de la raíz hallada, mas la unidad.

274. *P.* Cómo se completa la raiz cuando no hay mas cifras que bajar?

R. A la derecha de las cifras enteras de la raiz se pondrá un quebrado, cuyo numerador sea igual al último residuo, y su denominador al duplo de la raiz hallada, mas la unidad.

275. *P.* Cómo se continúa por decimales una extraccion de raiz cuadrada?

R. Poniendo á la derecha de las cifras enteras una

coma, agregando dos ceros por cada decimal que se desee obtener, y procediendo en lo demás como si fueran enteros.

276. *P.* Cómo se extrae la raiz de un quebrado?

R. Extrayendo la raiz de su numerador y denominador.

277. *P.* Cómo se extrae la raiz de un número mixto?

R. Reduciéndole á la especie de su quebrado, y extrayendo luego la raiz del numerador y denominador del quebrado impropio que resulta.

278. *P.* Cómo se conseguirá que uno de los dos términos de un quebrado tenga raiz exacta?

R. Multiplicando previamente por dicho término á su numerador y denominador.

279. *P.* Cuál es la regla mas cómoda para hallar con suficiente aproximacion y en una expresion clara la raiz de un quebrado?

R. Se extrae la raiz de sus dos términos aproximándolos por decimales, se iguala el número de estas en uno y otro, y se suprimen las comas.

280. *P.* Cómo se extrae la raiz cuadrada de una fraccion propia decimal?

R. Lo primero es añadir un cero á la fraccion, si no tiene un número par de cifras decimales: despues se dividen de dos en dos desde el signo decimal á la derecha: se pone á la raiz un cero y el signo decimal, y se continúa la operacion como si fueran enteros.

281. *P.* Cómo se extrae la raiz cuadrada de un número que tenga enteros y decimales?

R. Las decimales se hacen pares, si no lo son, agregándoles un cero. Desde el signo decimal hácia la izquierda y hácia la derecha se dividen los enteros y las decimales de dos en dos. Se extrae la raiz de los enteros, teniendo cuidado de poner á la raiz el signo decimal cuando se hayan agotado estos. Se continúan bajando las otras secciones, y las cifras que van resultando á la raiz ya son decimales.

282. *P.* Cómo se extrae la raiz de los números denominados?

R. Reduciéndolos primero á quebrados de la especie mayor, ó á enteros y decimales, y procediendo despues segun las reglas dadas para esta clase de números, sin olvidar en la reduccion á quebrado de la especie mayor, que se trata de unidades superficiales; y en la valuacion del resultado, que se trata ya de unidades lineales.

Explicaciones y Ejemplos.

254.

El número 125 es potencia de 5 porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

255.

16 es la 2^a potencia de 4, porque $4 \times 4 = 16$.
27 es la 3^a potencia de 3, porque $3 \times 3 \times 3 = 27$.
32 es la 5^a potencia de 2, porque $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.
725 es la 4^a potencia de 5, porque $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 725$.

256.

4 es raiz de 16, 3 es raiz de 27,
2 es raiz de 32, y 5 es raiz de 725.

257.

4 es raiz 2^a de 16, 3 es raiz 3^a de 27.
2 es raiz 5^a de 32, y 5 es raiz 4^a de 725.

258.

4 es raiz cuadrada de 16, y 16 es cuadrado de 4.
3 es raiz cúbica de 27, y 27 es cubo de 3.

259.

Si el número 4 se ha de elevar á la 3^a potencia ó tomarle tres veces por factor, se dice que es 3 el exponente de la potencia.

—

Si del número 64 se quiere extraer la raiz cuadrada ó buscar el número que tomado dos veces por factor le produce, se dice que es 2 el exponente de la raiz.

260 y 261.

El primer caso de los anteriores se expresa así:

$$(4)^3 = 64$$

y se lee: 4 *elevado al cubo igual á* 64.

El caso segundo se indicará de este modo:

$$\sqrt[2]{64} = 8$$

y se lee: *ráiz cuadrada de 64 es igual á* 8.

Debe advertirse que cuando en el ángulo del radical no se escribe ningun número, se entiende que se habla de la raiz cuadrada.

262.

Como el exponente indica las veces que una raiz ha de entrar por factor en su potencia, claro es que

$$(8)^1 = 8 \text{ y } \sqrt[1]{8} = 8$$

263.

El cuadrado del número 32 se formará multiplicándole por sí mismo.

$$\left.\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1{,}024 \end{array}\right\} (32)^2 = 1{,}024$$

264.

El cuadrado del mismo número 32 se puede formar de este otro modo, habiéndole considerado descompuesto en 30 y 2, es decir en decenas y unidades.

cuadrado de decenas. . ó	$(30)^2 =$	900
duplo de dec. por unid. ó	$2 \times (30 \times 2) =$	120
cuadrado de unidad. . . ó	$(2)^2 =$	4
Luego.	$(32)^2 =$	1,024

265.

El quebrado $\frac{4}{5}$ se elevará á la 2ª potencia ó cuadrado elevando su numerador y denominador; es decir:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$$

266.

Si se pregunta cuántas varas cuadradas tendrá un solar que forma un cuadrado perfecto, y por cada lado tiene 10.06 varas, resolveré el problema del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 10{,}06 \\ \times\ 10{,}06 \\ \hline 6036 \\ 1006 \\ \hline 101{,}2036 \end{array}\right\} (10{,}06)^2 = 101{,}2036$$

Donde vemos que el número de decimales del cuadrado es duplo del de la raiz, y lo mismo sucederá siempre.

267.

Si se desea saber cuántas varas tendrá un terreno exactamente cuadrado teniendo por cada lado 12 brazas, 1 vara y 2 piés, ejecutaré la operacion de uno de los dos modos siguientes :

1° Reduciéndole á quebrado segun la division lineal

$$(12 \text{ br. } 1 \text{ v. } 2 \text{ p.})^2 = (\tfrac{77}{6} \text{ br.})^2 = \tfrac{5929}{36} \text{ br.}$$

Cuyo quebrado, reducido á enteros y valuados los residuos segun la division superficial, por la que una braza cuadrada tiene 4 varas, y una de estas 9 piés cuadrados, dará

$$\tfrac{5929}{36} \text{ br.} = 164 \text{ br. } 2 \text{ v. y } 7 \text{ piés cuadrados.}$$

2° Reduciéndole á decimal será

$$12 \text{ br.} - 1 \text{ v.} - 2 \text{ p.} = \tfrac{77}{6} \text{ br.} = 12{,}833 \text{ br.}$$

luego $(12 \text{ br. } 1 \text{ v. } 2 \text{ p.})^2 = (12{,}833 \text{ br.})^2 = 164{,}686$ b. cuya expresion valorada producirá igual resultado que la anterior.

268 y 269.

La menor decena que puede haber es 10, cuyo cuadrado es 100, número que no tiene decenas ni unidades: tampoco las tendrán los cuadrados de los números 20, 30, etc., que son decenas; luego el cuadrado de decenas se halla en las centenas.

En el duplo de decenas por unidades, hay un factor que acaba en cero (que son las decenas); luego este producto no tendrá unidades, mas llegará hasta las decenas.

El cuadrado de unidades siempre estará en las unida-

des; porque ningun cuadrado de unidades acaba en cero.

Véase esto muy claro en el cuadrado del número 43 descompuesto para el efecto en $40 + 3$.

cuad. de dec.	$(40)^2 =$	1600
duplo de dec. por un 2. . .	$(40 \times 3) =$	240
cuad. de unid.	$(3)^2 =$	9
Luego. . . .	$(43)^2 =$	1849

—

El mayor número dígito es 9, y su cuadrado 81 no pasa de dos cifras.

El mayor número de dos cifras es 99, y su cuadrado 9801 no pasa de cuatro cifras; y lo mismo se observaria en los demás.

—

Todos los números tienen potencias exactas, porque no hay dificultad en multiplicarlos por sí mismos; pero no se encuentran siempre números que multiplicados por sí mismos produzcan otros.

Por ejemplo, no hay número que elevado á cualquiera potencia produzca 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, etc., de que se sigue que estos números no tienen raiz exacta.

—

No teniendo un número raiz exacta en enteros, no la tendrá tampoco en enteros y quebrados; porque al multiplicar el quebrado de la raiz por sí mismo, jamás podrá roducir enteros.

270.

Sea el número 1849 del que se quiere extraer raiz cuadrada.

	$\sqrt{18.49}$	83 dup. de la 1ª mas la 2ª
cuadr. de la 1ª	16	43 raiz
	24.9	
duplo de 1ª por 2ª y cuadr. de 2ª	24 9	
	00 0	

He separado las cifras de dos en dos de la derecha hácia la izquierda, y he dicho: el mayor cuadrado contenido en 18 es 16 que escribí debajo, y su raiz 4 la puse por primera cifra de la raiz. He restado 16 de 18, y á la derecha del residuo 2 bajé la siguiente porcion y separé la última cifra. El duplo de la raiz hallada es 8 que escribo sobre el 4. Por este 8 divido la porcion separada 24. Les cabe á 3, que escribo á la derecha de la cifra 4 y á la derecha del duplo 8. Multiplico 3 por la coleccion 83: este producto le resto de todo lo bajado, y como no sobra nada, habré concluido la operacion, siendo 43 la raiz que se buscaba.

La razon de haber buscado el mayor cuadrado contenido en la primera division de la izquierda es la siguiente. Constando la potencia de cuatro cifras, la raiz constará de dos; es decir, que tendrá decenas y unidades; luego el cuadrado de las decenas debe hallarse en las centenas, y la raiz del mayor cuadrado contenido en ellas serán las decenas de la raiz.

Como la segunda parte de un cuadrado es el duplo de decenas por unidades y debe hallarse en las decenas, separo una cifra. Conociendo las decenas conozco su duplo, y dividiendo por este duplo aquella coleccion, es claro que darán las unidades. Si estas unidades las multiplico por el duplo de las decenas, y por ellas mismas, no hago mas que formar á la vez las dos partes últimas del cuadrado, es decir: el duplo de decenas por unidades y cuadrado de unidades. He restado y no sobra nada; pero si hubiera sobrado algo y hubiese mas cifras, bajaria la coleccion siguiente; y considerando las cifras halladas de la raiz como decenas respecto de la que sigue, haria con ellas lo mismo que ejecuté con la primera cifra, y así continuaria siempre fundado en los mismos principios.

271.

Se desea saber cuál será el lado ó costado de una sementera que tiene 42.025 varas cuadradas.

$\sqrt{4.20.25}$	405
4	205 raiz
02.02.5	
2 02 5	
0 00 0	

Cuando bajé la segunda seccion 20 y separé el cero, solo quedó un 2, que no pudiéndose dividir entre 4, duplo de la primera cifra, puse un cero á la derecha de aquella y á la derecha del 4: bajé la seccion 25, separé el 5, dividí la parte de la izquierda entre 40, y el cuociente 5 le puse á la derecha de las cifras halladas 20 y á la derecha del 40 : multipliqué 5 por 405, le resté de todo lo bajado, y no sobrando nada, digo que el costado de la sementera es de 205 varas.

272, 273 y 274.

El cuadrado de todo número se diferencia del cuadrado de otro que tenga una unidad menos, en dos veces el primero, mas la unidad, esto es :

$$(6)^2 = (5)^2 + 2 \times 5 + 1$$
$$(7)^2 = (6)^2 + 2 \times 6 + 1$$
$$(8)^2 = (7)^2 + 2 \times 7 + 1$$
etc., etc.

Esto es muy fácil de comprobar con otros números, y es la razon porque cuando sobra el duplo de lo hallado mas uno, debe corresponder una unidad mas á la raiz.

Cuando las partes del cuadrado que se forman no se pueden restar por ser mayores, claro está que se ha puesto de mas en la raiz, y esto no necesita demostrarse.

Como si sobrara una cantidad igual al duplo de la raiz hallada mas la unidad, corresponderia una unidad mas á la raiz, sobrando menos, le corresponderá la parte correspondiente, esto es, un quebrado cuyo numerador sea el residuo, y el denominador el duplo de la raiz hallada mas uno.

Lo harémos patente con un ejemplo :

Quiero saber cuál es el lado de una alberca que tiene 750 piés cuadrados de superficie.

```
√7.50 | 47
 4    | 27 + 21/55 raiz
----- |-----------
 35.0
 32 9
-----
 02 1 residuo.
```

Habiendo sobrado 21, le he puesto por numerador de un quebrado para completar la raiz, y por denominador el duplo de la raiz hallada 27 que es 54 mas 1, que son 55, y hallo que el lado es 27 ps. y $\frac{21}{55}$ de pié.

275.

Nos propondrémos aproximar por decimales la raiz hallada en el ejemplo que precede.

```
          5468
          543
√7.50 |   47
 4    |   27,38... etc., raiz.
----- |-----------
 35.0
 32 9
------
 02 10.0.... 1° res. agregando dos ceros
  1 62 9
  -------
    47 10.0.... 2° res. agregando dos ceros.
    43 74 4
    -------
    03 35 6 etc.
```

Al residuo 21 agregué dos ceros, puse la coma decimal á la derecha de la raiz entera 27 y hallé la cifra decimal 3 : al otro residuo 471 agregué dos ceros y hallé la cifra decimal 8, y así hubiera podido continuar; pero no habiendo querido aproximar mas que á las centésimas, hallo que el lado de la alberca es de 27 piés y 38 centésimos de pié.

276 á 279.

Sea el quebrado $\frac{49}{64}$ del que quiero extraer la raiz cuadrada, diré :

$$\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$$

Pero si el quebrado es como este $\frac{49}{50}$, diré :

$$\sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{50}} = \frac{7}{\sqrt{50}}$$

porque no teniendo 50 raiz cuadrada exacta, he preferido dejarla indicada.

—

Ultimamente, si ningun término tiene raiz exacta como $\frac{12}{15}$, tendria que dejar indicadas las raices de sus dos términos; pero queriendo que el numerador, por ejemplo, la tenga, multiplicaré por este sus dichos términos: así es que

$$\sqrt{\frac{12}{15}} = \sqrt{\frac{12 \times 12}{15 \times 12}} = \sqrt{\frac{144}{180}} = \frac{12}{\sqrt{180}}$$

Pero lo mejor es proceder de hecho á hallar las raices aproximadas con igual número de decimales y suprimir en seguida los signos, lo cual equivale á multiplicar los dos términos del quebrado por un mismo número. Sirvan de ejemplos los mismos quebrados anteriores.

$$\sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7{,}00}{7{,}07} = \frac{700}{707}$$

$$\sqrt{\frac{12}{15}} = \frac{3{,}46}{3{,}87} = \frac{346}{387}$$

280 y 281.

Habiéndose ya explicado la aproximacion de las raices por decimales, dos ejemplos parecen bastar al esclarecimiento de las reglas que comprenden estas preguntas.

1° — Quiero extraer raiz cuadrada de 0,071

```
√0,07.10 | 46
  4      | 0,26 raiz
 ----    
  31.0
  27 6
  ----
  03 4
```

agregué un cero á los 0,071, puse cero y signo decimal á la raiz, é hice mi operacion que hubiera podido aproximar con la agregacion de dos cifras á los residuos, por cada una que quisiera aumentar á la raiz.

2º — Quiero saber cuál es la raiz cuadrada de 321,842.

	2585
	349
$\sqrt{3.21,84.20}$	27
1	17,95
22.1	
18 9	
03 28.4	
3 14 1	
0 14 32.0	
12 92 5	
01 39 5	

He añadido un cero á las decimales para hacerlas pares : he dividido las cifras de dos en dos desde la coma á derecha é izquierda : he ejecutado la extraccion de la raiz de los enteros, y antes de bajar la primera seccion de decimales, puse el signo decimal á la derecha de las cifras halladas, habiendo continuado la operacion, que seria fácil aproximar.

282.

Bien entendido lo que va expuesto, nada hay mas fácil que extraer la raiz cuadrada de un número denominado.

Sea el número complexo 14 varas, 6 piés y 36 pulgadas de que se ha de extraer la raiz cuadrada. Lo ejecutarémos reduciéndole á quebrado, y teniendo presente que hablamos de medidas superficiales en las que la vara cuadrada tiene 9 piés y el pié 144 pulgadas. Esto supuesto será

$$\sqrt{14 \text{ vs. } 6 \text{ ps. } 36 \text{ pul.}} = \sqrt{\frac{19044}{1296}} \text{ v.} = \frac{138}{36} \text{ var.}$$

cuyo quebrado $\frac{138}{36}$ var. reducido á enteros, y valuados los residuos segun la division lineal, da por resultado 3 varas, 3 piés, 6 pulgadas, que es la raiz del número propuesto.

NOTA.

Téngase mucha atencion á las cantidades que se versan en estas operaciones; pues como se pasa, ya de las superficiales á las lineales y ya de estas á aquellas, deben emplearse con tino en la reduccion á quebrados y en la valuacion de estos las divisiones correspondientes, segun se explicaron en el tratado de los números denominados.

LECCION XXIII.

ELEVACION A LA TERCERA POTENCIA Y EXTRACCION DE LA RAIZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS, QUEBRADOS, MIXTOS, DECIMALES Y DENOMINADOS.

283. *P.* Cómo se eleva un número entero á su tercera potencia?

R. Formando un producto en que el dicho número entre tres veces por factor.

284. *P.* Puede formarse el cubo de otro modo?

R. Sí, señor, respecto á cualquier número que no sea dígito; pues considerándole descompuesto en decenas y