entre sí den un producto igual al cubo de una raiz, se podrán emplear las dimensiones que ellos expresen, para obtener el mismo resultado: así la misma capacidad tendrá un algibe que mida 9 varas de largo, 8 de ancho y 3 de profundidad, que otro que tenga 6 varas por cada una de las referidas dimensiones; porque en efecto

$$9 \times 8 \times 3 = 6 \times 6 \times 6 = 6^3.$$

LECCION XXIV.

DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES.

304. *P.* Qué se entiende por razon en las matemáticas?

R. Es la comparacion de dos cantidades.

305. *P.* En qué se dividen?

R. En aritméticas y geométricas.

306. *P.* Cuándo se llama la razon aritmética?

R. Cuando se atiende á la diferencia de las dos cantidades que se comparan.

307. *P.* Cuándo es la razon geométrica?

R. Cuando se atiende á las veces que la una cantidad contiene á la otra.

308. *P.* Cómo se llaman las cantidades que se comparan?

R. Términos de la razon; distinguiéndose con los nombres de primero y segundo, por el órden en que se escriben.

309. *P.* Qué otros nombres se les dan á los términos de la razon?

R. El primero se llama antecedente y el segundo consecuente.

310. *P.* Cómo se escriben las razones?

R. Colocando entre el antecedente y consecuente un punto si la razon es aritmética, y dos puntos si fuere geométrica, cuyos signos en uno ú otro caso se leen diciendo: *es á.*

311. *P.* Qué es exponente de una razon?

R. Es la diferencia ó cuociente que resulta de la comparacion de sus dos términos.

312. *P.* Cómo se halla el exponente de la razon aritmética?

R. Restando el consecuente del antecedente.

313. *R.* Y cómo se halla el exponente de la razon geométrica?

R. Dividiendo el antecedente entre el consecuente.

314. *P.* Cuándo se dice que dos razones son iguales?

R. Cuando tienen exponentes iguales.

315. *P.* Cuál de dos razones será mayor?

R. La que tenga mayor exponente.

316. *P.* Qué es razon de igualdad, de mayor y de menor desigualdad.

R. Se llama la razon de igualdad, cuando el antecedente es igual al consecuente: de mayor desigualdad, cuando el antecedente es mayor que el consecuente; y de menor desigualdad cuando el antecedente es menor que el consecuente.

317. *P.* Qué alteracion se puede hacer en una razon aritmética sin alterar el valor de su exponente?

R. Se puede añadir ó quitar á sus dos términos una misma cantidad.

318. *P.* Qué alteracion se puede hacer en una razon geométrica sin que varíe el valor de su exponente?

R. Se pueden multiplicar ó dividir sus dos términos por un mismo número.

319. *P.* A qué es igual la razon aritmética?

R. A un residuo cuyo minuendo es el antecedente y el sustraendo el consecuente.

320. *P.* A qué es igual toda razon geométrica?

R. A un quebrado cuyo numerador es el antecedente y su denominador el consecuente.

321. *P.* Cuándo se dice que una razon es inversa de otra?

R. Cuando resulta igual á ella mudando el lugar de sus términos.

322. *P.* Qué es proporcion?

R. La comparacion de dos razones iguales, y se llaman aritméticas ó geométricas, segun sean aritméticas ó geométricas las razones que se comparan.

323. *P.* De cuántos términos consta una proporcion?

R. De cuatro, que son: 1° el antecedente de la primera razon; 2° su consecuente; 3° el antecedente de la segunda razon, y 4° su consecuente.

324. *P.* Qué otros nombres toman los términos de una proporcion?

R. El 1° y el 4° se llaman tambien extremos; y el 2° y 3° se llaman medios.

325. *P.* Qué signo se usa para la proporcion?

R. Si las razones que se comparan son aritméticas, se colocan entre ellas dos puntos : y si son geométricas, cuatro puntos :: y en uno y otro caso se pronuncian, *como*.

326. *P.* Qué es proporcion discreta?

R. Aquella que tiene los medios desiguales.

327. *P.* Y qué es proporcion continua?

R. Aquella en que los medios son iguales, ó lo que es lo mismo, cuando el consecuente de la primera razon sirve de antecedente á la segunda.

328. *P.* Cómo se escriben las proporciones continuas?

R. Con solo tres términos que se llaman extremos y medio; y para indicar que este se considera repetido, se antepone á la proporcion continua este signo $\div$ si es aritmética, ó este otro $\div\!\!\div$ si es geométrica.

329. *P.* Qué propiedad se observa en la proporcion aritmética discreta?

R. Que la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

330. *P.* Y en la proporcion aritmética continua?

R. Que la suma de los extremos es igual al duplo del término medio.

331. *P.* Qué propiedad se observa en la proporcion geométrica discreta?

R. Que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

332. *P.* Y en la proporcion geométrica continua?

R. Que el producto de los extremos es igual al cuadrado del término medio.

333. *P.* Cómo se halla un término de una proporcion aritmética discreta cuando se conocen los otros tres?

R. Si lo que se busca es medio, se suman los extremos y se resta de la suma el medio conocido; pero si lo que se busca es extremo, se suman los medios y de la suma se resta el otro extremo.

334. *P.* Cómo se halla un término de la proporcion aritmética continua cuando se conocen los otros dos?

R. Si lo que se busca es medio, se suman los extremos, y de la suma se saca la mitad; y si es extremo, se duplica el término medio, y de este duplo se resta el extremo conocido.

335. *P.* Cómo se halla un término de la proporcion geométrica discreta conociendo los otros tres?

R. Si es medio, se multiplican entre sí los extremos, y el producto se divide entre el medio conocido; pero si es extremo, se multiplican los medios y el producto se divide entre el otro extremo.

336. *P.* Cómo se halla un medio de la proporcion geométrica continua conocidos los otros dos?

R. Si es medio, se multiplican entre sí los extremos, y del producto se extrae la raiz cuadrada; pero si lo que se busca es extremo, se cuadra el término medio, y este cuadrado se divide por el extremo conocido.

337. *P.* Cómo se expresa el término que se busca?

R. Por medio de una X que se escribe en el lugar que corresponda á dicho número.

338. *P.* Qué quiere decir alternar, invertir y permutar los términos de una proporcion?

R. Alternar es cambiar de lugar los medios: invertir mudar de lugar los términos en cada razon, y permutar es mudar de lugar las razones.

339. *P.* De cuántos modos se pueden escribir los términos de una proporcion, ya sea aritmética ó geométrica, sin que deje de ser la suma ó el producto de los medios igual á la suma ó el producto de los extremos?

R. Alternando, invirtiendo y permutando se pueden dar ocho formas diferentes á una proporcion, sin que dejen de subsistir dichas condiciones.

340. *P.* Para qué se alternan, invierten y permutan los términos de una proporcion?

R. Para hacer pasar el término desconocido al cuarto lugar, si no lo está.

341. *P.* Qué otras trasformaciones admite la proporcion geométrica discreta?

R. Varias; pero la mas interesante es la de poderse multiplicar ó dividir por un mismo número un extremo y cualquiera de los medios, sin que por esto deje de subsistir la proporcion.

Explicaciones y Ejemplos.

304 á 310.

Si el número 42 se desea comparar aritméticamente con el número 37 se escriben asi:

42.37, lo cual se lee diciendo, 42 es á 37. En cuyo ejemplo 42 es el primer término ó antecedente y 37 el segundo término ó consecuente.

—

Si el número 36 se quiere comparar con el número 18 geométricamente, se escribirá de este modo:

36 : 18, lo cual se lee diciendo, 36 es á 18. Donde el 36 es primer término ó antecedente y 18 es el segundo término ó consecuente.

311 á 313.

Supuesto que el exponente de la razon aritmética se halla restando el consecuente del antecedente, es necesario advertir que cuando el consecuente es mayor, se resta al contrario y se antepone al exponente el signo *menos*, para indicar que no solo no es mayor el antecedente, sino que le falta aquella cantidad para igualar al consecuente.

Lo harémos patente presentado varias razones con sus exponentes.

3.2 su exponente es 1
3.3 su exponente es 0
3.4 su exponente es — 1

El primero de los exponentes se halló restando 2 de 3 y quedó 1. El segundo restando 3 de 3 y quedó 0. El tercero no pudiéndose restar segun la regla, lo hice á la inversa y le antepuse el signo menos, resultando — 1, que se lee *menos uno*.

Estos exponentes se llaman negativos, nombre que se aplica en general á las cantidades afectadas del signo menos, cuyo conocimiento pertenece al álgebra.

—

En cuanto á los exponentes de las razones geométricas, solo hay que advertir que, cuando el antecedente no es exactamente divisible entre el consecuente se expresa el exponente por medio de un quebrado que, como sabemos, no es mas que una division indicada.

Sirvan de ejemplo las siguientes razones:

12 : 4 su exponente es 3
15 : 4 su exponente es $\frac{15}{4}$
4 : 6 su exponente es $\frac{4}{6}$
6 : 6 su exponente es 1

En la primera y última de estas razones ha sido exactamente divisible el antecedente entre el consecuente resultando los exponentes enteros; mas en la segunda y tercera, no siendo exactamente divisibles los antecedentes entre los consecuentes, han resultado dos quebrados, aunque el uno es impropio y el otro es propio.

314.

Para esclarecer la materia de esta pregunta propondrémos los siguientes ejemplos:

$$6 \,.\, 4 = 7 \,.\, 5 \quad | \quad 8 \,.\, 11 = 9 \,.\, 12$$

Las primeras de estas razones aritméticas son iguales, porque tienen el mismo exponente que es 2, y las segundas tambien lo son, porque tienen por exponente á — 3.

$$28 : 4 = 42 : 6 \quad | \quad 3 : 9 = 7 : 21$$

Las primeras de estas razones geométricas son iguales, porque tienen el mismo exponente que es 7. Respecto á las segundas el exponente de la una es 3 novenos y el de la otra 7 veinte y un avos, cuyos quebrados son iguales, como se puede ver reduciéndolos á un comun denominador, y por tanto se dice que las razones son iguales.

315.

La razon aritmética 6 . 2 es mayor que la razon 4 . 3, porque el exponente de la primera es 4 y el de la segunda es 1.

La razon geométrica 12 : 3 es mayor que la razon 6 : 3, porque el exponente de la primera es 4 y el de la segunda es 2.

316.

La razon 8 : 4 es de mayor desigualdad,
la razon 6 : 6 es de igualdad, y
la razon 4 : 7 es de menor desigualdad.

317.

Las razones aritméticas 6 . 5 y 3 . 2 subsistirán aun cuando se les agregue ó quite un mismo número á sus términos : así

$$6 \,.\, 5 = 6 + 2 \,.\, 5 + 2 = 6 - 2 \,.\, 5 - 2$$
$$3 \,.\, 2 = 3 + 1 \,.\, 2 + 1 = 3 - 1 \,.\, 2 - 1$$

318.

Las razones geométricas 6 : 3 y 8 : 12 subsistirán sin mudar de valor aun cuando se multipliquen ó dividan sus términos por un mismo número, de este modo :

$$6 : \; 3 = 6 \times 2 : \; 3 \times 3 \quad | \quad \tfrac{6}{2} : \tfrac{3}{2}$$
$$8 : 12 = 8 \times 5 : 12 \times 5 = \tfrac{8}{5} : \tfrac{12}{5}$$

319 y 320.

La razon aritmética 5 . 2 equivale al residuo 5 — 2, y la razon geométrica 8 : 4 equivale al cuociente de 8 partido entre 4, de este modo :

$$5 \,.\, 2 = 5 - 2 \qquad\qquad 8 : 4 = \tfrac{8}{4}$$

321.

La razon 4 : 6 es inversa de la razon 6 : 4, porque si se cambian los términos de la una resulta igual á la otra.

322 á 325.

Con las razones aritméticas 7 . 4 y 5 . 2, cuyos exponentes son iguales, se puede formar una proporcion aritmética de este modo:

7 . 4 : 5 . 2

donde los números 4 y 5 se llaman medios y los números 7 y 2 extremos.

—

Con las razones geométricas 12 : 3 y 4 : 1, cuyos exponentes son iguales, se puede formar proporcion así:

12 : 3 :: 4 : 1

se leerá diciendo: 12 es á 3 como 4 es á 1, y los números 12 y 1 serán los extremos y 3 y 4 los medios de esta proporcion. Lo mismo se leen las aritméticas.

326 á 328.

Esta proporcion 6 . 4 : 5 . 3 se llama discreta, porque los medios son desiguales.

Esta otra 9 . 7 : 7 . 5 es continua, porque los medios son iguales.

La proporcion 8 : 4 :: 6 : 3 es discreta, y la proporcion 8 : 4 :: 4 : 2 es continua.

Las dos proporciones continuas se escribirán así:

÷ 9 . 7 . 5 | ∺ 8 : 4 : 2

y se leen: 9 es á 7 como el mismo 7 es á 5, y 8 es á 4 como el mismo 4 es á 2.

En la proporcion aritmética se dice que 7 es el medio proporcional aritmético y 9 y 5 los extremos, y en la geométrica se dice que 4 es el medio proporcional geométrico y 8 y 2 son los extremos.

329 y 330.

En la proporcion aritmética discreta 3 . 5 : 2 . 4 se verificará que $3 + 4 = 5 + 2$.

En la proporcion continua aritmética ÷ 5 . 4 . 3 se verificará que $5 + 3 = 2 \times 4$.

331 y 332.

En la proporcion geométrica discreta 8 : 12 :: 2 : 3 se tendrá que $8 \times 3 = 12 \times 2$.

En la proporcion continua geométrica ∺ 9 : 3 : 1 tendrémos que $9 \times 1 = (3)^2$.

Estas propiedades son generales, y siempre que ellas subsistan, los números con que se verifican estarán en proporcion.

Así, si $3 + 4 = 5 + 2$ y $8 \times 3 = 2 \times 12$, podré escribir dichos números en forma de proporcion, con tal que los que están á un lado del signo igual sirvan de medios, y los que están al otro lado de extremos.

333 y 334.

Para poner en práctica las reglas que en estas preguntas se establecen, bastará presentar el termino desconocido en todos los lugares que puede hallarse, y á continuacion el modo de averiguar su valor en cada clase de proporcion. Principiarémos por las aritméticas discretas.

$$6 . 5 : 4 . X \ldots\ldots X = 4 + 5 - 6 = 3$$
$$6 . 5 : X . 3 \ldots\ldots X = 6 + 3 - 5 = 4$$
$$6 . X : 4 . 3 \ldots\ldots X = 6 + 3 - 4 = 5$$
$$X . 5 : 4 . 3 \ldots\ldots X = 5 + 4 - 3 = 6$$

—

Presentarémos ahora los casos que pueden ocurrir en la proporcion aritmética continua y sus resoluciones.

$$\div 11 . 8 . X \ldots\ldots X = (2 \times 8) - 11 = 5$$
$$\div 11 . X . 5 \ldots\ldots X = \frac{11+5}{2} = 8$$
$$\div X . 8 . 5 \ldots\ldots X = (2 \times 8) - 5 = 11$$

En la primera y última he duplicado el término medio y restado el extremo conocido, y en la segunda he sumado los extremos y sacado la mitad.

335 y 336.

Para ejercitarnos en el modo de hallar un término

cualquiera en la proporcion geométrica, empezarémos por las discretas siguientes:

$$8 : 4 :: 6 : X \ldots\ldots X = \frac{4 \times 6}{8} = 3$$
$$8 : 4 :: X : 3 \ldots\ldots X = \frac{8 \times 3}{4} = 6$$
$$8 : X :: 6 : 3 \ldots\ldots X = \frac{8 \times 3}{6} = 4$$
$$X : 4 :: 6 : 3 \ldots\ldots X = \frac{4 \times 6}{3} = 8$$

—

Presentarémos ahora los tres casos que pueden ocurrir en la proporcion geométrica continua.

$$\div\!\!\div\; 8 : 4 : X. \ldots\ldots X = \frac{(4)^2}{8} = 2$$
$$\div\!\!\div\; 8 : X : 2. \ldots\ldots X = \sqrt{8 \times 2} = 4$$
$$\div\!\!\div\; X : 4 : 2. \ldots\ldots X = \frac{(4)^2}{2} = 8$$

En la primera y última he cuadrado el término medio y dividido por el extremo conocido, y en la segunda he multiplicado los extremos y extraido la raiz cuadrada.

337 á 340.

A la proporcion 6 : 3 :: 8 : 4 se le podrán dar las ocho formas siguientes:

1ª Proporcion primitiva. . 6 : 3 :: 8 : 4
2ª Alternando la primera. 6 : 8 :: 3 : 4
3ª Invirtiendo la primera. . 3 : 6 :: 4 : 8

4ª Alternando la tercera. .	3 : 4 :: 6 : 8
5ª Permutando la primera.	8 : 4 :: 6 : 3
6ª Alternando la quinta. .	8 : 6 :: 4 : 3
7ª Invirtiendo la quinta. .	4 : 8 :: 3 : 6
8ª Alternando la séptima.	4 : 3 :: 8 : 6

—

Esto supuesto, si tuviésemos la proporcion $x : 9 :: 2 : 6$, para hacer pasar la x al cuarto término, haríamos las trasformaciones siguientes :

Proporcion primitiva. . . .	$x : 9 :: 2 : 6$
Permutando.	$2 : 6 :: x : 9$
Invirtiendo	$6 : 2 :: 9 : x$

Y por el mismo estilo se procederá en todos los casos semejantes.

341.

Como en la proporcion geométrica se puede hacer pasar el término desconocido al cuarto lugar, su valor depende entonces del producto de los medios partido por el extremo conocido; de modo que los medios entran como factores del numerador, y el extremo como denominador del quebrado que expresa el valor del cuarto término. Esta es la razon que hay para poder multiplicar ó partir un extremo y un medio por un mismo número, sin que se altere el valor del otro extremo.

La ventaja que de esta propiedad resulta es la simplificacion de las proporciones; pongamos un ejemplo:

Proporcion primitiva. . . .	$60 : 48 :: 20 : x$
Dividiendo por 10 el 1º y 3er términos.	$6 : 48 :: 2 : x$
Dividiendo por 6 al 1º y 2º	$1 : 8 :: 2 : x$

expresion muy sencilla, donde sin necesidad de cálculo se conoce el valor de x.

—

Tambien se evitan los quebrados de este modo :

Proporcion primitiva. . . .	$5 : 8\frac{1}{2} :: 9 : x$
Reduciendo á medios el 1º y 2º términos.	$\frac{10}{2} : \frac{17}{2} :: 9 : x$
Suprimiendo los denominadores, que equivale á multiplicar por 2 el 1º y 2º términos.	$10 : 17 :: 9 : x$

—

Las decimales pueden evitarse haciendo que el extremo y el medio que se quiera tengan un número igual y suprimiendo los signos :

Proporcion primitiva. . . .	$8{,}5 : 7 :: 3{,}25 : x$
Igualadas las decimales del 1º y 3er términos. . . .	$8{,}50 : 7 :: 3{,}25 : x$
Suprimidos los signos. . .	$850 : 7 :: 325 : x$
Dividiendo entre 5 al 1º y 2º	$170 : 7 :: 65 : x$
Dividiéndolos otra vez por 5.	$34 : 7 :: 13 : x$

NOTA.

Aunque lo expuesto es suficiente para la simplificacion de las operaciones que pueden ofrecerse en los cálculos, es necesario que los alumnos se ejerciten en los infinitos casos á que son aplicables estas reglas, cuyo uso es de la mayor utilidad.

LECCION XXV.

DE LA REGLA DE TRES SIMPLE Y COMPUESTA.

342. *P.* Qué es regla de tres ó de proporcion?

R. Es la que enseña á hallar un número por las relaciones de proporcion que tiene con otros conocidos.

343. *P.* En qué se dividen las reglas de tres?

R. En simples y compuestas.

344. *P.* Qué es regla de tres simple?

R. Es aquella en que el resultado depende solo de tres cantidades conocidas.

345. *P.* Y compuesta?

R. Se llama así cuando el resultado depende de mas de tres datos proporcionales.

346. *P.* Cómo se llaman las cantidades que entran en una cuestion de regla de tres simple?

R. En semejantes cuestiones se dan conocidas dos cantidades de una misma especie, y otra de la especie de la

que se busca, y para distinguirlas, llamamos á las primeras *causas* ó *datos*, y á la cantidad de la misma especie de la que se busca y á esta última, las llamamos *efectos* ó *resultados*. Tambien se distingue con el nombre de *primer dato* el que produjo el resultado conocido, y *segundo dato* el correspondiente al resultado que se busca.

347. *P.* Qué otra division admiten las reglas de tres?

R. Tambien pueden ser directas ó inversas.

348. *P.* Cuándo se llama la regla de tres directa?

R. Cuando aumentando ó disminuyendo los datos, aumentan ó disminuyen igualmente los resultados.

349. *P.* Cuándo se llama la regla de tres inversa?

R. Cuando aumentando los datos disminuyen los resultados, ó cuando disminuyendo los datos aumentan los resultados : es decir, cuando á los efectos les sucede lo contrario que á las causas.

350. *P.* Cómo se plantea una regla de tres simple directa?

R. Diciendo : el primer dato es á su resultado, como el segundo dato es al resultado que se busca.

351. *P.* Cómo se plantea cuando es inversa?

R. Diciendo : el segundo dato es al primer resultado, como el primer dato es al resultado que se busca.

352. *P.* Cómo se resuelven las reglas de tres simples despues de planteadas?

R. Multiplicando el segundo término por el tercero, y partiendo el producto entre el primero.

353. *P.* Cómo se llaman las cantidades que entran en una regla de tres compuesta?

R. Se llaman cantidades del primer miembro á los da-