ENCICLOPEDIA POPULAR

MANUAL
DE
M[illegible]ANICA
INDUSTRIAL


ITER PARA TVTVM

MANUAL

DE

MECANICA INDUSTRIAL

Rosa y Bouret

POISSY. — IMPRENTA DE ARBIEU.

ENCICLOPEDIA HISPANO-AMERICANA.

MANUAL
DE
MECANICA INDUSTRIAL
CON
APLICACION A VARIAS MAQUINAS
POR

DON EDUARDO VELEZ DE PAREDES
Miembro de la Comision de Examen de instruccion primaria.

Con 75 láminas en el texto.

PARIS
LIBRERIA DE ROSA Y BOURET
—
1860

PROLOGO.

Poco novisimo puede decirse acerca de la ciencia de que trata este Manual. Distinguidos físicos han expuesto con la mayor lucidez los principios y leyes generales y particulares que la rigen; otros, de igual nombradía, los han desarrollado y aplicado á las máquinas conocidas hasta el dia; algunos han estudiado el movimiento con independencia de las causas que lo producen y dado la importancia merecida á la práctica de tan interesantes cuestiones. Muy pocos, es verdad, han comprendido en sus obras las abstracciones de la mecánica racional; empero, casi todos han considerado el trabajo de las fuerzas, su aplicacion y valor, la composicion y descomposicion de los movimientos y de las fuerzas, las condiciones de su equilibrio y definido con precision y brillantez los centros de gravedad. Todo, pues, se halla agotado; así, fácil será el concebir que no podremos ser originales. El título mismo de MANUAL que damos á nuestro libro, excluye tamaña pretension, é incurriríamos en un delirio inconcebible, imperdonable, si tuviéramos el atrevimiento de suponerla, y vindicarla. Gracias á Dios, no pagamos tributo á tan gran debilidad; por el contrario, miramos con lástima á los escritores víctimas de este orgullo vanidoso que rebaja y desluce siempre aun á los hombres de mérito real.

Nosotros, pues, nos hemos limitado á reunir, en reducido tomo, lo mejor y mas útil que hemos encontrado en las obras, así antiguas como modernas, que hemos hojeado con este objeto. Casi todas nos han prestado su apoyo y una parte mas ó menos grande de sus respectivos tesoros. Los cursos y asignaciones explicadas por el distinguido catedrático Mr. J. Bertrand en el *Liceo Napoleon* y en la *Escuela politécnica* de Paris, nos han suministrado numerosos problemas perfectamente resueltos, en términos de no habernos dado mas tarea que la de su oportuna distribucion y version

al idioma castellano. *Los elementos de Estática* de Mr. Poinson, tan notables por las formas y elegancia de estilo, como por el fondo y claridad de sus demostraciones, nos han servido ventajosamente en todo lo relativo al equilibrio, composicion y descomposicion de los movimientos y de las fuerzas, y á los centros de gravedad de los cuerpos sólidos. Tambien hemos examinado el *Año científico é industrial, ó exposicion anual de los trabajos científicos é inventos y de las principales aplicaciones de la ciencia á la industria y á las artes*. En suma, hasta el célebre F. D. Antonio de Guevara, en cuya *Física general y particular* estudiamos nuestras primeras nociones físicas, nos ha pagado su contingente.

A pesar de lo expuesto, no somos servil copista. Nos hemos desviado, aunque muy pocas veces, de ciertos principios y aplicaciones defectuosos, y, en su virtud, condenados por la experiencia y adelantos de la *Mecánica*, hemos rectificado alguna definicion, imaginado el método de este tratado con arreglo al programa del nuevo plan de estudios francés, y reducídolo todo á los estrechos límites de un MANUAL; pero este, tan completo que podrá servir á los peritos en la ciencia para desvanecer sus dudas en los muchos casos que se presentan cada dia, y á los alumnos y aficionados de maestro y guia en sus estudios.

Hubiéramos deseado disponer de suficiente tiempo para haber redactado una obra de mas aliento y meditacion; mas las apremiantes ocupaciones que necesitan toda nuestra atencion, se han opuesto á la realizacion de este deseo. Sin embargo, esperamos que esta aglomeracion de diversos trabajos cesará un dia, y nos permitirá de continuar la obra que tenemos meditada sobre el mismo asunto.

EL AUTOR.

MANUAL

DE

MECANICA INDUSTRIAL

INTRODUCCION

1. DEFINICION Y OBJETO DE LA MECANICA. — La mecánica, rigurosamente hablando, es la ciencia de las máquinas.

Mas, como esta parte, tan esencial y necesaria á la industria, recibe cada dia nuevos perfeccionamientos, se comprende, bajo esta denominacion, el estudio de las leyes y causas de los movimientos de los cuerpos, las que producen el *equilibrio*, y, por fin, la aplicacion de estos principios generales á las máquinas conocidas hasta hoy.

En su consecuencia, trataremos en el presente MANUAL de los principios y aplicacion mas elementales de este maravilloso ramo de los conocimientos humanos.

2. DEFINICION DEL MOVIMIENTO EN GENERAL. — Movimiento es la traslacion de un cuerpo de uno

vanecer sus dudas en los muchos casos que se presentan cada dia, y á los alumnos y aficionados de maestro y guia en sus estudios.

Hubiéramos deseado disponer de suficiente tiempo para haber redactado una obra de mas aliento y meditacion; mas las apremiantes ocupaciones que necesitan toda nuestra atencion, se han opuesto á la realizacion de este deseo. Sin embargo, esperamos que esta aglomeracion de diversos trabajos cesará un dia, y nos permitirá de continuar la obra que tenemos meditada sobre el mismo asunto.

El autor.

MANUAL
DE
MECANICA INDUSTRIAL

INTRODUCCION

1. Definicion y objeto de la mecanica. — La mecánica, rigurosamente hablando, es la ciencia de las máquinas.

Mas, como esta parte, tan esencial y necesaria á la industria, recibe cada dia nuevos perfeccionamientos, se comprende, bajo esta denominacion, el estudio de las leyes y causas de los movimientos de los cuerpos, las que producen el *equilibrio*, y, por fin, la aplicacion de estos principios generales á las máquinas conocidas hasta hoy.

En su consecuencia, trataremos en el presente Manual de los principios y aplicacion mas elementales de este maravilloso ramo de los conocimientos humanos.

2. Definicion del movimiento en general. — Movimiento es la traslacion de un cuerpo de uno

á otro lugar. Así es que un cuerpo se halla en movimiento cuando recorre sucesivamente muchos puntos y ocupa muchas posiciones en el espacio. Conservando la misma posicion, entonces se halla en quietud.

De esta definicion se deduce, que cuando un hombre pasea, un caballo galopa, una locomotiva recorre su via, y un buque navega, podemos decir que estos cuerpos están en movimiento. Este es mas ó menos rápido; así es que no es posible fijar el cambio de posicion si no lo comparamos con los puntos y objetos inmediatos que nos sirven de señal ó de punto de partida.

3. Movimiento relativo. — Si estas señales ó puntos se mueven igualmente, en este caso el movimiento será relativo; y por cierto, propiamente hablando, puede decirse que todos los movimientos son relativos, visto que el globo que habitamos, además de su órbita al rededor del sol, tiene el doble movimiento de rotacion sobre su propio eje con que forma los dias y las noches. El sol, á su vez, vuela, por decirlo así, en el espacio arrastrando en pos suyo la tierra y su séquito planetario.

4. Movimiento absoluto. — Es aquel que se produce cuando suponemos que las señales ó puntos que nos sirven para apreciar el movimiento de los cuerpos, se hallan absolutamente en reposo.

Así, como nos concretamos al estudio de los elementos y fenómenos mecánicos que observamos sobre la tierra, llamaremos en adelante *absolutos* todos los movimientos de los cuerpos, pues haremos la mas completa abstraccion del movimiento de la tierra.

5. Espacio, tiempo. — *Espacio*, aquí, es la línea recorrida por un cuerpo puesto en movimiento; y *Tiempo*, el empleado para recorrerlo.

Por consiguiente, para apreciar un movimiento cualquiera es absolutamente necesario saber medir el espacio recorrido y el tiempo gastado en la marcha.

6. Trayectoria. — Cuando se habla del movimiento de un cuerpo se hace abstraccion de sus dimensiones para fijarse y ocuparse de un *punto material*, sobre el cual se supone condensadas todas las moléculas que lo componen. En seguida, imaginando las posiciones que este *punto material* ó cuerpo ha ocupado sucesivamente, veremos una línea *contínua*, porque el cuerpo no irá de una parte á otra sin pasar por todas las posiciones intermediarias. Esta línea, pues, ó espacio recorrido se llama *trayectoria*. La forma de la trayectoria da su nombre al movimiento; de manera, que si aquella es recta, este será rectilíneo, y si curva, *curvilíneo*.

Los movimientos curvilíneos se diferencian entre sí por la naturaleza de la línea curva que describen los cuerpos; es *circular*, cuando la trayectoria es una circunferencia de círculo, y *parabólica*, cuando es una parábola.

Luego que se conocen las ecuaciones de la trayectoria, esta se halla completamente determinada; mas debe observarse que dichas ecuaciones deben referirse á tres planos coordinados. Las coordinadas á un punto dado de la curva, son longitudes evaluadas á metros, y expresadas con signos convencionales, segun lo enseña la geometría analítica.

De aquí se infiere que para poder conocer cual se requiere el movimiento de los cuerpos, es absolutamente indispensable examinarlo con relacion al tiempo que consumen para recorrer las diversas partes de la trayectoria, pues no basta, como puede colegirse, el observar solamente la especie de líneas recorrido por los mismos.

7. Del tiempo y de su medida. — El tiempo, que no puede definirse, se mide por los fenómenos astronómicos que marcan los intérvalos sucesivos y perfectamente iguales, ó por medio de un reloj, con cuyo auxilio es fácil dividir el tiempo que llamamos *día* en una multitud de partes ó intérvalos iguales, designados por horas, minutos y segundos. El dia, como nadie debe ignorarlo, ha sido subdividido en 24 horas, la hora en 60 minutos, y el minuto en 60 segundos. Por lo tanto, el dia

tiene 1,440 minutos, ó 86,400 segundos. La hora cuenta 3,600 segundos.

Por consecuencia, se dice que *dos intérvalos de tiempo son iguales, cuando dos cuerpos idénticos, colocados en las mismas circunstancias, recorren dos espacios idénticos.*

8. Unidad de tiempo, instante inicial.— En los cálculos matemáticos, el segundo es la *unidad del tiempo*. Segun esto, el tiempo puede definirse, el número de los segundos contados desde el instante, llamado inicial, hasta el que denominaremos *final* del movimiento. Esta suma de segundos llevará consigo los signos + ó —, segun que el tiempo en cuestion ha seguido ó precedido el instante inicial.

9. Determinacion del movimiento de un punto. El movimiento de un punto material queda determinado completamente tan luego como se conoce su trayectoria, y cuál es su posicion sobre la curva en un instante dado.

Cuando las ecuaciones de esta curva son conocidas, basta para obtener este resultado contener una relacion entre el espacio recorrido desde el punto dado y el tiempo consumido en recorrerlo. Si las ecuaciones de la curva no son dadas *á priori*, será necesario conocer las tres ecuaciones que, á cada instante, enlazan al tiempo t las coordinadas x, y, z del punto movible. De este modo se obtiene exactamente las posiciones del cuerpo en el espacio por los diversos valores dados á t.

Finalmente, para hacer esta operacion debe procederse desde luego, como queda indicado, observando el espacio que recorre el punto material, ó el cuerpo durante su trayectoria en un segundo, en seguida el que recorre en el segundo inmediato, incesantemente en el tercer segundo, y así sucesivamente hasta el fin de movimiento.

PRIMERA PARTE

DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO CONSIDERADO INDEPENDIENTEMENTE DE SUS CAUSAS, SEGUN LAS REGLAS GEOMÉTRICAS.

CAPITULO PRIMERO

Del movimiento uniforme y de sus propiedades.

10. Movimiento uniforme, velocidad. — Uniformidad, es la igualdad y semejanza de una cosa consigo misma ó con otra; de aquí resulta que el movimiento de un punto material sobre una recta ó curva se dice *uniforme*, cuando este punto recorre *espacios iguales en tiempos iguales*, cualesquiera que sean los intérvalos de tiempo y espacios comparados.

Por consecuencia, los espacios recorridos son proporcionales á los tiempos empleados para recorrerlos.

Por lo tanto debe uno fijar la atencion á la condicion de que los espacios recorridos durante es-el espacio por los diversos valores dados á t.

Finalmente, para hacer esta operacion debe procederse desde luego, como queda indicado, observando el espacio que recorre el punto material, ó el cuerpo durante su trayectoria en un segundo, en seguida el que recorre en el segundo inmediato, incesantemente en el tercer segundo, y así sucesivamente hasta el fin de movimiento.

PRIMERA PARTE

DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO CONSIDERADO INDEPENDIENTEMENTE DE SUS CAUSAS, SEGUN LAS REGLAS GEOMÉTRICAS.

CAPITULO PRIMERO

Del movimiento uniforme y de sus propiedades.

10. Movimiento uniforme, velocidad. — Uniformidad, es la igualdad y semejanza de una cosa consigo misma ó con otra; de aquí resulta que el movimiento de un punto material sobre una recta ó curva se dice *uniforme*, cuando este punto recorre *espacios iguales en tiempos iguales*, cualesquiera que sean los intérvalos de tiempo y espacios comparados.

Por consecuencia, los espacios recorridos son proporcionales á los tiempos empleados para recorrerlos.

Por lo tanto debe uno fijar la atencion á la condicion de que los espacios recorridos durante espacios de tiempo iguales sucesivos sean iguales entre sí, *cualesquiera que sean*, los intérvalos de tiempo; de manera que si se notaba que los espacios recorridos, durante segundos sucesivos, son iguales entre sí, pero que en la primera mitad del segundo habia marchado mas que en la segunda mitad, entonces el movimiento no es uniforme. Así, la manecilla de un reloj que señala los segundos recorre divisiones iguales en segundos sucesivos; pero despues de haber recorrido rápidamente una de las divisiones de la esfera, se para un instante, en seguida recorre la segunda division, se vuelve á parar y así sucesivamente, de suerte que el movimiento no es uniforme.

11. Velocidad. — La velocidad del movimiento uniforme es *el espacio constante recorrido por el móvil durante cada unidad de tiempo*. Por consiguiente, la velocidad es tanto mas grande cuanto mayor es la unidad de tiempo, y el número que la mide es tanto mayor cuanto menor es la unidad de la longitud.

12. Ecuacion del movimiento. — El movimiento uniforme de un punto sobre una línea indefinida XY puede representarse por una ecuacion de primer grado entre el espacio y el tiempo. Supongamos O el orígen de los espacios y M_0 M las posiciones del móvil en el instante inicial y en la epoca t; supongamos $OM_0 = e_0$ y $OM = e$, y designemos por último con v la velocidad del movimiento, y se verá inmediatamente que el espacio

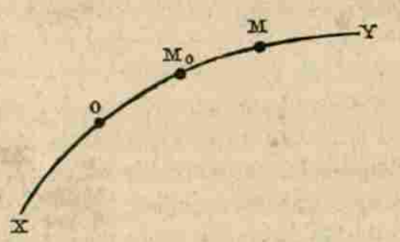

Fig. 1.

$e - e_0$ ha sido recorrido ó se recorre en el tiempo t. Así, conforme la definicion dada tendremos

$$\frac{e-e_0}{v} = \frac{t}{1}, \text{ por lo tanto } e - e_0 = vt,\ e = e_0 + vt.$$

He ahí la ecuacion del movimiento uniforme, la cual nos facilitará á cada instante dado la posicion del móvil en su trayectoria.

13. Propiedades del movimiento uniforme. — La precedente ecuacion demuestra inmediatamente que en toda especie de movimiento uniforme, el espacio recorrido durante un tiempo t con una velocidad v, se obtiene multiplicando la velocidad por el tiempo, la velocidad dividiendo el espacio recorrido por el tiempo gastado en recorrerlo, y el tiempo dividiendo el espacio por la velocidad.

14. Simplificacion de la fórmula. — Si se toma por orígen de los espacios el punto M_0 donde se encuentra el móvil al orígen del tiempo, la fórmula quedará reducida á

$$e=vt.$$

15. Generalidad de la fórmula. — Para generalizar la primera fórmula es necesario atribuir á las cantidades que entran en ella valores positivos y negativos. Despues de haber fijado el sentido positivo de las distancias sobre la curva, se dará á e_0 el signo $+$ ó $-$, segun que la distancia del orígen al punto M_0 será contada en este sentido ó en el contrario: del mismo modo la velocidad v será positiva ó negativa segun que haga marchar al móvil en el primero ó segundo sentido, á medida que el tiempo transcurre. Entonces se verá fácilmente que el valor y el signo de e resultarán de estos movimientos en todos y en cada uno de los casos dados.

16. Homogeneidad de la fórmula. — No es inútil el observar aquí que la precedente ecuacion es homogénea, esto es, que subsiste como todas las fórmulas de la mecánica, cualesquiera que sean las unidades de longitud y de tiempo. Efectivamente, $e-e_0$ es una longitud cuyo valor numérico depende únicamente de la unidad de longitud; pero v depende además de la unidad de tiempo. Si desde luego se toma una unidad de longitud m

veces mas grande, sin cambiar la unidad de tiempo, $e-e_0$ y v serán reemplazados por $\frac{e-e_0}{m}$ y $\frac{v}{m}$, y la fórmula subsistirá entre los nuevos números. Si en seguida se toma una unidad de tiempo n veces mas grande, la velocidad deberá ser representada por nv y el tiempo por $\frac{t}{n}$; su producto será, pues, $nv + \frac{t}{n}$, ó vt como antes. En este caso la fórmula subsistirá tambien.

CAPITULO II

Del movimiento variado de los cuerpos y puntos materiales, y de sus diversas aceleraciones.

17. Definicion. — Cuando el movimiento de un punto no es uniforme ni compuesto de movimientos uniformes que tienen duraciones finitas, el movimiento se llama *variado*.

El movimiento de un cuerpo que cae, y el de los caminos de hierro, son variados. En esta especie de movimientos, la rapidez cambia á cada momento. Si se concibe que en un instante dado conserva la misma velocidad, entonces el movimiento se hace uniforme, y la velocidad de este movimiento será lo que se llama velocidad de movimiento variado en el instante considerado. Luego que los coches que arrastra una locomotiva se acercan al punto de llegada, el movimiento se disminuye progresivamente, en términos que si era antes de 15 metros por segundo, sucesivamente será de 14, 13..... y 1 hasta anularse por completo cuando los coches se hayan parado. Si en un instante dado se supone que la velocidad es de 6 metros por segundo, esto no quiere decir que la locomotiva hace seis metros por segundo; da á entender solamente que si conservara la rapidez del movimiento que tenia en el instante observado, el convoy recorreria 6 metros en un segundo.

18. Ecuacion del movimiento variado. — El movimiento variado de un punto sobre su trayectoria queda determinado completamente cuando para cada instante se conoce la relacion que existe entre la distancia variable e de este punto al orígen de los espacios y el tiempo correspondiente t transcurrido desde un instante inicial hasta el momento considerado. Al efecto, supondremos que esta relacion se traduce analíticamente por una ecuacion dada:

$$e = f(t)$$

que será la ecuacion del movimiento.

19. Definicion de la velocidad y de su direccion. — No puede decirse que la velocidad de un movimiento variado, en un momento dado, es, como en el movimiento uniforme, el espacio que recorre el móvil durante la unidad de tiempo y dicho instante. De lo contrario, se haria depender esta velocidad de las variaciones ulteriores del movimiento, cosa que no puede admitirse de modo

alguno. Hé aquí las consideraciones que nos han servido para dar la precedente definicion.

Supongamos M la posicion del móvil sobre su trayectoria (fig. 2) en la época t; $MM' = \Delta e$ el espa-

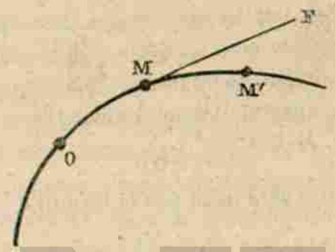

Fig. 2.

cio que recorre en un tiempo dado; Δt puede imaginarse este tiempo bastante pequeño para que el punto material se aleje constantemente del punto M durante dicho intérvalo. Si el espacio Δe habia sido descrito por un movimiento uniforme, $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ seria entonces la velocidad del movimiento. Esta demostracion representa la velocidad media con la cual el arco MM' ha sido recorrido ó la velocidad constante que hubiera sido necesario dar al móvil para hacerle recorrer con movimiento uniforme el arco MM' en el tiempo Δt disminuido indefinidamente: Δe disminuye á su vez sin límites; por consiguiente, la relacion $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ varía sin cesar porque representa la velocidad media, y converje hácia un límite determinado que llamamos la *velocidad* del móvil ó del punto M.

Así, la velocidad de este, en un punto dado de su trayectoria, es el límite de la relacion del aumento del espacio y del tiempo, luego que este último disminuye hasta cero, es decir, la derivada del espacio considerado como funcion del tiempo. Ahora bien, si la ecuacion del movimiento es

$$e = f(t),$$

la velocidad v será dada por la fórmula

$$v = f'(t)$$

El cálculo de las derivadas proporcionará la expresion analítica de la velocidad, todas las veces que la ecuacion del movimiento será conocida.

La direccion de la velocidad es la de la tangente MF al punto M.

Debe tenerse presente que se obtiene la misma definicion considerando un intérvalo Δt bastante corto para que el movimiento durante este tiempo pueda mirarse como uniforme; porque entonces se tendrá $\Delta e = v\Delta t$, de donde se saca $v = \frac{\Delta e}{\Delta t}$. En este sentido, pues, es cuando se dice que la *velocidad del movimiento variado en un instante dado, es el cociente de la division del espacio infinitamente pequeño por el tiempo infinitamente pequeño consumido en describirlo.*

Puede decirse tambien que la *velocidad del cuerpo seria la del movimiento uniforme que sucedería al movimiento variado, si, en el instante en que se le considera, cesara repentinamente de aumentar ó disminuir el movimiento.*

Estos principios pueden demostrarse prácticamente con el auxilio de las reglas que nos suministra la geometría analítica, las cuales nos facilitan los medios de representar el movimiento variado y su velocidad. Al efecto podrán hacerse las construcciones ó representaciones gráficas que los indiquen y comprueben. Y con el fin de evitar todo cálculo para transformar las longitudes medidas, es necesario suponer que se han representado por la misma longitud las unidades del tiempo y del espacio.

20. Casos en que la ecuacion del movimiento no está dada. — Sucede frecuentemente que la relacion entre los espacios y los tiempos son dados por los supuestos experimentales en vez de serlo por una ecuacion. Esto puede verse en ciertas máquinas de indicaciones continuas que por sí mismas describen mecánicamente la *curva de los espacios*. En este caso el trazado de la tangente á la curva hace conocer en cada punto la velocidad del movimiento en todos y en cada uno de los instantes considerados.

En otros, los datos se reducen á una *tabla* que encierra cierto número de valores correspondientes á e y t. Estos valores dan el mismo número de puntos de la curva ignorada por los espacios. Si estos puntos están cerca unos de otros, se podrán construir aproximativamente esta curva y sus tangentes. Se puede tambien, aplicando los métodos ordinarios de interpelacion, determinar la ecuacion de una curva algébrica que pasa por los puntos dados, y que los sustituye á la curva de los espacios. Además, calculando la derivada de la ordenada de la curva obtenida por este medio, se logrará así tambien el valor aproximado de la velocidad.

Empero, cualesquiera que sean los datos que sirvan á construir la curva, la discusion de la ordenada y de su tangente es propia y suficiente para dar á conocer todas las circunstancias del movimiento. Así, sin entrar, pues, en los detalles que necesitara esta cuestion y limitándonos solamente á llamar la atencion de nuestros lectores, diremos, sin embargo, que el movimiento es *directo*, ó tiene lugar el sentido en los espacios positivos, cuando el valor de la ordenada aumenta algébricamente, y que es *retrógrado* en sentido contrario. En el movimiento directo, la velocidad irá aumentando si la curva vuelve su convexidad hácia la region inferior del plano, y, disminuyendo si la convexidad se vuelve hácia la region superior, pues el resultado es inverso en el movimiento retrógrado.

CAPITULO III

Del movimiento uniformemente variado, y de su velocidad y ecuacion.

20. Definido en el capítulo primero el movimiento uniforme, y tratado en el segundo del movimiento variado, hablaremos en este de las propiedades del movimiento uniformemente variado; pero antes diremos qué se entiende por este movimiento.

21. Definicion. — El movimiento de un cuerpo, ó de un punto material sobre una línea recta ó curva es uniformemente variado, *cuando aumenta ó disminuye la velocidad de cantidades proporcionales á los tiempos gastados para recorrerlas*. Así, será uniformemente *acelerado* cuando la velocidad aumenta; y por el contrario, uniformemente *retardado* cuando la velocidad disminuye en las mismas proporciones.

22. Velocidad y ecuacion de este movimiento.

— Para comprenderlo mejor, designaremos con v_0 la velocidad inicial, ó la del móvil al principio del tiempo, y con v la velocidad del mismo al fin del tiempo t. Supongamos tambien para mayor precision, que γ es la variacion de la velocidad durante un segundo. Pues bien, en este caso la variacion en el tiempo t será γt. Luego siendo el movimiento acelerado, nos dará por resultado

$$v_0 - v = \gamma t \text{ ó } v = v_0 + \gamma t.$$

Estas dos fórmulas se reducen á esta sola,

$$v = v_0 + \gamma t,$$

conviniendo en dar á γ el signo $+$ en el primer caso y el signo $-$ en el segundo.

23. Observacion. — En el precedente párrafo hemos supuesto que v_0 y v son velocidades positivas; pero la fórmula que antecede es siempre la propia del movimiento uniformemente variado; así, este será acelerado cuando v_0 é γ lleven el mismo signo, llevando signos contrarios, y entonces el movimiento será retardado hasta que no se obtenga $v_0 + \gamma t = o$, de donde resulta $t = -\frac{v_0}{\gamma}$. Por lo tanto, desde este momento el movimiento será acelerado porque cambia de sentido.

24. Aceleracion. — La cantidad constante γ, que mide la variacion de la velocidad durante la unidad de tiempo, se llama *aceleracion*; esta es una

longitud, como v_0 y v, que depende igualmente de dos unidades. Los diversos movimientos uniformemente variados se distinguen entre sí por la importancia y grandeza del movimiento recíproco de cada uno, y por el signo de la aceleracion.

Sin embargo, puede deducirse de la fórmula $v = v_0 + \gamma t$ la expresion del espacio recorrido en este movimiento. Porque siendo la velocidad la derivada del espacio, segun queda dicho, basta con subir á la funcion del tiempo de que deriva $v_0 + \gamma t$, lo cual nos dará la fórmula

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \Delta t^2;$$

e_0 es la constante que facilita las operaciones de esta naturaleza: aquí representa la distancia del cuerpo al orígen de los espacios, en el momento en que $t = o$.

Por consecuencia, en todo movimiento uniformemente variado, el espacio recorrido es una funcion del segundo grado del tiempo gastado para recorrerla.

Esta nueva ecuacion ó fórmula, como encierra tres constantes e_0, v_0, γ, facilita asímismo el conocimiento de las tres posiciones del móvil sobre su trayectoria, condicion que es, por cierto, muy necesaria é indispensable para determinar su movimiento.

Finalmente, deberá notarse que si el camino recorrido es una funcion del segundo grado del tiempo, el movimiento es uniformemente variado; pues si resulta

$$e = a + bt + ct^2,$$

se obtendrá la velocidad, tomando la derivada

$$v = b + 2ct,$$

fórmula que expresa que la velocidad varía en proporcion al tiempo.

Estas fórmulas son homogéneas. Desde luego se concibe con facilidad que son independientes de la unidad de longitud; pues si se toma una unidad n veces mas grande, los números v_0, v, γ, e_0, e, deberán ser reemplazados $\frac{v_0}{n}$, $\frac{v}{n}$, $\frac{\gamma}{n}$, $\frac{e_0}{n}$, $\frac{e}{n}$, y las fórmulas subsistirán siempre con estos nuevos números.

Mas para probar que no dependen de la unidad del tiempo, es necesario notar que si se toma una unidad n veces mas grande, se verá, primero, que el tiempo es representado por el número n veces mas pequeño $\frac{t}{n}$; segundo, una velocidad que, siendo la relacion $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ de un espacio á un tiempo su denominador se convierte en n veces mas pequeño, y por lo tanto, las velocidades v_0, v deben reemplazarse con nv_0, nv; y tercero, cuando la aceleracion γ, que es la velocidad adquirida en un segundo, ó para comprenderlo mejor, la relacion de la velocidad adquirida en t segundos durante el

tiempo t empleado para adquirirla, su numerador deberá multiplicarse por n puesto que es una velocidad, y su denominador dividirse por n visto que la unidad del tiempo es n veces mas grande. Ultimamente, su valor primitivo debe multiplicarse por n^2, esto es, reemplazarse por $n^2\gamma$. Así, haciendo estos cambios en las fórmulas $v = v_0 + \gamma t$ y $e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, quedarán

$$nv = nv^0 + n^2\gamma\frac{t}{n}, \text{ ó } v = v_0 + \gamma t.$$

$$e = e_0 + nv_0\frac{t}{n} + \frac{1}{2}n^2\gamma\frac{t^2}{n^2} \text{ ó } e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Luego como se evidencia, por lo demostrado, las precedentes fórmulas no dependen de las unidades del tiempo expresadas por la relacion n.

25. Simplificacion de fórmulas.— Las fórmulas $v = v_0 + \gamma t$ y $e = {}_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$ que representan el movimiento uniformemente variado pueden simplificarse. Contando el tiempo desde el momento en que la velocidad es nula, la fórmula citada $v = v_0 + \gamma t$ quedará reducida á

$$v = \gamma t;$$

y si además se cuentan los espacios partiendo del punto en que entonces se halla el móvil, la fórmula $e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, se reducirá á

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

De este modo se verá que las velocidades son proporcionales á los tiempos transcurridos y los espacios andados á los cuadrados de estos mismos tiempos.

26. CURVA DE LAS VELOCIDADES. — Puede igualmente construirse la curva por las velocidades, ó, lo que es lo mismo, la línea representada por la ecuacion

$$v = v_0 + \gamma t,$$

tomando el tiempo por las separaciones y las velocidades por las ordenadas. Esta línea es una recta inclinada sobre el eje de los tiempos. Su coeficiente de inclinacion es el valor de la aceleracion; corta el eje de las velocidades en el punto que da la velocidad inicial y el eje de los tiempos en el punto que marca el momento en que la velocidad es nula, y en que el movimiento cambia de sentido.

27. VALOR DE LA ACELERACION EN LA CAIDA DE LOS CUERPOS. — El movimiento de un cuerpo pesado que cae en el vacío es uniformemente acelerado, segun lo demuestra la experiencia. La aceleracion γ es la misma para todos los cuerpos, *en el mismo lugar*. Represéntase generalmente por la letra g, primera de la palabra gravedad. Se ha evaluado así :

$$g = 9^m,8088.$$

Por consiguiente, un cuerpo pesado partiendo

sin velocidad inicial adquiere una velocidad de $9^m,8088$ en el primer segundo de su caida en el vacío; luego recorre en este segundo la mitad de dicho espacio, esto es, $4^m,9044$.

28. ECUACION DE ESTE MOVIMIENTO. — Si se designa con v la velocidad adquirida al fin del tiempo t, y por h la altura de donde cae el cuerpo durante este tiempo, las ecuaciones del movimiento son

$$v = gt \qquad h = \frac{1}{2} gt^2$$

y eliminando t $\qquad v = \sqrt{2gh}.$

Por consiguiente, v es la velocidad de la altura h.

Mas si el móvil está animado de una velocidad inicial v_0, las ecuaciones son :

$$v = v_0 + gt, \quad h = v_0 + \frac{1}{2} gt^2,$$

y eliminando t, $\quad v^2 - v_0^2 = 2gh.$

Como aplicacion de estás fórmulas resolveremos los siguientes problemas :

1.° Un cuerpo cayendo por lo largo de la vertical OX (fig. 3), ha recorrido la longitud dada $A\,B = h$ en un tiempo dado θ. Ahora se preguntará : ¿de qué punto ha partido sin velocidad inicial ?

Fig. 3.

Supongamos Θ el punto de salida : pongamos en seguida $\Theta\,A = x$, y designemos con t el tiempo desconocido durante el cual el cuerpo ha caido del punto Θ al punto Δ, y resultará

$$x=\frac{1}{2}gt^2, \qquad x+h=\frac{1}{2}g(t+\theta)^2$$

De ahí se saca por medio de la sustraccion

$$h=\frac{1}{2}g(2t\theta+\theta^2)=gt\theta+\frac{g\theta^2}{2};$$

y por consecuencia $t=\frac{(2h-g\theta)^2}{2g\theta}$.

Sustituyendo el valor t en la expresion de x, se obtendrá $x=\frac{(2h-g\theta)^2}{8g\theta^2}$

Mas, para que el problema sea posible es necesario que t sea positivo, y al efecto se exige que se tenga $h>\frac{g\theta^2}{2}$, como condicion evidente *á priori.*

2.° caso. Dos cuerpos pesados C_0, C_1 caen el uno de Δ y el otro de B con velocidades iniciales dadas V_0, V_1; el primero parte θ segundos antes que el otro; la distancia ΔB es dada igual á h: ¿en qué punto y en qué momento se encontrarán? (Fig. 3.)

Sea, pues, R el puesto del encuentro, x la distancia BR, y t el tiempo que transcurre durante la caida de C_1. Las ecuaciones son:

$$h+=v_0(\theta+t)+\frac{1}{2}g(\theta+t)^2,$$

$$x=v_1t'+\frac{1}{2}gt^2.$$

La sustraccion da:

$$h=v_0\theta+(v_0-v_1)t+\frac{1}{2}g(\theta^2+2\theta t),$$

de donde resulta $t=\frac{h-v_0\theta-\frac{1}{2}g\theta^2}{v_0-v_1+g\theta}$

Sustituyendo este valor de t en la expresion de x, se encontrará la distancia que se busca. Será muy útil el discutir las fórmulas, y por medio de ellas concluir las condiciones de la posibilidad del problema.

El siguiente problema podrá proponerse aun, pero su resolucion la dejamos al arbitrio del lector:

Dos cuerpos pesados parten del mismo punto Θ en épocas diferentes dadas, sin velocidades iniciales. ¿En qué momento serán separados el uno del otro por una distancia dada, y qué caminos habrán recorrido en su caida?

CAPITULO IV

Del movimiento rectilíneo variado, bajo el punto de vista de su aceleracion.

29. En los capítulos precedentes hemos supuesto que la trayectoria del punto material era una curva cualquiera. Ahora suponemos que el movimiento es rectilíneo á fin de salvar las dificultades que pudieran ofrecerse, y al efecto daremos á la nocion de la aceleracion una extension análoga á la que ha generalizado la nocion de la velocidad, segun puede verse en el párrafo 19.

30. Definicion. — La aceleracion de un punto material que se mueve en línea recta, es, en un instante dado, el límite de la relacion de la variacion de la velocidad al aumento del tiempo, esto es, la *derivada de la velocidad considerada como funcion de tiempo.*

En prueba de ello, supongamos que v es la velocidad del móvil al fin del tiempo t sobre su trayectoria rectilínea; designemos con Δv la variacion positiva ó negativa de esta velocidad durante el tiempo Δt, suponiendo este tiempo bastante corto para que la velocidad no haya cesado de variar en el mismo sentido durante todo este intérvalo. Si el movimiento era uniformemente variado, sábese ya que $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ representaria la aceleracion constante de este movimiento, segun puede verse en el párrafo 22. Por consiguiente, esta relacion es una especie de *aceleracion media*. Cuando Δt disminuye indefinidamente, lo mismo sucederá á Δv, y la relacion, variando sin cesar de representar la aceleracion media, converje hácia un límite determinado que se llama la aceleracion al fin del tiempo t.

31. Expresion analítica de la aceleracion. — Representado el espacio recorrido por el móvil con la fórmula

$$e=f(t),$$

la primera derivada dará la velocidad

$$v=f'(t),$$

y por consiguiente la aceleracion derivada de la velocidad será la segunda derivada del espacio, ó

$$\gamma=f''(t).$$

Así, siempre que se conozca la expresion analítica del espacio ó de la velocidad en funcion del tiempo, se podrá encontrar, por el cálculo de las

derivadas, la exacta aceleracion que llevan los cuerpos en cada uno de los casos dados.

32. Observacion.—Si como dejamos explicado en el párrafo 22, el intérvalo Δt es bastante corto para que pueda mirarse el movimiento del móvil como uniformemente variado, nos dará:

$$\Delta v=\gamma\Delta t, \text{ luego } \gamma=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Hé ahí lo que se expresa cuando se dice que la aceleracion en un movimiento variado rectilíneo, en un instante dado, es el *cociente producido por la division de la variacion infinitamente pequeña de la velocidad de este movimiento por el tiempo infinitamente pequeño consumido para producir dicha variacion.*

Mas, debe tenerse en cuenta que la aceleracion γ es una longitud que depende, así como la velocidad, de la unidad del espacio y de la del tiempo á la vez. Así, cuando la unidad de tiempo resulta n veces mas grande, Δv y Δt deben reemplazarse por $n\Delta v$ y $\frac{\Delta t}{n}$ segun puede verse al fin del párrafo 24 al tratar de la homogeneidad de las fórmulas. Por consecuencia, la aceleracion se mide por un número n^2 veces mayor. Empero, la aceleracion puede ser positiva ó negativa; y el movimiento es *acelerado* cuando la velocidad y la aceleracion son del mismo signo, y *retardado* cuando son de signo contrario.

33. Determinacion analítica de las velocidades por las aceleraciones y de los espacios por las velocidades. — Cuando la ecuacion $e=f(t)$ que enlaza los espacios al tiempo se conoce, la regla del cálculo de las derivadas permiten en todos los casos de encontrar las fórmulas ya indicadas $v=f'(t)$ é $\gamma=f''(t)$ que nos dan las expresiones analíticas de la velocidad y de la aceleracion. Pero el problema inverso que consiste de pasar de la expresion de la aceleracion á la de la velocidad y de esta á la del espacio recorrido, es muchas veces insoluble porque los métodos ordinarios nos conducen á operaciones muy complicadas; y en este concepto su adopcion seria poco ventajosa por no decir inútil. Efectivamente, dichos métodos no pueden ser aceptables máxime cuando en vez de $\gamma=\varphi(t)$ entre el tiempo y la aceleracion, no se podrá contar mas que con una tabla de cierto número de valores correspondientes á estas dos variables.

Es verdad, sin embargo, que en este último caso en que $(n+1)$, sistemas de los valores de γ y de t, son conocidos, se podria calcular con el auxilio de las fórmulas de interpelacion la funcion entera y del grado n verificada por estos sistemas, y sustituir esta funcion á la relacion desconocida entre γ y t. Entonces obtendríamos por ejemplo :

$$\gamma=at^n+bt^{n-1}+ct^{n-2}+\ldots+kt+l;$$

y en este caso, el cálculo inverso de las derivadas daria inmediatamente

$$v=\frac{a}{n+1}t^{n+1}+\frac{b}{n}\quad+\frac{c}{n-1}t^{n-1}\ldots+\frac{k}{2}t^2+\frac{l}{1}\,t+v_0,$$

$$e=\frac{a}{(n+1)\,(n+2)}t^{n+2}+\frac{b}{n\,(n+1)}t^{n+1}+\frac{c}{(n+1)\,n}t^n+\ldots.$$

$$+\frac{k}{2.3}t^3+\frac{l}{1.2}t^2+v_0\,t+e_0.$$

v_0 y e_0 cantidades supuestas conocidas con anticipacion, son la velocidad inicial y el espacio recorrido al orígen del tiempo.

Mas, como las fórmulas de interpelacion son sumamente fastidiosas y difíciles de aplicar, no estará de mas que establezcamos un método gráfico con que podamos suplir ventajosamente la insuficiencia de los análisis ó la prolongacion de la operacion. Hé aquí dicho método :

34. Lema. — Refiriéndose á los dos ejes rectangulares OX, OY (fig. 4), la curva representada por la ecuacion $y=f(x)$ y construyéndose las ordenadas $AB=y_0$ y $MP=y$ correspondiente á una separacion dada $OA+x_0$ y á otra separacion cualquiera $OP=x$, el área del trapecio mistilíneo $ABMP$ comprendido entre la curva, el eje de las separaciones y las ordenadas y_0 é y, tienen por derivada la ordenada del extremo y, considerada como funcion de x. Efectivamente, cuando la separacion x aumenta de una cantidad $PP=\Delta x$, la ordenada y varía de una cantidad $KM_1=\Delta y$, y el

área σ crece de otra $PMM^1P_1 = \Delta\sigma$. La derivada del área, es, pues, el límite de la relacion $\frac{\Delta\sigma}{\Delta x}$, cuando Δx converje hácia el cero. Así, puede suponerse Δx bastante pequeño para que pasando de la posicion

Fig. 4.

MP á la de M_1P_1 la ordenada no haya cesado de aumentar ó disminuir. En su virtud el área $\Delta\sigma$ está comprendida entre los rectángulos $y\Delta x$, é $(y+\Delta y)$ é x, y la relacion $\frac{\Delta\sigma}{\Delta x}$ entre y é $y+\Delta y$. Como estos dos límites se reducen á y cuando $\Delta x = o$, resulta el lím. $\frac{\Delta\sigma}{\Delta x} = y$, que se queria demostrar.

Puede obtenerse el mismo resultado, notando que el trapecio elemental $PMM_1P_1 = \Delta\sigma$ se compone

del rectángulo $PMKP_1 = y\Delta x$ y del triángulo $MKM_1 = \frac{1}{2}\Delta x\Delta y$, de todo lo cual se deduce

$$y = \frac{\Delta\sigma}{\Delta x}.$$

La aplicacion de este lema es fácil de comprender. Si la curva BM es la curva de las aceleraciones, esto es, una curva que tiene por separacion los tiempos y por ordenada las aceleraciones, AB siendo una aceleracion inicial y MP siendo así mismo una aceleracion en la época t, el área $ABMP$ de esta curva y la velocidad v á la época t tendrán ambas por derivada el valor de la aceleracion en este instante, sin otra diferencia que la de una constante. De este modo resultará

$$v = \text{área } ABMP + \text{const.}$$

A priori esta constante es arbitraria, puesto que la derivada del área es la misma, cualquiera que sea la posicion de la ordenada inicial AB; para determinarla es necesario conocer un valor particular de la velocidad, por ejemplo, la que corresponde al tiempo OA. Si v_o es este valor deberá tenerse á la vez, $v = v_o$, y el área $ABMP = o$, de donde se concluye: constant.$= v_o$; y la fórmula completamente determinada es:

$$v = v_o + \text{área } ABMP.$$

Por consiguiente, para evaluar los valores de la velocidad á las diferentes épocas, basta con elevar la curva de las aceleraciones y de medir las áreas correspondientes á dichas épocas.

35. Observacion. — Debe notarse que si la curva BM corta el eje de los tiempos (fig. 5) de manera

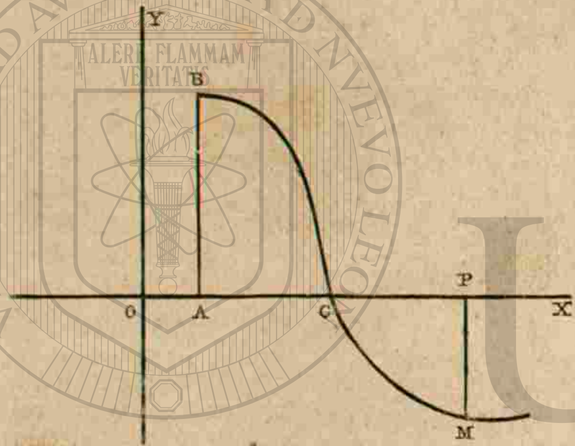

Fig. 5.

que las ordenadas extremas AB y MP sean de signo contrario, el área colocado debajo del eje deberá considerarse como negativa, y en este caso se tendrá por expresion de la velocidad en la época t,

$$v=v_0+\text{área } ABC-\text{área } CMP.$$

Porque la velocidad á la época OC, segun lo que precede, es v_0+área ABC. Desde este momento la

aceleracion, haciéndose negativa, disminuye la velocidad de una cantidad variable que, á la época t, se mide por el área CMP; por supuesto, siguiendo las mismas condiciones aplicadas en la presente operacion. Por consecuencia, la velocidad final está bien medida con la fórmula precedente $v=v_0+$área, etc., así en cuanto á su magnitud como respecto al signo.

36. Fijacion de los espacios por medio de las velocidades. — Del mismo modo, si la curva BM (fig. 5) representa la curva de las velocidades, construida, ya sea directamente con auxilio de su ecuacion, ya indirectamente con ayuda de la de las aceleraciones y de la fórmula $v=v_0+$área, $ABC-$área CMP, el área $ABMP$ y el espacio recorrido en la época t tendrán la misma derivada, esto es, la misma velocidad en este instante, de manera que solo se diferenciarán de una constante, dando por resultado en su virtud

$$e=\text{área } ABMP+const.$$

Esta constante será determinada desde luego, conociendo el valor particular de e, por ejemplo, la que corresponde al tiempo OA. Así, suponiendo e este valor, resultará

$$e=e_0+\text{área } ABMP.$$

Por consiguiente, las áreas de la curva de las velocidades nos darán los espacios recorridos por el punto material.

No hay necesidad de añadir que, si la curva corta el eje de los tiempos (fig. 5), se deberán considerar como negativos los espacios medidos por las áreas situadas bajo del eje, y en este caso se adoptará la fórmula

$$e = e_0 + \text{área } ABC \text{área} - \text{área } CMP.$$

Resulta de las reglas y explicaciones precedentes que la investigacion de los espacios con ayuda de las velocidades, y la de las velocidades con la de las aceleraciones, son problemas de la misma especie cuya solucion depende de una *cuadratura*.

37. MÉTODO PARA HACER LA CUADRATURA. — Existen varios métodos de cuadratura aproximativa. El llamado DE LOS TRAPECIOS consiste en reemplazar la curva por un polígono, y en calcular el área comprendida en él; pero este método no ofrece mas que una aproximacion insuficiente, á no ser que se agrupen considerablemente las ordenadas, lo cual haria las operaciones muy prolijas y laboriosas.

Mr. GAUSS ha perfeccionado el método indicado por *Newton* y desenvuelto por *Cotes*; fundado en las fórmulas de interpelacion, presenta los cálculos mas cortos, ofreciendo por consiguiente aproximaciones mas exactas. Pero como necesita consagrarle muchas páginas, necesarias para desarrollar materias mas importantes, remitimos á nuestros lectores al famoso artículo sobre las cuadraturas,

inserto en los NUEVOS ANALES DE MATEMÁTICAS, octubre de 1855.

Tambien se conocen y están en uso los métodos de MM. Poncelet y Simpson. El de Mr. Simpson, anterior al de Poncelet, no es tan sencillo ni da los mismos resultados que el de aquel : sin embargo, ambos exigen que la distancia de las ordenadas extremas sea dividida en un número par de partes iguales; fundándose en que siempre se puede hacer pasar por tres puntos dados, no en línea recta, un arco de parábola, cuyo eje sea paralelo á una direccion dada.

CAPITULO V

De la proyeccion de las velocidades.

34. Proyeccion de un móvil sobre un eje fijo. — Supongamos un móvil puesto en movimiento sobre su trayectoria AB (fig. 6) y M su posicion en la época t. Supongamos tambien OX un eje fijo dado : y á cada instante podrá proyectar el punto M sobre el eje, paralelamente al plan dado y OZ (conduciendo sucesivamente MP paralelo á OZ; PG paralelo á OG y uniéndose á MG). El punto G, proyeccion del punto M, puede ser considerado á su vez como un cuerpo en movimiento sobre el eje OX; y estos dos movimientos serán enlazados por una relacion que es necesario determinar aquí. El teorema siguiente expresa este enlace ó union.

35. *La velocidad de la proyeccion de un punto móvil sobre un eje fijo es igual á la proyeccion de la velocidad del móvil sobre el mismo eje.*

Efectivamente, sea $MM_1 = \Delta e$ el espacio recorrido durante el tiempo Δt por el móvil sobre su trayectoria y $GG_1 = \Delta x$ su proyeccion sobre el eje OX; Δx el espacio recorrido por el punto G durante el tiempo Δt: por consecuencia, las velocidades res-

Fig. 6.

pectivas del punto M y de su proyeccion G en la época t (velocidades que designamos con v y v^x) son los límites de las relaciones $\frac{\Delta e}{\Delta t}$, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Así, si

se conduce la cuerda MM_1, y se sabe que existe entre esta cuerda y su proyeccion GG_1 una relacion que depende del ángulo de dicha cuerda con el eje OX y de la direccion del plano y OZ, resultará GG_1 ó $\Delta x = K$ cuerda MM_1, igualdad que puede escribirse del modo siguiente:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = K \times \frac{\text{cuerda } MM_1}{\Delta e} \times \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Cuando se pasa al límite, la relacion de la cuerda al arco es igual á 1; las relaciones $\frac{\Delta e}{\Delta t}$, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, se convierten en v y vx; el número K varía hasta cierto límite l dependiente de los ángulos de la tangente MT, en M, y converje hácia la curva (direccion de la velocidad v) con el eje OX y con el plano YOZ; así la relacion precedente se hará

$$v_x = lv.$$

Por consiguiente, si una longitud cualquiera, dirigida segun la tangente MT, proyecta sobre OX paralelamente al plano y OZ, la relacion de la proyeccion á la longitud es, como ya se sabe, el número constante l: luego lv es la proyeccion de la velocidad v sobre su propio eje.

Mas, debe observarse que si el tiempo Δt es infinitamente pequeño, el arco recorrido Δe es una línea recta infinitamente pequeña, cuya direccion es la de la tangente MT al punto M. En este caso la geometría da inmediatamente

$$\Delta x = l\ \Delta e, \text{ ó } \frac{\Delta x}{\Delta t} = l, \frac{\Delta e}{\Delta t}, \text{ ó } v_x = lv.$$

35. Caso particular en que el movimiento es rectilíneo. — Si el movimiento en el espacio es rectilíneo, se aplicará igualmente la misma demostracion sin necesidad de recurrir á los infinitamente pequeños; pues cualquiera que sea el espacio e recorrido en el tiempo t por el punto M, su trayectoria rectilínea, y el espacio h recorrido en el mismo tiempo por su proyeccion G sobre el eje OX, existirá siempre entre estas dos longitudes la relacion constante

$$h=l$$

deduciendo de ella $\frac{h}{t}=l\frac{e}{f}$,

y pasando al límite, $vx=lv$.

Con el fin de explicar en toda su extension el movimiento rectilíneo, estableceremos el siguiente *teorema* sobre las aceleraciones de dicho movimiento rectilíneo.

36. Vése asimismo que en el caso del movimiento rectilíneo antes expresado, las aceleraciones γ é γ_x de los puntos $M G$ se hallan enlazados por la misma relacion. Efectivamente, supóngase v y v_x su velocidad en la época t, Δv y Δv^x las variaciones de estas velocidades durante el tiempo t; $\Delta v+\Delta v_x$ y $v_x+\Delta v_x$ serán las velocidades en la época $t+\Delta t$. Por consiguiente, resultará segun la presente demostracion :

$$v_x=lv,\ v_x+\Delta v_x=l\,(v+\Delta v)$$

porque la relacion l es invariable en este caso. Así, se deduce tambien por sustraccion,

$$\Delta v^x=l\Delta v\text{; y en seguida }\frac{\Delta v^x}{\Delta t}=l\,\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

y pasando á los límites, se obtiene la fórmula

$$\gamma^x=l\gamma.$$

Así, debe observarse que en el movimiento rectilíneo los espacios recorridos, las velocidades y aceleraciones tienen, con sus respectivas proyecciones sobre un eje fijo, la misma relacion indicada por las tres ecuaciones precedentes. Pero cuando el movimiento en el espacio es curvilíneo, si las velocidades verifican la relacion $v_x=lv$, no sucede lo mismo, por cierto, con los espacios recorridos que no describen líneas rectas.

37. Proyecciones perpendiculares. — La geometría enseña que, en estas proyecciones, la relacion l es el coseno del ángulo que forma la direccion de la velocidad v con el eje OX. En su virtud, designando este ángulo con (v,x), la relacion $v_x=lv$, antes expresada, se escribirá :

$$v_x=v\text{ coseno }(v,x).$$

En este caso, la velocidad v^x se denomina *la velocidad del móvil*, estimada conforme al eje OX. Siendo el movimiento rectilíneo, como queda explicado al principio del presente capitulo, nos daria asi mismo :

$$e^x=e\text{ coseno }(e,x)\text{, y }\gamma^x=\gamma\text{ coseno }(\gamma,x).$$

Mas, suponiendo rectangulares los ejes OX, OY, OZ (fig. 6), y designando con v_x, v_y, v_z estas proyecciones de la velocidad v sobre estos ejes, obtendráse, en virtud de lo expuesto al principio de este párrafo 37,

$$v_x = v \cos. (v, x),\ v_y = e \cos. (c, y),\ v_z = v \cos. (v, z);$$

y añadiendo los cuadrados de estas tres fórmulas resultará, por fin, en su mas breve significacion, esta nueva fórmula

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

pues ya se sabe que coseno^2 (v, x) + coseno^2 (v, y), + coseno^2 $(v, z) = 1$.

Esta fórmula y la anterior á esta hacen descubrir la intensidad y direccion de la velocidad v del móvil en el espacio, cuando se conocen las velocidades de sus proyecciones sobre tres ejes rectangulares, y demuestran que esta velocidad es, en magnitud y en direccion, la diagonal del paralelipípedo construido sobre tres puntos contiguos, llevados por M paralelamente á los ejes, é iguales en longitud á las velocidades v_x, v_y, v_z.

Si la trayectoria es plana, en este caso puede tomarse su plano por los de xy, y entonces las dos precedentes fórmulas, y $v_z = 0$, se reducen á

$$v_x = v \cos. (v, x),\ v_y = v \cos. (v, y),$$
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

resultando así que la velocidad v es, en grandeza y direccion, la diagonal del rectángulo construido sobre dos rectas paralelas á los ejes, é iguales en longitud á las velocidades v_x y v_y.

CAPITULO VI

De la composicion y descomposicion de los movimientos.

Antes de abordar la cuestion, tenemos precision de declarar que casi todo este capítulo lo hemos tomado de los brillantes cursos explicados últimamente por Mr. Bertrand en el liceo Napoleon; y por cierto sentimos que los límites de este MANUAL *nos hayan impedido el insertar todo cuanto hemos hallado en ellos de útil y ventajoso.*

38. DEFINICION. — Llámase movimiento simultáneo el que tienen dos cuerpos que realizan sus movimientos respectivos en el mismo tiempo. Segun esto, el de un móvil en el espacio, y el de su proyeccion sobre un eje fijo, son dos movimientos simultáneos (1).

39. DEFINICION DE LOS MOVIMIENTOS IDÉNTICOS.—

(1) Véase el capítulo V, donde se habla del movimiento de proyeccion sobre un eje fijo.

Movimientos idénticos son los que tienen dos cuerpos cuando las cuerdas que unen sus puntos de salida á los de llegada son constantemente iguales y paralelos durante todo un tiempo dado (sea este grande ó pequeño). Así, una vez conocido el movimiento de un punto material ó de un cuerpo, entonces ya puede imprimirse un movimiento idéntico á otro punto material ó cuerpo que salga de un punto determinado.

40. Definicion del movimiento resultante de dos movimientos. — Establecido esto, supongamos tres móviles ó cuerpos C, C_1, C_2 en movimiento del modo siguiente. El primero C parte del punto O en un instante dado y se encuentra en S al fin del tiempo t, de tal suerte que la derecha que une el punto de salida al de llegada (fig. 7) sea igual á OS. El segundo y tercero C_1 y C_2 parten asimismo, el uno del punto O_1 y el otro del de O_2 á la vez, sin diferenciarse en nada, y se hallarán en la época t, de manera que las rectas que unen su punto de salida al de llegada son O_1S_1 y O_2S_2. Al efecto, se conducirá al punto S una recta SS_1 igual y paralela á O_1S_1, y por el punto O una recta OS_2 igual y paralela á O_2S_2. Si sucede que esta última recta OS_2 cierra el triángulo formado por OS y SS_1 y se llena esta condicion en todas las épocas del movimiento, en este caso se dirá que el movimiento del cuerpo C_2 es el *resultante* de los movimientos de dichos móviles C y C_1; estos movimientos se lla-

man compuestos de los del móvil C_2. Se ve así que en la época t el móvil C_2 se encuentra en el mismo

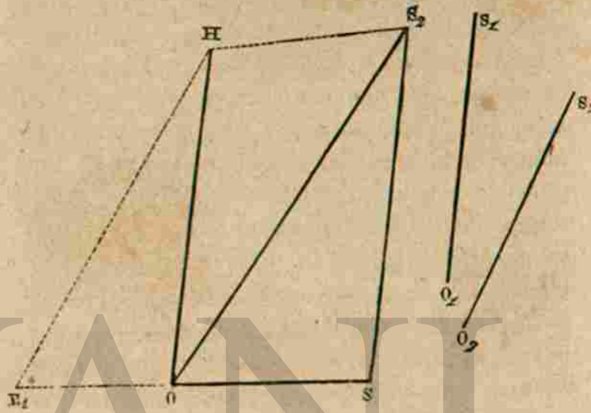

Fig. 7.

punto que si hubiera poseido sucesivamente dos movimientos idénticos á los de los cuerpos ó puntos materiales C y C_1. Hé ahí explicado como el primer movimiento resulta de los otros dos.

41. Movimiento relativo. — Dícese asimismo que el movimiento del segundo punto ó cuerpo C_1 es el movimiento relativo de C_2 con relacion al del móvil C; y creyendo inmóvil el cuerpo C_2, tendrá, en apariencia, el movimiento que posee en realidad el punto material ó el móvil C_1.

Esta definicion se verá explicada luego que se trate de la *composicion de los caminos y velocidades.*

42. Composicion de dos movimientos y descomposicion de un movimiento en dos. — Para componer dos movimientos basta encontrar el *resultante* de dichos dos movimientos, esto es, conociendo en magnitud y en direccion las líneas rectas que unen el punto de salida al de llegada de cada uno de los dos movimientos dados, encontrar la extension y direccion de la recta que une el punto de salida al de llegada en un movimiento resultante.

No estará de mas que digamos que los movimientos en cuestion no son rectilíneos, y que las rectas que indicamos son las cuerdas de los conos descritos por los móviles.

Todas las definiciones precedentes conducen inmediatamente á las reglas que deben seguirse para componer dos movimientos. Nótase, como puede verse, que OH, siendo igual y paralelo á SS_2, la figura OSS_2H es un paralelógramo, y OS_2 una de sus diagonales. En su virtud, puede establecerse la siguiente enunciacion :

Si se conduce por un mismo punto O dos rectas iguales y paralelas á las que unen el punto de salida al de llegada en cada uno de los dos movimientos componentes, y si se construye un paralelógramo sobre estos dos lados adyacentes, la diagonal que parte en este paralelógramo del

punto O es igual y paralela á la recta que une el punto de salida al de llegada en el movimiento resultante.

En suma, la enunciacion de este paralelógramo puede reducirse á estas palabras que sin duda lo harán comprender mejor; basta, pues, decir que *el movimiento resultante es en extension y direccion la diagonal del paralelógramo construido sobre los movimientos componentes.* Esta expresion es lo que se llama *paralelógramo de los movimientos.*

De la composicion de dos movimientos resulta su contradictoria, que llamaremos, como dejamos dicho, *descomposicion de un movimiento en dos.* Puede considerarse siempre un movimiento cualquiera en un plano como resultante de dos movimientos efectuados, siguiendo dos rectas dadas en dicho plano : y la razon es porque se puede construir un paralelógramo, conociendo la longitud y direccion de su diagonal (que representa el movimiento dado) y las direcciones de los dos lados que parten de uno de sus extremos. Esta operacion, pues, se llama *descomposicion del movimiento.*

Mas, debe observarse con sumo cuidado dos cosas, á saber : 1.° Conociendo el movimiento que arrastra al cuerpo y el relativo de un móvil, la regla de la composicion de los movimientos hace conocer el movimiento resultante, esto es, el movimiento real en el espacio. 2.° Si se prolonga OS (fig. 7) de una longitud igual OE, y que se une EH, OH será, y es efectivamente, la diagonal del paralelógramo $OEHS_1$, y en su virtud, se podrá decir que el movimiento relativo OH es el movimiento resultante del movimiento real OS_1 y de un movimiento OE igual al de que arrastra al cuerpo OS. Por consiguiente, si se conoce el movimiento real y el de arrastramiento de un móvil, la regla hace conocer su movimiento relativo.

43. Definicion del movimiento resultante de muchos movimientos. — *El movimiento resultante de muchos movimientos dados* se define así : compónense primero dos movimientos entre sí, en seguida el movimiento resultante con un tercero, y acto continuo el nuevo movimiento resultante con un cuarto y así sucesivamente. El último movimiento resultante obtenido de esta manera es el *movimiento resultante del sistema.*

Esta definicion conduce por sí sola, una vez instruido en los principios explicados y aplicados en esta primera parte, á construir los paralelógramos que demuestran esta regla, que desenvolveremos cuando apliquemos estos principios á las máquinas.

CAPITULO VII

De la composicion y descomposicion de las velocidades.

44. Definicion de la velocidad resultante de dos velocidades dadas. — Consideremos dos movimientos cualesquiera y sus respectivas velocidades en un mismo instante t (fig. 8), formemos una

Fig. 8.

paralelógramo $OEHS_1$, y en su virtud, se podrá decir que el movimiento relativo OH es el movimiento resultante del movimiento real OS_1 y de un movimiento OE igual al de que arrastra al cuerpo OS. Por consiguiente, si se conoce el movimiento real y el de arrastramiento de un móvil, la regla hace conocer su movimiento relativo.

43. DEFINICION DEL MOVIMIENTO RESULTANTE DE MUCHOS MOVIMIENTOS. — *El movimiento resultante de muchos movimientos dados* se define así : compónense primero dos movimientos entre sí, en seguida el movimiento resultante con un tercero, y acto continuo el nuevo movimiento resultante con un cuarto y así sucesivamente. El último movimiento resultante obtenido de esta manera es el *movimiento resultante del sistema.*

Esta definicion conduce por sí sola, una vez instruido en los principios explicados y aplicados en esta primera parte, á construir los paralelógramos que demuestran esta regla, que desenvolveremos cuando apliquemos estos principios á las máquinas.

CAPITULO VII

De la composicion y descomposicion de las velocidades.

44. DEFINICION DE LA VELOCIDAD RESULTANTE DE DOS VELOCIDADES DADAS. — Consideremos dos movimientos cualesquiera y sus respectivas velocidades en un mismo instante t (fig. 8), formemos una

Fig. 8.

recta igual y paralela á la primera, esto es, una recta ΔV, cuya longitud mida la intensidad de esta velocidad y cuya direccion sea la de la tangente á la trayectoria: conduzcamos en seguida, por su extremidad V, una recta VV_1 igual y paralela á la segunda, y unamos ΔV_1. La velocidad representada en grandeza y en direccion por la recta ΔV_1, se llama *resultante* de las dos velocidades dadas, y estas son las componentes de la velocidad $A V_1$.

Hecho cargo de la precedente definicion, deberá proponerse y resolverse el siguiente teorema fundamental.

45. *La velocidad del movimiento resultante de dos movimientos dados, es la resultante de las velocidades de los movimientos compuestos.*

Así, si ΔV y VV_1 representan en magnitud y direccion las velocidades de dos movimientos componentes, la recta $A V_1$ que cierra el triángulo representa en grandeza y en direccion la velocidad del movimiento resultante.

Debe tenerse en cuenta, para no errar la operacion y obtener el resultado que se busca, que las velocidades de los dos movimientos *se componen* como estos mismos movimientos, es decir, que la velocidad del movimiento resultante es la resultante de la velocidad de los movimientos compuestos, pues así como se verá en el siguiente ejemplo de la *composicion de las velocidades*, la velocidad de un movimiento real de un cuerpo es la resul-

tante del movimiento de arrastramiento y del movimiento relativo, del mismo modo la velocidad del movimiento relativo es la resultante de la velocidad del movimiento real y de una velocidad igual y contraria á la del movimiento de arrastramiento.

46. Ejemplo de la composicion de las velocidades. — Aunque los mecánicos modernos no niegan que en ciertos casos un cuerpo posee alguna vez en el mismo instante muchos movimientos simultáneos ó muchas velocidades simultáneas, y calificando estas locuciones de viciosas, han tratado de desembarazar de ellas el lenguaje mecánico; sin embargo, nosotros, aunque seguimos fielmente esta opinion, vamos á presentar el presente ejemplo excepcional.

Efectivamente, queda uno sorprendido á primera vista al oir que dos velocidades diversas pueden animar á la vez á un mismo cuerpo. Mas, tan luego como se demuestra esta verdad, las dudas se desvanecen y la luz ilustra las inteligencias prevenidas que los negaban.

Hagamos, pues, la experiencia sobre un barco que marcha recta y uniformemente por un rio (fig. 9); póngase sobre el punto A una bola; esta bola participará al instante del movimiento del barco, y seguirá, sin variar de sitio y de una manera uniforme, la línea recta $A B$. Si se la hace rodar con movimiento uniforme por la línea $A C$, entonces se hallará animada de dos movimientos al mismo tiempo, el suyo propio con relacion al buque, y el particular de este. Sea, pues, para mayor inteligencia *A D* el espacio recorrido por la bola en el tiempo de un segundo á consecuencia de la velocidad del primer movimiento, el cual es absolutamente el mismo que el del barco. Sea tambien *A E* la velocidad de la bola en su marcha sobre el puente. Pues bien, al cabo de un segundo, el barco habrá navegado una cantidad equivalente á *A D*. La línea *A C* que la bola describe, y que debe suponerse trazada sobre el puente, como se indica en la figura que la representa, se habrá transportado paralelamente á sí misma á la posicion *D F*; mas al propio tiempo la bola habrá recorrido de esta línea un espacio igual á *A E*, y como el punto se habrá transportado á *G*, describiendo la línea *E G*, paralela á *A D*, la bola se encontrará en *G* al final del segundo que consideramos.

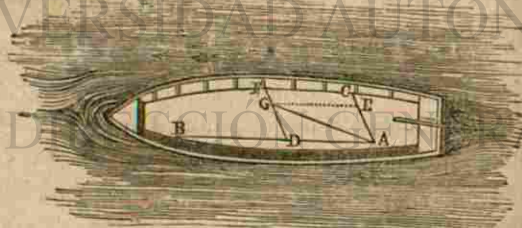

Fig. 9.

Al principiar el segundo expresado, la bola estaba en el punto *A*, y al terminarse se encontrará en el punto *G*; por consiguiente, durante este segundo la bola ha recorrido con movimiento uniforme la línea *A G*. Si en vista de esta explicacion se desea observar el punto en que se hallaba la bola al fin de medio segundo ó de un cuarto de segundo, se verá que estaba situado sobre la citada línea *A G*, en la mitad ó cuarta parte de la misma, principiando á calcular por el punto de partida *A*. Así, supuesto esto, la bola, animada simultáneamente de las velocidades *A D* y *A E*, cuyas direcciones son diversas, se encuentra solamente con una velocidad representada en cantidad y direccion por la diagonal del paralelógramo construido sobre las velocidades *A D* y *A E*.

De aquí se infiere la analogía existente entre la composicion de las velocidades que animan á un mismo cuerpo, y las fuerzas aplicadas á un mismo punto siguiendo diferentes direcciones. Finalmente, en razon de esta analogía se usan de las palabras componentes y resultantes, segun ya queda demostrado, así para expresar las velocidades como para significar las fuerzas.

47. Paralelógramo de las velocidades. — El teorema propuesto en el párrafo 45 puede traducirse tambien por la regla del paralelógramo de las velocidades.

Si se conducen por un mismo punto dos rectas cuyas longitudes midan la intensidad respectiva de las velocidades en dos movimientos dados, cuyas direcciones sean las de las velocidades, y construyendo un paralelógramo sobre los dos lados adyacentes, la velocidad del movimiento resultante será representada en grandeza y direccion por la de las diagonales del paralelógramo que sale del mismo punto.

De aquí resulta la *descomposicion de una velocidad en dos velocidades*, de modo que cuando un movimiento tiene lugar en un plano, puede mirarse siempre su velocidad, en un momento dado, como resultante de dos velocidades dirigidas, segun los dos ejes que se suponen situados sobre dicho plano. Tambien pueden considerarse las intensidades de dos componentes como si estuvieran ya conocidas en magnitud y en direccion, y, por fin, imaginar las intensidades de dos componentes, y buscar, en su virtud, sus direcciones. Para cada uno de estos casos, hay necesidad de construir un triángulo con datos y suposiciones indispensables á la claridad y buen éxito de la operacion.

48. Caso particular. — Si las dos velocidades componentes son paralelas, la velocidad del movimiento resultante es igual á su suma ó á su diferencia, segun que son de un sentido igual ó contrario.

49. Relaciones analíticas entre dos veloci-

dades y su resultante. — Cuando se quiere calcular la composicion de dos velocidades, es necesario incluir en las fórmulas la composicion de estas dos velocidades v, v_1, su resultante V y los ángulos que forman sus direcciones. Algunas veces se presentan dificultades para saber definir dichos ángulos con exactitud, y á fin de obviar este inconveniente debe imaginarse que se trazan, partiendo de un punto fijo, las rectas paralelas á las velocidades consideradas, las cuales no deben prolongarse sino en el sentido de cada movimiento. Segun esta regla, (triángulo $A V V_1$ de la figura 8) donde $AV=v$, $VV_1=v_1$, y $AV_1=V$, el ángulo de la resultante V con v, y que se designa ó nota (V, v), es el ángulo $V_1 A V$; el ángulo (V, v_1) es igual á $A V_1 V$ como opuesto por la vértice y el (v, v_1) es el suplemento de $A V V_1$.

Así, aplicando á este triángulo las fórmulas de la trigonometría rectilínea, al punto se obtendrán estas dos fórmulas que resuelven en todos los casos el doble problema que acabamos de exponer.

$$\frac{v}{\text{seno}\,(v_1, V)}=\frac{v_1}{\text{seno}\,(v, V)}=\frac{V}{\text{seno}\,(v, v_1)}$$

$$V^2=v^2+v_1^2+2vv_1\cos\,(v, v_1)$$

La primera de estas dos fórmulas demuestran que, en el caso general, *cada una de las tres* velocidades es proporcional al seno del ángulo que forman las direcciones de las otras dos.

50. Composicion de muchas velocidades. — Para

hacer esta operacion es necesario trazar un polígono y formar una despues de otra rectas iguales y paralelas á las velocidades dadas, y así hecho, se verá que la recta que cierra el polígono es en magnitud y direccion la *resultante* de estas velocidades, y esta resultante la velocidad del movimiento resultante.

Mas, debe observarse que la grandeza y direccion de la resultante no dependen del órden bajo el cual se trazan los lados del polígono.

51. Construccion gráfica de la resultante. — El polígono de las velocidades es comunmente izquierdo, y no se puede construir sino con el auxilio de los procederes de la geometría descriptiva. Pues, como dos rectas iguales y paralelas tienen por proyecciones sobre un mismo plano otras dos rectas y paralelas, la proyeccion del polígono es otro polígono cuyos lados son las proyecciones de las velocidades componentes y de la resultante.

Por consiguiente, la proyeccion de la resultante sobre un plano cualquiera es la resultante de las proyecciones de las componentes. Esta observacion nos da la idea, ó nos facilita inmediatamente la construccion del polígono que debe ejecutarse para obtener en el caso general la grandeza y direccion de la expresada resultante.

Finalmente, para ver las relaciones analíticas que existen entre las velocidades y sus resultantes,

debemos imaginar tres ejes rectangulares en el espacio; hecho esto se descompondrá cada una de las velocidades en otras tres dirigidas paralelamente á dichos ejes: en seguida se compondrá con ellas por medio de una adicion algébrica, todas las componentes dirigidas paralelamente al mismo eje, y por fin se compondrán las tres resultantes parciales en una sola, la cual será, sin error alguno, la resultante que se busca.

SEGUNDA PARTE

DE LAS FUERZAS Y DE SUS EFECTOS CON APLICACION A UN CUERPO Y PUNTO MATERIAL LIBBE.

CAPITULO PRIMERO

Ideas generales sobre la inercia, y de las fuerzas de la inercia.

I. De la inercia.

LEYES DE INERCIA. — Las siguientes, fundamentales en mecánica, se hallan consagradas por la experiencia mas acreditada y segura.

1.ª *Un cuerpo en quietud no puede ponerse en movimiento por sí mismo.*

2.ª *Un cuerpo en movimiento tampoco puede modificar por sí mismo la grandeza ni la direccion de su velocidad.* Este movimiento es rectilíneo y uniforme.

Podrá objetársenos que el hombre y los demas seres animados pasan por sí mismos del estado de quietud al de movimiento; mas esta objecion se destruye diciendo que esta facultad pertenece solo á la parte inmaterial que les comunica la vida, como lo demuestra un cadáver, que queda sujeto á las leyes generales de la materia desde el momento que exhala el último aliento.

Lo mismo puede decirse de ciertos cuerpos que parecen que se mueven *espontáneamente*, como vemos en los fenómenos eléctricos y magnéticos, pues es bien sabido que este movimiento se debe á las *acciones* mútuas ó á causas emanadas de sus mismas moléculas.

Ahora bien, resueltas estas dificultades aparentes, diremos que la primera ley es tan clara y evidente que hace inútil su demostracion. No así la segunda. Esta necesita explicacion tanto para comprenderla como para admitirla completamente. Cuando un cuerpo impelido por una fuerza extraña se halla animado de cierto movimiento, sin que causa alguna lo modifique, necesariamente, siguiendo el principio establecido, debe describir una línea recta y uniforme en todas sus partes y en todos los tiempos iguales en que se mida y compare. Efectivamente, luego que se lanza una bola sobre un plano perfectamente unido sigue siempre una línea recta, y nunca desviará de ella si no se encuentra con un obstáculo que modifique la trayectoria. Lo mismo sucede con la velocidad de su movimiento; y sin embargo hay repugnancia en admitir la uniformidad de él, máxime notando en el ejemplo citado que la bola disminuye gradualmente el movimiento hasta que al fin cesa

de moverse. Con todo, nótase que la bola recorre un espacio tanto mas grande cuanto mas unido y liso es el plano sobre el cual se mueve. Esta circunstancia demuestra que las asperezas mas ó menos perceptibles del plano y la resistencia que ofrece el aire, son las causas únicas que debilitan y destruyen, por fin, el movimiento de la bola; sin estos obstáculos, no cesaria nunca de moverse, y en su virtud debe concluirse que la bola no disminuye por sí misma su movimiento, y por lo tanto que *la velocidad de los cuerpos no cambia* de manera alguna por sí sola.

Este mismo principio es aplicable á los cuerpos que dan vueltas sobre un eje fijo, cuyo movimiento de rotacion conservará constante y perpetuamente, no oponiéndose las causas que lo impiden, como son el roce del eje sobre su punto de apoyo, la resistencia que encuentra en el aire y en los cuerpos que mueven.

De aquí se infiere que para que un cuerpo se ponga en movimiento y pueda modificarlo en seguida, ó tomar otro diferente del que tenia antes, es absolutamente necesario una causa cualquiera que se llama fuerza.

II. De la fuerza motriz.

52. Definicion. — Fuerza motriz es la causa que imprime ó modifica *los movimientos de los cuer-*

pos. Estas fuerzas ó causas son de diversas especies. Las hay *graves ó de gravedad*, *moleculares*, *eléctricas*, *magnéticas* y *animadas*.

53. Idem. — Las *animadas* son las que tienen los hombres y los animales, en las cuales se confunden todas las de esta clase bajo la significacion de motores animados.

54. Idem. — Las *magnéticas* y *eléctricas* son las que producen las atracciones y repulsiones que se notan en los fenómenos eléctricos y magnéticos como las propiedades del iman, del diamante frotado contra un paño, etc.

55. Idem. — Las *moleculares* son las propiedades interiores que tienen algunos cuerpos de comprimirse y dilatarse. Estas, unas son *atractivas* y otras *repulsivas*, como las que constituyen el principio de la potencia de las máquinas de vapor.

56. Idem. — Las *graves* ó de *gravedad* son las que tienen todos los cuerpos de dirigirse á su centro. Todos los cuerpos están sometidos á su accion, como se observa en el movimiento del agua de los rios y arroyos y cuando se lanza una piedra.

Debe tenerse presente que cuando una fuerza no produce su efecto, ó el movimiento del cuerpo sujeto á su accion necesariamente ha de producir una *presion* ó *tirantez* segun lo demuestra el siguiente

ejemplo : Un cuerpo puesto sobre una mesa ejerce *presion* sobre ella, y el suspendido de una cuerda determina la tirantez de la misma cuerda.

En el caso supuesto, la presion que el cuerpo hace sobre la mesa, y la tirantez que experimenta la cuerda, se llama *peso*, el cual no debe confundirse con el general de *gravedad* que tienen todos los cuerpos de dirigirse hácia su centro, pues la palabra peso indica el efecto de la accion de esta ley general.

III. Medida de las fuerzas.

57. Medida de la fuerza. — La aplicacion, direccion é intensidad son los tres elementos que entran en la definicion matemática de una fuerza. Cuando esta obra ejerce su accion sobre un cuerpo ó punto material que se llama *punto de aplicacion*. Si este está en quietud, la fuerza tiende siempre á imprimirle un movimiento siguiendo una línea recta que se llama *direccion*.

Para medir la *intensidad* de una fuerza, no hay necesidad de conocer su naturaleza. Así, decimos que dos fuerzas son *iguales* cuando aplicadas simultáneamente y en sentido contrario, á un mismo cuerpo ó punto material, no alteran su velocidad, ó cuando aplicadas sucesivamente á un mismo cuerpo en quietud, durante el mismo intérvalo de tiempo, le imprimen la misma velocidad. Por consiguiente, la fuerza elástica del vapor puede ser igual en ciertos y determinados casos al esfuerzo muscular de un hombre ó de un caballo, aunque estas fuerzas sean de diferente naturaleza. Por fin, si dos, tres ó mas fuerzas iguales se aplican simultáneamente al mismo punto en el mismo sentido, constituirán una fuerza doble, triple, etc., de una de ellas.

Las precedentes definiciones conducen inmediatamente á formar una nocion exacta de la relacion de dos fuerzas cualesquiera por medio de una medida comun; y si se toma una unidad de fuerza, la intensidad de cada fuerza será representada por el número que medirá la relacion de esta fuerza con la unidad tomada.

58. Comparacion de las fuerzas con los pesos. — Para comparar las fuerzas á los pesos, se hace uso de los instrumentos llamados *dinamómetros*.

59. Romana. — El mas sencillo de estos dinamómetros, lo es sin duda alguna la romana llamada de comercio (fig. 10 y 11); compónese de una hoja de acero flexible y curva por el centro, que posee cierta elasticidad. En el brazo inferior hay fijo un arco de círculo, que dividido en partes iguales hácia su parte superior, pasa libremente por el brazo de arriba, y remata en anillo. En el extremo del expresado brazo superior hay fijo otro arco que pasa igualmente por la abertura practicada en el inferior, y termina en otro anillo que sirve para

enlazar el gancho destinado á suspender el cuerpo ó cuerpos cuyo peso desea saberse.


Fig. 10.


Fig. 11.

Ahora bien; cuando se quiere hacer uso del expresado instrumento, tómase por el anillo superior, y se suspende un cuerpo cualquiera en el gancho. Levantado en alto, se nota al punto que ambos extremos se aproximan, segun se demuestra en la figura 11. Repitiendo la misma operacion con cuerpos diversos, se advertirá que las extremidades del resorte se acercarán en proporcion del peso específico de cada uno. Si los diferentes cuerpos ejercen la misma accion en el instrumento, en tal caso los pesos respectivos de todos estos cuerpos son iguales entre sí. Mas cuando se suspenden en el gancho dos cuerpos del mismo peso, el resorte cederá otro tanto mas de lo que cedia cuando se suspendia uno solo. Del mismo modo, el cuerpo suspendido en el gancho que haga ceder el resorte una, dos, tres, etc., veces mas que otro de la misma magnitud, es una señal incontestable de que tiene doble, triple peso, etc.

60. Unidad y comparacion del peso. — Generalmente la unidad del peso, desde que se han experimentado las ventajas del sistema métrico, es de gramos, kilógramos y muchas veces de toneladas, segun lo exijan la importancia del cuerpo ó cuerpos que han de pesarse. El gramo, pues, es el peso de un centímetro cubo de agua pura, tomado á la temperatura de su mayor densidad; el kilógramo está evaluado á 1,000 gramos, y la tonelada á 1,000 kilógramos.

Así, es fácil concebir que los mismos resortes no sirven para pesar los cuerpos ténues, ligeros y pesados, y la necesidad de proporcionarlos á la mole de cada uno y á la resistencia que respectivamente pueden ofrecer. Sin embargo, el principio de la medida del peso de los cuerpos permanece siempre invariable, de tal modo, que aun la presion y tirantez producida por una fuerza dada, puede asimilarse al peso de un cuerpo y evaluarse á kilógramos. Y hé aquí como se ejecuta la operacion en el expresado dinamómetro.

61. Ejemplo. — Supóngase que un caballo tira de una cuerda atada á una piedra de molino que quiere trasladarse de un punto á otro, y que cor-

tada la cuerda se fija un cabo en el anillo superior del dinamómetro (que en este caso se coloca con ambos extremos hácia arriba y el ángulo agudo que forman hácia abajo), y el otro en el gancho que se hallaba antes en la parte inferior, segun puede notarse en la figura 12.

Fig. 12.

Como se ve ó puede colegirse, la fuerza de traccion ejercida en este instrumento hará ceder el resorte, y la tirantez de la cuerda será igual al peso del cuerpo, el cual estando suspendido al resorte le haria ceder los mismos grados.

Calcúlase asimismo la fuerza por la importancia de la presion ó tirantez que produce cuando ejerce su accion en un cuerpo que debe quedar siempre en el mismo sitio, y así es tambien como la fuerza que hace caer un cuerpo se mide por el peso del mismo, de la manera que la tirantez de la cuerda marca la fuerza desplegada por el caballo en el precedente ejemplo. Por consecuencia, queda demostrado y establecido que todas las fuerzas pueden representarse por un número determinado de kilógramos.

62. El DINAMÓMETRO inventado recientemente por el célebre é ingenioso Poncelet es preferible á los demás conocidos para hacer experiencias de las fuerzas desplegadas en diversos casos y circunstancias. Representa, como se observa en la figura 13, dos barras planas de acero de cuatro án-

Fig. 13.

gulos, unidas en ambos extremos por medio de dos pernos. En la superior está fijo un fuerte anillo, y en la inferior un gancho; el punto céntrico de ambas barras se separan con relacion á la fuerza

de traccion que ejerce la aplicada al instrumento. De suerte que si la de un kilógramo aumenta la distancia de un milímetro, la de dos kilógramos la aumentará de dos mas y así sucesivamente.

63. BALANZA ROMANA. — Esta romana es sumamente cómoda por cuanto no exije el uso de pesos marcados. Compónese de una barra de hierro dividida en líneas que indican cada una el número de onzas, libras, arrobas y quintales algunas, suspendida por el punto *E*, movible al rededor de este

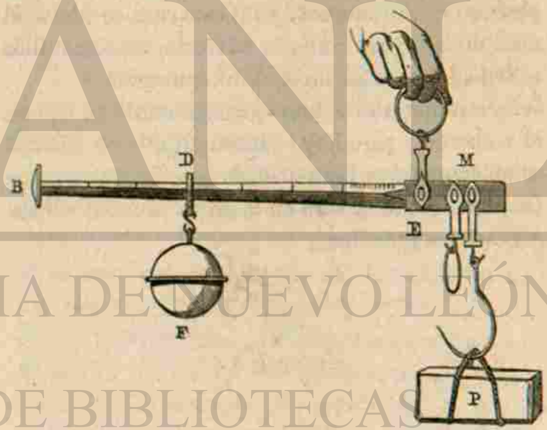

Fig. 14.

punto, segun puede notarse en la figura 14. En el punto *M* se halla dispuesto un gancho para suspender el cuerpo que quiere pesarse, y otro anillo *D* unido á un peso *F* que puede moverse y colocarse en una de las divisiones practicadas desde *M B*. Una vez suspendido el cuerpo *P* en el gancho, se retira el anillo *D* hasta que la romana quede horizontal. De manera que viendo equilibrados el cuerpo *P* y el peso *F*, ya no hay mas que contar la línea que hay desde el punto *E* hasta donde se halla fijo el anillo *D*, y por ellas decir el peso total y exacto del cuerpo que acaba de pesarse.

Esta balanza tiene dos anillos de suspension segun puede verse en la figura 14. El mas inmediato al punto *M*, sirve para pesar los cuerpos mas pesados y voluminosos, y en este caso se vuelve el mecanismo, pues como se advierte, ambos anillos se hallan colocados en sentido contrario.

Esta romana se hallaba generalmente en uso en el comercio, pero hoy se ha sustituido en muchos establecimientos industriales con la balanza de *Quintenz*, como se verá en la parte especial consagrada á las máquinas.

CAPITULO II

Del efecto de una fuerza aplicada á un cuerpo aislado.

I. Axioma, teorema y casos diversos.

65. Axioma. — *El efecto de una fuerza sobre un cuerpo es independiente del movimiento adquirido anteriormente por este cuerpo.*

Efectivamente, cuando una fuerza ejerce su accion sobre un cuerpo en quietud, le comunica cierto movimiento que depende de su intensidad y direccion. Si el cuerpo está en movimiento en el instante en que la fuerza influye sobre él, el movimiento adquirido anteriormente se compone con el que la fuerza le comunicaria si estuviera en quietud, y el movimiento resultante es el movimiento real del cuerpo al instante considerado.

Cierto es que no puede demostrarse este principio *á priori*, pero admitido, se verifica siempre á *posteriori*, pues conduce á consecuencias notables, acreditadas por la experiencia mas inconcusa.

pender el cuerpo que quiere pesarse, y otro anillo *D* unido á un peso *F* que puede moverse y colocarse en una de las divisiones practicadas desde *M B*. Una vez suspendido el cuerpo *P* en el gancho, se retira el anillo *D* hasta que la romana quede horizontal. De manera que viendo equilibrados el cuerpo *P* y el peso *F*, ya no hay mas que contar la línea que hay desde el punto *E* hasta donde se halla fijo el anillo *D*, y por ellas decir el peso total y exacto del cuerpo que acaba de pesarse.

Esta balanza tiene dos anillos de suspension segun puede verse en la figura 14. El mas inmediato al punto *M*, sirve para pesar los cuerpos mas pesados y voluminosos, y en este caso se vuelve el mecanismo, pues como se advierte, ambos anillos se hallan colocados en sentido contrario.

Esta romana se hallaba generalmente en uso en el comercio, pero hoy se ha sustituido en muchos establecimientos industriales con la balanza de *Quintenz*, como se verá en la parte especial consagrada á las máquinas.

CAPITULO II

Del efecto de una fuerza aplicada á un cuerpo aislado.

I. Axioma, teorema y casos diversos.

63. Axioma. — *El efecto de una fuerza sobre un cuerpo es independiente del movimiento adquirido anteriormente por este cuerpo.*

Efectivamente, cuando una fuerza ejerce su accion sobre un cuerpo en quietud, le comunica cierto movimiento que depende de su intensidad y direccion. Si el cuerpo está en movimiento en el instante en que la fuerza influye sobre él, el movimiento adquirido anteriormente se compone con el que la fuerza le comunicaria si estuviera en quietud, y el movimiento resultante es el movimiento real del cuerpo al instante considerado.

Cierto es que no puede demostrarse este principio *á priori*, pero admitido, se verifica siempre á *posteriori*, pues conduce á consecuencias notables, acreditadas por la experiencia mas inconcusa.

66. Si esta fuerza aplicada al cuerpo conservara en todos los instantes del movimiento la misma intensidad y direccion, en este caso dicha fuerza se llamará constante, pues se denominan así todas las que, variando solo de direccion, mantienen inalterable su intensidad. De esta regla puede establecerse el siguiente teorema.

67. Teorema. — *Una fuerza constante que ejerce su accion sobre un cuerpo libre y en quietud, le imprime un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado.*

Esta verdad se demuestra con facilidad. El cuerpo adquiere en el primer instante del tiempo Δt una velocidad elemental Δv, dirigida en el sentido de la misma fuerza. Durante el segundo instante Δt, el cuerpo conserva su velocidad adquirida Δv en virtud de la inercia, y adquiere otra igual en el mismo sentido, segun el axioma 65, visto que la fuerza es constante en grandeza y direccion. Así al fin del tiempo $2\Delta t$ posee el cuerpo una velocidad $2\Delta v$; y siguiendo á este paso al terminar el tercer instante poseerá, en el mismo sentido, la velocidad $3\Delta v$; pues generalmente la velocidad es proporcional al tiempo transcurrido, y dirigida siempre en un mismo sentido. Por consiguiente, el movimiento es rectilíneo y uniformemente acelerado.

68. Casos diversos. — Si el cuerpo estuviera animado de la velocidad inicial v, dirigida en el sentido de la fuerza, esta velocidad se compondria á cada instante con la que le comunicaba la fuerza, y como son ambas del mismo sentido, se aumentaria en términos que la *velocidad* variable del móvil, en el presente caso, creceria de las cantidades proporcionales á los tiempos. Y aun así, como se desprende de esta sencilla enunciacion, el movimiento seria rectilíneo y uniformemente acelerado.

Mas, si la fuerza fuese comunicada en sentido contrario de la velocidad, ejerceria su accion como si el cuerpo sujeto á su influencia estuviera en quietud; pero como la velocidad que le comunica á cada instante es opuesta á la velocidad inicial, el movimiento rectilíneo será desde luego uniformemente retardado. Empero, en todos los casos el movimiento es rectilíneo y uniformemente variado. La aceleracion en este es la velocidad comunicada por la fuerza al fin de la unidad del tiempo.

69. Teorema recíproco. — *Si un cuerpo es animado de un movimiento rectilíneo uniformemente variado, entonces se halla sometido á la accion de una fuerza constante, dirigida siguiendo la recta misma de este movimiento.*

Fácil es demostrar esta verdad con los casos siguientes : 1.° El cuerpo es solicitado por una fuerza; no siendo así, su movimiento seria uniforme segun lo expuesto en el párrafo 50. 2.° Esta fuerza tiene la misma direccion que el movimiento; de lo contrario produciria, en un instante dado, una velocidad dirigida como ella, y la cual componiéndose con la velocidad adquirida, modificaria la direccion de esta última. 3.° Esta fuerza es constante; porque el movimiento siendo uniformemente variado, la velocidad variada de cantidades iguales, en tiempos iguales, y la fuerza que á cada instante Δt produce constantemente la misma variacion de velocidad, no pueden obrar sobre el móvil sino con una intensidad variable, la misma que si estuviera en quietud.

Finalmente, la fuerza es dirigida en el sentido del movimiento, si este es acelerado, y en sentido contrario si es retardado.

Debe notarse, sin embargo, que la accion de una fuerza cualquiera jamás puede determinar un movimiento rectilíneo y uniforme, y si, por cierto, algunos hechos que presenciamos parecen que contradicen este principio, siempre es fácil reconocer en los mismos la resistencia de fuerzas opuestas que se destruyen.

II. Aplicaciones relativas á la gravedad de los cuerpos.

70. Conforme lo acredita la experiencia y queda explicado en el párrafo 27, en el cual tratamos de los movimientos de los cuerpos en el vacío, el movimiento de un cuerpo pesado que cae en el vacío es uniformemente acelerado. Esto no necesita demostracion; pues no hay quien ignore que el propio peso del cuerpo obra con una fuerza constante, fuerza vertical, dirigida de arriba abajo, y cuya velocidad se ha calculado ser $g = 9^{m}\ 8088$.

Ya se sabe que una fuerza ejerce su accion sobre un punto material puesto en movimiento de la misma manera que si estuviera en quietud, y por lo tanto debe admitirse que la velocidad es la misma en el movimiento ascendente como en el descendente, segun queda indicado en el capítulo III de la primera parte, y lo demostraremos prácticamente con el auxilio de la preciosa máquina inventada al efecto por el muy célebre físico británico *Atwood*.

Mas, como para medir las velocidades fuera necesario valerse de las oscilaciones pendulares, parécenos conveniente el hablar antes detalladamente del péndulo y de sus cualidades, á fin que, una vez conocido, podamos emplearlo en los casos que así lo requieran.

III. Del péndulo.

70. Definicion. — Un cuerpo pesado de figura esférica, por lo general suspendido al extremo inferior de un hilo de hierro ó de laton, y fijado el superior verticalmente en un punto, es lo que se llama péndulo. El cuerpo C (figura 15) estará en equilibrio cuando el hilo permanezca en posicion

vertical, pues en este caso su peso queda contrabalanzado por la tension ó tirantez del hilo. Mas, si el cuerpo C varía de posicion y se coloca segun se demuestra en la figura 16, desde este momento se rompe el equilibrio, y el peso del cuerpo se divide en dos fuerzas diferentes, de las cuales una, la que se dirige por donde el hilo se prolonga, será destruida, quedando solo la que sigue perpendicularmente al hilo, por cuanto esta tiende siempre á volver al cuerpo al estado de equilibrio que antes tenia. Así, puesto en movimiento el cuerpo C, este no

Fig. 15.

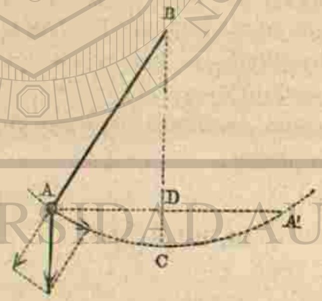

Fig. 16.

saldrá de modo alguno de la línea circular que tiene su centro en B y el radio en $B\ A\ C$ hasta que quede otra vez en equilibrio. Pero mientras no, el cuerpo descenderá con velocidad cada

vez mayor hácia el punto C, donde, tan luego como llega, adquiere la rapidez proporcional á la altura vertical $D\ C$ y sube, otra vez impelido por esta nueva fuerza, al punto A', situado al nivel del de A, del cual desciende inmediatamente para volver al punto A que acababa de dejar, para continuar el mismo movimiento hasta que no recobre el equilibrio. En su marcha, el péndulo redobla sus oscilaciones entre los puntos $A\ B$ y $B\ A'$, de tal suerte que conservaria indefinidamente su movimiento, si ninguna causa viniera á modificarlo y extinguirlo. Estas causas son generalmente la resistencia del aire y las que ofrece siempre el punto de suspension, pues cualquiera que sea el que se imagine y en que se ejecute la expresada suspension, la experiencia ha demostrado que el ángulo $A\ B\ A'$, llamado *amplitud* de las oscilaciones, disminuye gradualmente hasta que al cabo de algun tiempo el péndulo vuelve á su estado de equilibrio.

71. Duracion de la oscilacion. — Llámase *duracion* de una oscilacion los instantes ó segundos que gasta el péndulo en ir de $B\ A$ á $B\ A'$. Pero debe saberse que cuando la amplitud varía, varía tambien la duracion del tiempo; con todo, si la amplitud es pequeña, los cambios que experimenta no influyen de una manera sensible en la duracion de las oscilaciones. Mas para establecer, en mecánica racional, la fórmula que patentize la duracion especialmente de las pequeñas oscilaciones de un

péndulo, es necesario suponer que el hilo no es pesado y que el cuerpo suspendido en él se reduce á un punto material, es decir, es menester suponer un péndulo ideal que se llama *péndulo simple*, cuyo hilo no debe ser mas largo que la letra *l*, que es la fórmula empleada para designar la longitud del mismo; pues no siendo así, y por ténues y ligeros que sean el hilo y el cuerpo de un péndulo, si este excede de la letra *l* ya no será *péndulo simple* ó *ideal*, así como no lo son los que regularizan el movimiento de los relojes que son péndulos compuestos.

En los péndulos compuestos, todas sus moléculas oscilan de la misma manera, y todas las oscilaciones duran el mismo tiempo. Pero si fuera dable el hacer péndulos con estas moléculas separadas de manera que cada una oscilase aisladamente, en este caso al paso que se formarian tantos *péndulos simples* como moléculas tuviese, resultaria que la duracion de las oscilaciones variarian en proporcion de la diversa distancia que medie entre molécula y molécula, la cual se denomina *longitud del péndulo*; la de los simples es equivalente á la de los compuestos respecto á la duracion de las oscilaciones.

72. Observacion. — Cuando un péndulo se forma de una bala y de un hilo terso, la longitud del péndulo simple, que como dejamos dicho es equivalente á la del compuesto, solo dista de una

cantidad imperceptible del punto de suspension al centro de la bala. Por consiguiente, cuando haya uno de servirse de la fórmula que da la duracion de una oscilacion pequeña, como se verá en el siguiente ejemplo, entonces deberá adoptarse esta distancia por la longitud del péndulo segun lo enseña la mecánica racional. De modo que si se desea saber con exactitud la duracion de una oscilacion pendular grande ó pequeña, es necesario contar el número de las que efectúa el péndulo en sesenta segundos y dividir el guarismo 60 por el número de oscilaciones contadas; pero si se determina para mayor precision el valor del péndulo simple equivalente, fácilmente se encontrará, con asombrosa exactitud, el valor que se busca, como puede verse por las siguientes demostraciones.

73. Longitud del péndulo. — Designemos desde luego por l la longitud del péndulo que expresaremos por metros; por π la relacion de la circunferencia de un círculo con su diámetro, que puede ser igual á $3\frac{1}{7}$, ó con mayor exactitud á $\frac{355}{113}$ por g, el guarismo 9,8088, y por t la duracion de una oscilacion pequeña expresada con segundos. Adoptada esta regla nos dará, aplicándola con escrupulosa precision, la duracion de una oscilacion pequeña, segun demuestra la fórmula que á continuacion se expresa:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

74. SIGNIFICACION DE LA FÓRMULA. — Dicha fórmula demuestra que si la longitud del péndulo varía tambien, segun ya lo dejamos expuesto, la duracion de las oscilaciones varía como la raíz cuadrada de esta longitud; de suerte que para tener péndulos cuyas duraciones oscilatorias sean entre sí como los guarismos 1, 2, 3, es indispensable darles longitudes proporcionadas á los números 1, 4, 9.

75. APLICACION DE ESTA LEY. — Esta ley se aplicará del modo siguiente. Tomaranse dos péndulos, cuidando de que el uno sea cuatro veces mas corto que el otro, y se suspenderá el primero detras del segundo en dos puntos situados en la misma línea horizontal. Poniendo en movimiento por un mismo lado y con igual cantidad de fuerza ambos péndulos, tomarán sucesivamente las posiciones relativas que representan las figuras 17, 18, 19, 20.

Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20.

Mientras que el péndulo mas pequeño habrá hecho una oscilacion completa, el grande hará media solamente (fig. 17); y cuando este haya acabado su oscilacion, el otro volverá al punto de salida (fig. 18). Luego que el péndulo mayor habrá hecho media oscilacion en direccion opuesta, el pequeño concluirá la tercera (fig. 19). Ultimamente, cuando aquel haya regresado á su primera posicion, este se hallará igualmente de vuelta, de manera que se encontrarán otra vez como lo estaban en el acto de ponerse en movimiento (fig. 20). Por consecuencia, el péndulo pequeño ejecuta dos oscilaciones mientras que el grande hace una sola.

En segundo lugar, si se adopta la fórmula precedente, se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad y se resuelve luego con relacion á g. Resultará que es

$$g=\frac{\pi l^2}{t^2}$$

lo cual enseñará la manera de calcular el valor de π l y t. Así es como se ha podido encontrar que g es igual á 9 metros 8008 segun queda expresado anteriormente.

76. OBSERVACION. — Además, si se desea saber la longitud de un péndulo de una oscilacion por segundo, podrá adoptarse la misma fórmula, pero bajo la forma expresada á continuacion, porque

de este modo sirve para encontrar la longitud de los de oscilaciones ya conocidas

$$l = \frac{gt^2}{\pi^2};$$

pero en esta operacion deberá substituirse t con 1, g con 9, 8088, π con $\frac{355}{113}$, y se hallará 0 metro 994 por la longitud que se busca. Esta longitud deberá anotarse para servirse de ella cuando la necesidad lo exija. En efecto, en cualquiera circunstancia y en cualquier punto que el hombre se halle, es fácil de hacer un péndulo cuya distancia, desde el punto de suspension al centro del cuerpo ó bola, sea de 0 metro, 994. Las oscilaciones de este péndulo, una vez puesto en movimiento, facilitarán el medio de medir con exactitud la duracion de un fenómeno, siempre que dicha duracion no sea demasiado larga. Si, por ejemplo, se desea saber el número de segundos que una piedra emplea para caer desde el orificio de un pozo hasta su fondo, con el fin de medir la profundidad del mismo, entonces se ejecutará la operacion segun queda expresado. Mas si hubiera necesidad, en ciertos y determinados casos, de un péndulo que produzca cada una de sus oscilaciones en medio segundo, al efecto no hay mas que disminuir la longitud, y dejarla cuatro veces mas pequeña, esto es, de 0 m., 248.

IV. Máquina de Atwood.

77. El distinguido físico británico, con el fin de observar y precisar las leyes de la caida de los cuerpos, ha inventado una máquina que ha dejado atras el plan inclinado de Galileo, de que hablaremos en la parte IV de este MANUAL.

Consiste esta en el conjunto de partes que se notan en la fig. 21 que la representa. Un cordon de seda muy terso pasa por el orificio de la polea sumamente móvil que se ve en la parte superior de la máquina; esta polea mantiene dos cuerpos iguales en peso y magnitud, aunque la identidad en la magnitud no sea rigurosamente necesario, como en efecto no la es. Débese la movilidad extremada de la polea á que su eje descansa sobre la circunferencia de cuatro ruedas colocadas dos delante y dos atras, y como tienen el mismo peso los dos cuerpos ligados á los extremos del cordon de seda, la polea queda inmóvil por causa del equilibrio de las fuerzas que influyen sobre ella. Mas tan luego como se rompe el equilibrio, el cordon, puesto en movimiento, hará dar vueltas á la polea.

78. DEMOSTRACION. — Supongamos, por ejemplo, á fin de comprender la funciones de la máquina y de poder fijar, por consecuencia, nuestras ideas, que los dos cuerpos suspendidos pesan cada uno

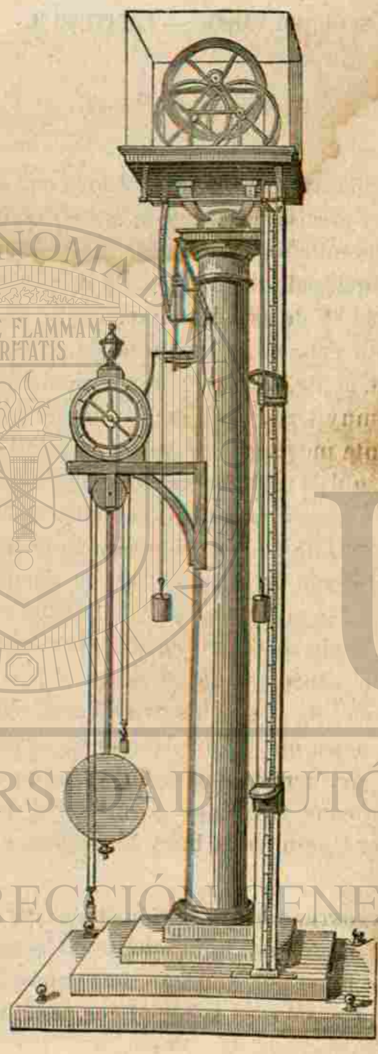

Fig. 21.

cuatro gramos y que el peso añadido para producir el movimiento le sea de uno. Como las fuerzas de los dos primeros cuerpos se neutralizan siempre, ora estén en estado de movimiento, ora en el de equilibrio, resulta que la fuerza de un gramo produce solamente el movimiento de los tres cuerpos que pesan reunidos nueve gramos. En este caso, pues, se ve que el movimiento determinado es el mismo que tendrian los tres cuerpos, cayendo libremente, y que la intensidad se ha hecho nueve veces mas pequeña.

Empero, si los pesos de los dos cuerpos, suspendidos á los extremos del cordon, fueran cada uno de treinta y nueve y medio gramos y que el adicional tuviera siempre uno, se observaria así mismo que el movimiento producido seria igual al de los tres cuerpos cayendo libremente, y que la intensidad de la gravedad se habia hecho ochenta veces mas pequeña.

Para observar mejor las leyes que rigen el movimiento producido por el gramo añadido, ó por el peso adicional, se ha puesto al lado de la línea descrita por uno de los cuerpos que descienden, una regla vertical dividida por centímetros con abrazaderas ó correderas que pueden fijarse en cualesquiera de sus puntos por medio de un tornillo de presion. La representada en la figura 22 tiene un disco destinado á contener el movimiento del cuerpo que desciende. La otra, representada por la figura 23, lleva un anillo para dejar paso al expresado cuerpo y contener á la vez el peso adicional; este presenta en el centro una pequeña abertura esférica y una hendidura lateral por donde se

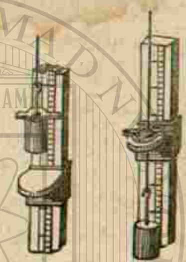

Fig. 22. Fig. 23.

pasa el hilo cuando se quiere ponerlo sobre uno de dichos dos cuerpos, segun lo demuestra la fig. 22, donde el cuerpo y el peso adicional se mueven juntamente. Cuando el cuerpo y el peso adicional se encuentran en el anillo (fig. 23), el cuerpo principal pasa por dentro de él continuando su movimiento, pero el peso adicional se para y descansa por sus extremos sobre los bordes del anillo. Para medir el tiempo, se ha añadido á la máquina (fig. 21) un mecanismo de relojería que recorre una division de la esfera en un segundo y hace un ruido claro y bastante perceptible al principio de cada uno con el fin de que puedan contarse con facilidad los segundos que se gastan durante el ex-

perimento, sin necesidad de mirar el reloj. Es sumamente esencial que los cuerpos suspendidos se pongan en movimiento exactamente cuando principia un segundo, y al efecto esta especie de reloj se ha dispuesto de manera que él mismo determine el principio del movimiento. Hé aquí como : El cuerpo que lleva el peso adicional, y que en su descenso debe seguir por lo largo de la regla dividida por centímetros, se halla sostenido por un resorte ó dedo metálico, el cual, movible al rededor de un eje horizontal, está sujeto debajo del cuerpo por una reunion de barritas de acero ó de metal. Pero tan luego como el minutero llega al punto de la esfera que está verticalmente debajo de su centro, el dedo metálico desciende bruscamente y determina el movimiento del cuerpo. El cero de la regla dividida en centímetros debe estar al nivel de la parte inferior del cuerpo, cuando este descansa sobre el dedo metálico. Sin esta precaucion la observacion no seria cómoda ni enteramente exacta.

V. Manera de servirse de la máquina de Atwood.

78. Colócase la abrazadera del disco plano de modo que su frente superior esté exactamente diez y seis centímetros bajo cero de la regla dividida (fig. 24), para poder así observar las líneas recorridas por los cuerpos durante un segundo, dos,

tres, etc., desde que principaron á moverse, cosa que debe preceder todos los experimentos que quieran hacerse. Despues se gradua ó busca cual debe ser la suma del peso adicional para que el cuerpo sostenido por el dedo metálico recorra, en un segundo, los 20 centímetros marcados. Para que así suceda, es necesario que el cuerpo puesto en movimiento al principio de un segundo choque contra el disco al comenzar el segundo siguiente. Acto continuo se corre la abrazadera hasta colocarla á 80 centímetros bajo cero (fig. 25), y se notará que el cuerpo movido otra vez por el mismo peso adicional gasta dos segundos para llegar desde el punto de salida hasta donde lo para el disco : bájese este aun hasta un metro ochenta centímetros bajo del cero (fig. 26), y se observará igualmente que el cuerpo ha consumido tres segundos para recorrer esta última distancia.

De estos experimentos se infiere : Que en un segundo, 1, el cuerpo recorre $0^{m}, 20$; que en dos segundos, 2, el el cuerpo recorre $0^{m}, 80$; y que en tres segundos, 3, el cuerpo recorre $1^{m}, 80$, esto es, nueve, 9, veces mas.

Así pues, vemos comprobado cuanto queda dicho respecto del movimiento variado, habiendo establecido que los espacios recorridos no son iguales á los tiempos consumidos para recorrerlos, y que el movimiento del cuerpo, cayendo en el vacío, es el mejor ejemplo que puede adoptarse para demostrar esta verdad.

En el expresado capítulo explicamos tambien que el movimiento uniforme es la velocidad inva-

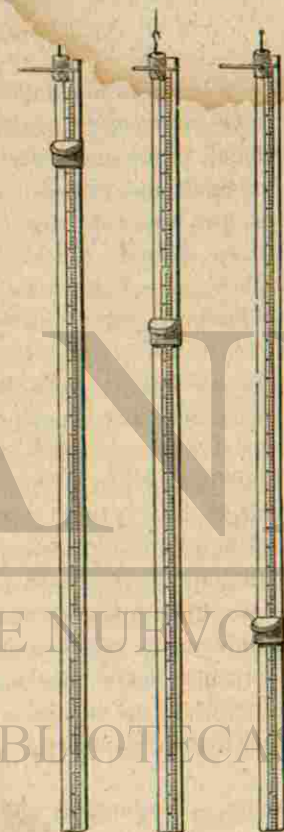

Fig. 24. Fig. 25. Fig. 26.

riable que lleva un cuerpo desde el punto de salida hasta el de parada. La máquina de Atwood nos servirá igualmente para elucidar esta definicion.

79. Ejemplo. — Puestos en movimiento los dos cuerpos sujetos á los extremos del cordon de seda por el peso adicional, veráse que la accion de este dicho peso acelera constantemente el movimiento. Pero si el cuerpo que desciende cargado del peso adicional, encuentra el anillo fijo en la abrazadera, resultará que el peso adicional quedará descansando en sus bordes mientras que el cuerpo lo atravesará para continuar su movimiento, segun lo demuestra la figura 23. Desde el momento pues que el peso adicional abandona la posicion que tenia para mover los dos cuerpos, estos ya no continúan sus movimientos sino en virtud de la velocidad antes adquirida, y por lo tanto, como ambos cuerpos se hacen equilibrio recíprocamente, resulta que el movimiento, de acelerado que era, se hace uniforme; esta uniformidad de movimiento continuaria indefinidamente mientras otra fuerza no intervenga para modificarlo. Mas, si se quiere comprobar la uniformidad del movimiento, habrá de procederse de la manera siguiente.

80. Comprobacion. — Se tomarán los mismos dos cuerpos y peso adicional que sirvieron para hacer la precedente experiencia, se fijará la abrazadera que lleva el anillo para dar paso al cuerpo y contener el peso adicional tan luego como el cuerpo que baja ha recorrido la distancia de 20 centímetros, y se colocará el disco plano de manera que la superficie ó frente superior quede al nivel de 80 centímetros del cero, segun lo demuestra la figura 27. En seguida, poniendo en movimiento dichos cuerpos por medio del dedo metálico antes descrito, se observará que al cabo de un segundo se para el punto adicional, y que transcurridos dos segundos el cuerpo, que ha continuado su descenso, se fija en el disco plano colocado al nivel de 80 centímetros bajo del cero de la regla dividida.

Si aun se desea continuar la experiencia, en este caso se bajará el disco 40 centímetros mas (fig. 28) y se observará asimismo que se gasta un segundo desde el principio del movimiento hasta que el peso adicional se para en el anillo, y que el cuerpo que pasa por dicho anillo consume dos segundos desde este al disco plano. Pero el cuerpo recorre en el primero 40 centímetros y en el segundo 80 despues que desciende por la velocidad adquirida solamente.

81. Manera de calcular la velocidad. — Cuando quiere saberse la velocidad con que baja el cuerpo bajo la accion del peso adicional durante uno ó mas segundos, se colocarán los discos de tal modo, que el peso adicional se pare en los bordes

Fig. 27.

Fig. 28.

del anillo al cabo de un segundo, dos, tres, etc., segun los grados que quieran observarse, y hecho

Fig. 29. Fig. 30.

así, fijar con precision el espacio recorrido en un segundo desde que el movimiento se hizo uniforme.

Mas, para mayor claridad consignaremos á continuacion la manera de hacer la experiencia.

82. Ejemplo. — Colocaráse el anillo á 20 centímetros del cero y el disco á 60 (fig. 29), y puestos los cuerpos en movimiento, el peso adicional se parará al cabo de un segundo en el anillo y el cuerpo al cabo de dos en el disco plano. De este modo se verá que la velocidad adquirida durante un segundo de descenso es de 40 centímetros por segundo. Bajaráse á 80 centímetros y el disco á 160 (fig. 30), y en seguida se notará que el peso adicional se fija en el anillo del disco superior al fin de dos segundos, y que un segundo despues, esto es, en tres segundos, el cuerpo descansará en el disco plano. Por consiguiente, la velocidad adquirida despues de dos segundos de caida es de 80 centímetros por segundo. La proporcion, pues, que se observa entre los tiempos transcurridos y la velocidad adquirida durante los mismos tiempos que llevan los cuerpos, que bajan ya sea de esta ó de otra naturaleza, *se llama movimiento uniformemente acelerado.*

De todo lo expuesto en el presente capítulo se deducen las siguientes leyes.

VI. Leyes que rigen los movimientos.

83. Leyes de estos movimientos. — 1.ª Los espacios recorridos por un cuerpo que cae libremente bajo la accion de la gravedad, y medidos desde el punto de salida hasta el de llegada, son entre sí como los cuadrados de los tiempos invertidos por el cuerpo para recorrerlos.

2.ª La velocidad adquirida en un instante dado por un cuerpo que cae libremente bajo la accion de su gravedad, es proporcional al tiempo gastado desde el principio del movimiento.

3.ª La velocidad de un cuerpo descendiendo ó cayendo de arriba abajo, al cabo de un segundo, es doble del espacio recorrido durante dicho segundo.

Las leyes encontradas con el auxilio de la máquina del célebre físico inglés, segun indicamos antes, podrán determinarse por medio de fórmulas algebráicas que son siempre de la mayor sencillez y de un uso muy frecuente. Mas debemos advertir que ninguna de las fórmulas adoptadas pueden compararse á la del péndulo, cuya exactitud nada deja que desear.

VII. Movimiento de los cuerpos de abajo arriba.

84. Axioma. — Cuando un cuerpo se lanza verticalmente de abajo arriba, sube hasta una elevacion mas ó menos grande segun la fuerza de impulsion que se le comunica. La velocidad imprimida se

disminuye á medida que se eleva, hasta que extinguida enteramente se para el cuerpo, el cual vuelve á bajar siguiendo la misma via; pero en su descenso la velocidad se aumenta progresivamente de manera que cuando pasa por el punto de donde salió antes, recobra la misma velocidad que se le comunicó en el momento en que fué puesto en movimiento. Demostrémoslo con el auxilio de la máquina de Alwood.

85. Ejemplo. — Al efecto, supongamos que la regla dividida de la máquina expresada tiene las dos abrazaderas movibles con un anillo cada una, colocados de tal naturaleza que los cuerpos suspendidos en los cabos del cordon de seda pasen el uno por el anillo superior y el otro por el inferior (fig. 31 y 32). Con el fin de poner en movimiento ambos cuerpos, se colocará el peso adicional sobre el cuerpo de la derecha, que descenderá por la accion de dicho peso adicional (fig 31); á la vez el otro cuerpo sube, y tan luego como el primero entra por su anillo y abandona su peso adicional, el segundo toma otro exactamente igual que se hallaba preparado anticipadamente en el anillo izquierdo (fig. 32). En virtud de la velocidad adquirida, el movimiento continúa; pero no ya como antes, pues mientras que se aceleraba bajo la accion del primer peso adicional, se disminuye cada vez mas bajo la accion del segundo que se encuentra en la misma condicion que un cuerpo lanzado

de bajo arriba. Sin embargo, los dos cuerpos se mueven en el mismo sentido hasta que la resis-

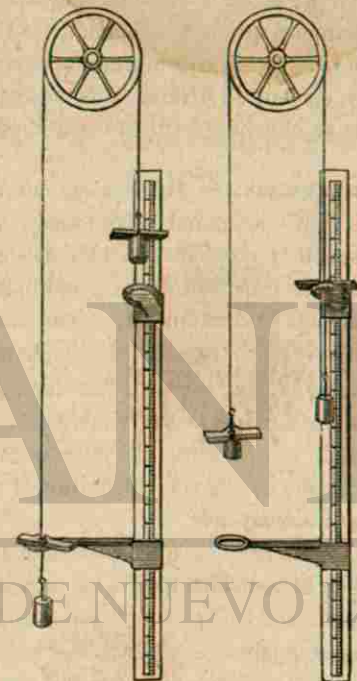

Fig. 31. Fig. 32.

tencia que opone el segundo peso adicional destruya completamente la velocidad. Sucedido esto, los cuerpos, al cabo de algunos momentos de quietud, emprenden nuevo movimiento, pero en sentido inverso. El de la izquierda baja aceleradamente y abandona su peso adicional sobre el anillo que atraviesa; el de la derecha vuelve á tomar al mismo tiempo el que habia abandonado antes, y el movimiento se disminuye nuevamente para volver á moverse en sentido inverso, y así sucesivamente hasta que se concluya ó interrumpa la operacion.

86. OBSERVACION. — Cuando en su descenso queda el peso adicional abandonado sobre su anillo respectivo, posee la velocidad producida por la accion de la gravedad de su propio peso desde que principió su movimiento. Mas, al mismo tiempo el cuerpo de la izquierda sube con igual velocidad, se ampara del otro peso adicional y le comunica instantáneamente la misma velocidad. Este segundo peso adicional se halla pues lanzado de abajo arriba con la velocidad que el primero habia adquirido cayendo.

Notáse que la altura á que se eleva el segundo, en virtud de la velocidad que le ha comunicado la fuerza impulsiva, es igual á la que tenia el primero cuando bajaba á su centro. Así, luego que el segundo peso, que se encuentra en las mismas condiciones que el otro, habrá descendido de su elevacion, tendrá de ariba abajo la misma velocidad que tenia el otro al principiar su movimiento de abajo á arriba.

CAPITULO III

De los efectos de muchas fuerzas dirigidas sobre un cuerpo aislado.

I. Axioma experimental.

87. AXIOMA. — La accion de una fuerza sobre un punto material aislado es independiente de la accion simultánea de otra fuerza sobre el mismo cuerpo.

Esta verdad incontestable se deduce ya de cuanto dejamos explicado en la primera parte, y capítulos primero y segundo de la presente, y deberíamos, por lo tanto, omitir este capítulo y dejar, para cuando tratemos de su aplicacion á las máquinas, las teorías que en él abrazamos. Empero, creyendo que su omision dejaria abierta una laguna que dañaria á la perfecta claridad y al método que hemos adoptado, desenvolvemos el precedente axioma, que se mira muchas veces como una consecuencia del consignado en el párrafo 65. Sin embargo, no puede negarse su notable tud, emprenden nuevo movimiento, pero en sentido inverso. El de la izquierda baja aceleradamente y abandona su peso adicional sobre el anillo que atraviesa; el de la derecha vuelve á tomar al mismo tiempo el que habia abandonado antes, y el movimiento se disminuye nuevamente para volver á moverse en sentido inverso, y así sucesivamente hasta que se concluya ó interrumpa la operacion.

86. Observacion. — Cuando en su descenso queda el peso adicional abandonado sobre su anillo respectivo, posee la velocidad producida por la accion de la gravedad de su propio peso desde que principió su movimiento. Mas, al mismo tiempo el cuerpo de la izquierda sube con igual velocidad, se ampara del otro peso adicional y le comunica instantáneamente la misma velocidad. Este segundo peso adicional se halla pues lanzado de abajo arriba con la velocidad que el primero habia adquirido cayendo.

Notáse que la altura á que se eleva el segundo, en virtud de la velocidad que le ha comunicado la fuerza impulsiva, es igual á la que tenia el primero cuando bajaba á su centro. Así, luego que el segundo peso, que se encuentra en las mismas condiciones que el otro, habrá descendido de su elevacion, tendrá de ariba abajo la misma velocidad que tenia el otro al principiar su movimiento de abajo á arriba.

CAPITULO III

De los efectos de muchas fuerzas dirigidas sobre un cuerpo aislado.

I. Axioma experimental.

87. Axioma. — La accion de una fuerza sobre un punto material aislado es independiente de la accion simultánea de otra fuerza sobre el mismo cuerpo.

Esta verdad incontestable se deduce ya de cuanto dejamos explicado en la primera parte, y capítulos primero y segundo de la presente, y deberíamos, por lo tanto, omitir este capítulo y dejar, para cuando tratemos de su aplicacion á las máquinas, las teorías que en él abrazamos. Empero, creyendo que su omision dejaria abierta una laguna que dañaria á la perfecta claridad y al método que hemos adoptado, desenvolvemos el precedente axioma, que se mira muchas veces como una consecuencia del consignado en el párrafo 65. Sin embargo, no puede negarse su notable diferencia. Efectivamente, mientras que en el primero solo se trata del movimiento adquirido *anteriormente* por el cuerpo ó punto material, en este, por el contrario, se trata de un movimiento modificado *actualmente* por una fuerza; pues aun cuando en aquel hemos admitido la independencia, no es evidente, con todo, que el efecto de una fuerza que ejerce su accion sobre un cuerpo sea independiente de este último estado en que se encuentra por lo tanto el expresado cuerpo.

Nadie, por cierto, puede negar que hay numerosos casos en que muchas fuerzas ejercen su accion simultánea sobre un mismo punto ó cuerpo. Pues bien; si esto es incontestable, tambien lo es que si cada una obrase separadamente produciria cierto efecto, y el cuerpo, en su virtud, recibiria el movimiento que produjera cada impulsion aislada. Es verdad que el movimiento real no se evidencia, como tampoco los de estos movimientos simples; empero, se admite como principio experimental, que cada una de las fuerzas imprime al cuerpo una aceleracion independiente, esto es, que su efecto es el mismo que si obrase sola, segun expresa el axioma que explicamos.

II. Proporcion de las fuerzas constantes y de las aceleraciones.

88. Teorema. — Dos fuerzas constantes aplicadas sucesivamente á un mismo punto material, ya

saliendo del estado de quietud, ó ya estando animado de una velocidad inicial de la misma direccion que la fuerza, son entre sí como las aceleraciones que producen.

En comprobacion, supongamos dos fuerzas constantes F y F' y las aceleraciones que producen γ, γ' y que entre dichas fuerzas existe la medida comun φ, de manera que nos den:

$$F = n\varphi,\ F' = n'\varphi, \text{ y por lo tanto } \frac{F}{F'} = \frac{n}{n'}$$

Supongamos además, en virtud del precedente axioma, que ψ es la aceleracion producida por la fuerza φ; así, aplicando al cuerpo n fuerzas φ en el mismo sentido, producirán n aceleraciones independientes, siendo cada una de ellas igual á ψ, y la aceleracion total $n\psi$. Por consiguiente, la fuerza $n'\varphi = F$ producirá la aceleracion $n'\psi$; todo lo cual dará por resultado

$$\gamma = n\psi,\ \gamma' = n'\psi, \text{ y de aquí } \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{n}{n'}.$$

Concluyendo, por fin, de las igualdades $\frac{F}{F'} = \frac{n}{n'}$ y $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{n}{n'}$ esta tercera fórmula

$$\frac{F}{F'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

Razonamiento que subsistirá siempre por mas pequeña que sea la medida comun φ. Por consecuencia, esta tercera fórmula debe considerarse como la general de todas las operaciones de esta clase.

De lo que precede se deducen las dos proposiciones siguientes.

89. Proposicion. — El cuociente que mide una fuerza constante aplicada á un punto material, dividido por el que mide la aceleracion que le imprime, es un número constante é igual al cuociente del peso de este cuerpo ó punto material dividido por g.

Esto sucede cuando se da el caso en que una de las fuerzas es el peso mismo del cuerpo. En su virtud, supongamos dicho peso p, y g la aceleracion correspondiente, y resultará al tenor del anterior teorema

$$\frac{F}{p}=\frac{\gamma}{g}, \text{ ó } \frac{F}{\gamma}=\frac{p}{g}.$$

90. Segunda proposicion. — *La relacion del peso del punto material ó del cuerpo con la aceleracion correspondiente, es un número constante para todos los lugares de la tierra.*

91. Demostracion. — Si se transporta el mismo cuerpo á otro lugar cualquiera del globo en que el peso es p' y la aceleracion g', nos dará por lo tanto la siguiente fórmula :

$$\frac{p}{g}=\frac{p'}{g'}.$$

CAPITULO IV

De la masa de los cuerpos.

I. Demostracion de la masa.

92. Masa. — Demostrando la proposicion del párrafo 90 se ha dicho que la relacion $\frac{p}{g}$ es constante para un mismo punto material, cualesquiera que sean los lugares donde se haga la observacion. Pues bien, esta relacion es lo que se llama masa de un punto material. La masa es una cualidad inherente á un punto material, la cual, designándola con m, nos dará segun el párrafo 89

$$F=m\gamma, \quad p=mg,$$

pudiendo decirse de aquí, que el cuociente del peso de un cuerpo por el número g es lo que se llama la masa de este mismo cuerpo, y que la fuerza capaz de dar cierta aceleracion á un cuerpo, ejerciendo su accion sobre él durante un segundo ó un tiempo dado, es igual al producto de la masa del cuerpo por la velocidad que debe comunicarle.

De ahí resulta que cuanto mas grande es la masa de un cuerpo, tanto mayor debe ser la fuerza que deberá comunicarle una velocidad dada, y pequeña la velocidad que le comunicará esta fuerza dada.

Tambien puede notarse que la significacion de la palabra *masa*, en mecánica, es la misma que la que se le da comunmente, pues se dice que un cuerpo es mas ó menos masivo segun que su mole es mas ó menos grande, como se verá en el transcurso de este capítulo.

93. MASA DE UN CUERPO. — Dos puntos materiales tienen la *misma masa*, cuando las fuerzas que los solicitan son proporcionales al movimiento que imprimen. De modo que si se reunen estos dos puntos con el pensamiento se obtiene una *masa doble*. Ahora, pues, será fácil el concebir que dos masas pueden tener entre sí ciertas relaciones dadas, como efectivamente la tienen.

Así, la *masa* de un cuerpo es la suma de las masas de los puntos materiales que la componen, y designando los pesos de estos con $p\ p'\ p''...$, la *masa* M del cuerpo será

$$M=\frac{p}{g}+\frac{p'}{g}+\frac{p''}{g}...=\frac{p+p'+p''+...}{g}$$

ó bien designando con P el *peso* del cuerpo, tendremos

$$M=\frac{P}{g},\ \text{resultando así}\ P=Mg.$$

Hé ahí como la *masa* del cuerpo se obtiene, esto es, dividiendo la cantidad que designa su peso, evaluado á kilógramos por la letra $g=9^{m}\ 8088$.

94. OBSERVACION. — Empero, como g es constante en un mismo lugar, se ve por la fórmula precedente que en estos casos la masa de los cuerpos son proporcionales al peso de los mismos. Por lo tanto, la nocion de la masa está unida á la cantidad de la materia que un cuerpo contiene.

Mas, como la masa de un cuerpo no varía cuando se transporta de un lugar á otro, se notará *que los pesos de este cuerpo en diversos lugares son proporcionales á las aceleraciones correspondientes*.

Tomado el kilógramo por unidad de la fuerza, la masa en su virtud será $M=\frac{1}{9^{m},8088}=0,102$, y por consecuencia su peso en otro lugar donde la velocidad es g será en kilógramos $0^{m},\ 102\ g'$.

La masa de un cuerpo es una magnitud *sui generis* que no puede compararse con otra alguna, porque es el *cuociente de una fuerza por una aceleracion*; aquella evaluada en kilógramos y esta en metros.

La densidad de un cuerpo homogéneo es la masa comprendida en la unidad de su volúmen. Pues bien, designando la densidad con ρ y el volúmen con V se obtendrá

$$M=V\rho,\ \text{y por lo tanto}\ P=V\rho g.$$

II. Relacion entre las fuerzas, las masas y las aceleraciones.

95. La aceleracion general $F=m\gamma$ demuestra que:

Las fuerzas constantes son proporcionales á las velocidades que imprimen á una misma masa ó á las masas á que imprimen la misma aceleracion.

Y como ya tenemos $m=\frac{p}{g}$, resulta luego:

$$F=\frac{p}{g}\gamma.$$

Esta relacion determina la fuerza necesaria que ha de imprimir á un cuerpo cuyo peso está ya conocido, una aceleracion dada, ó, por el contrario, la aceleracion que la imprime una fuerza dada.

96. Relacion entre las fuerzas variables, las masas y las aceleraciones. — La relacion $F=m\gamma$ resulta de la definicion dada á la masa en el párrafo 92, cuando la fuerza F es constante y el movimiento rectilíneo. Pero se aplica á las fuerzas variables y á un movimiento cualquiera, circunstancia que es necesario establecer como regla general, porque es una de las mas importantes de la mecánica. Al efecto supongamos los dos casos siguientes:

1.° *Cuando la fuerza F es variable y el movimiento rectilíneo.* Supongamos que γ es la aceleracion en la época t; sábese que ambas siguen la misma recta que recorre el cuerpo. Durante un pequeño intérvalo de tiempo, que comprenderá el instante imaginado, la aceleracion varía de una manera continua. Así suponiendo que A y A_1 son su mayor y menor valor, se obtendrá

$$A<\gamma<A_1,$$

y por lo mismo, $mA<m\gamma<mA$.

Por consiguiente, comprendida la fuerza F entre las fuerzas constantes mA y mA_1, resulta que F y el producto $m\gamma$ se hallan comprendidos en los mismos límites; pero estos límites serán iguales si se reduce el instante de tiempo al instante matemático supuesto y calculado, por cuya razon nos dará la proporcion establecida:

$$F=m\gamma.$$

Se obtendria el mismo resultado, considerando la fuerza F constante durante un tiempo infinitamente pequeño.

2.° *Cuando la fuerza F es una fuerza cualquiera y el movimiento curvilíneo.*

El movimiento del cuerpo en una época cualquiera t, durante un tiempo infinitamente pequeño, puede considerarse como resultado de un movimiento debido á la velocidad adquirida, y del movimiento producido por la accion de la fuerza F

durante dicho tiempo. De aquí se deduce que la velocidad del movimiento es el resultado de las velocidades de estos movimientos compuestos. Además, el movimiento debido á la velocidad adquirida siendo enteramente uniforme su aceleracion será nula. Luego siendo esto así, la aceleracion resultante no es otra que la de γ debida á la fuerza F. Pero esta fuerza puede ser considerada como uniforme durante el elemento de tiempo imaginado, y por consiguiente igual á $m\gamma$, y dirigida en el mismo sentido que γ.

Así, debe establecerse por principio general que, en todo movimiento rectilíneo ó curvilíneo, la fuerza es igual al producto de la masa por la velocidad y dirigida en sentido de esta misma velocidad.

III. De la fuerza de inercia.

La fuerza de inercia se demuestra perfectamente con el principio de igualdad de la accion y de la reaccion antes establecida. En efecto, supongamos un cuerpo sometido á la accion de una fuerza constante por medio de un resorte cuya masa sea insignificante. Este resorte que, segun lo demuestra la experiencia, se estira de una manera invariable, se halla solicitado por dos fuerzas iguales y contrarias. La aplicada al extremo del resorte, es la fuerza que produce la aceleracion ; la otra, aplicada al extremo unido al cuerpo, es la reaccion del

cuerpo. Por consecuencia, en este ejemplo la accion es igual y contraria á la reaccion. Este principio puede aplicarse á un caso en el que la fuerza sea variable, por cuanto una fuerza variable puede ser considerada como constante durante un tiempo infinitamente pequeño.

97. Fuerza de inercia. — Ahora bien; esta reaccion del cuerpo se llama *fuerza de inercia*. Para comprender perfectamente el sentido de esta expresion, es necesario observar que cuando queremos poner un cuerpo en movimiento, experimentamos cierta resistencia que nos revela la inercia de la materia. Esta reaccion la llamamos *fuerza de inercia*. Pero se ha extendido naturalmente esta nocion á los casos en que la accion se ejerce sobre el cuerpo sin agente visible, porque una experiencia acreditada ha hecho ver siempre que los fenómenos observados guardan la mas perfecta conformidad con los cálculos fundados sobre esta hipótesis. No de otro modo, pues la atraccion del sol sobre la tierra se halla acompañada de otra atraccion igual y contraria de la tierra sobre el sol. La primera es la accion que se ejerce sobre la tierra, y la segunda la reaccion ó fuerza de inercia de la tierra.

De lo expuesto se concibe que la fuerza de inercia es igual y directamente opuesta á la fuerza motriz F, que su expresion será $-m\gamma$; y que descomponiendo la fuerza F en fuerzas dirigidas siguiendo ejes fijos ó en fuerzas tangencial y normal, se podrá descomponer así mismo la fuerza de inercia, pues el proceder á la operacion son enteramente los mismos; pero para verificarlo debe tenerse presente que sus componentes serán siempre iguales y opuestas á los de la fuerza F.

Para evaluar á kilógramos la fuerza de inercia, basta, si no se quiere adoptar otra fórmula que la reemplace, con sustituir la masa m del móvil por $\frac{p}{g}$ lo cual dará $-p\frac{\gamma}{g}$. El peso p y el número g, siendo perfectamente conocidos, la fórmula nos facilitará la cantidad de la fuerza tan luego como se reemplace la velocidad γ por su propio valor.

Los efectos de las fuerzas de inercia los iremos tocando y reconociendo en las diversas aplicaciones que haremos en el curso de este MANUAL.

CAPITULO V

De la introduccion de la masa en las ecuaciones del movimiento producido por una fuerza constante.

98. NUEVA FORMA DE ECUACIONES DEL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO. — La fuerza es *constante* siempre que conserva en todos y en cada uno de los instantes del movimiento la misma intensidad y direccion. Comunmente se da este nombre á las fuerzas cuya direccion solamente varía, mientras que su intensidad permanece invariable siempre.

Pues bien; supongamos ahora que un punto material de la masa m está sometido á la accion de la gravedad ó á la de una fuerza constante cualquiera F que le imprime un movimiento rectilíneo uniformemente variado. Las ecuaciones de este movimiento serán:

$$v-v_o=\gamma t,\ x-x_o t+\frac{1}{2}\gamma t^2,\ F=m\gamma.$$

Luego se saca de la última $\gamma=\frac{F}{m}$, y sustituyendo este valor á los otros dos, antes enunciados, tendremos:

$$v - v_0 = \frac{F}{m} t, \quad x - x_0 = -v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

En estas ecuaciones, F debe tener el valor de γ empleado para designar la variacion de la velocidad en un segundo.

99. Teorema. — *Cantidad del movimiento, impulsion.* Téngase presente para comprender las precedentes ecuaciones, que v_0 representa la velocidad inicial, esto es, la del cuerpo al orígen del tiempo, v la velocidad al fin del tiempo t, y por fin γ la variacion del movimiento en un segundo, segun queda indicado.

De la ecuacion $v - v_0 = \frac{F}{m} t$, puede sacarse la cantidad del movimiento

$$mv - mv_0 = Ft.$$

De manera que el producto mv de la masa del móvil por su velocidad en la t se denomina *cantidad* de movimiento. El producto Ft de la fuerza por el tiempo durante el cual ha ejercido su accion se llama frecuentemente *impulsion* de la fuerza durante dicho tiempo. De suerte que la fórmula

$$mv - mv_0 = Ft,$$

demostrará de una manera evidente que cuando una fuerza constante obra durante un tiempo t sobre un punto material en quietud ó animado por

la accion de una velocidad inicial de la misma direccion que la fuerza, la variacion de la cantidad del movimiento es igual por la importancia y por el signo á la impulsion de la fuerza durante este tiempo.

Para mayor inteligencia de lo expuesto, supongamos aun otro punto de masa m' solicitado por otra fuerza F' durante el mismo tiempo t' y entonces tendremos

$$m'v' - m'v_0' = F't$$

concluyendo $\frac{mv - mv_0}{mv' - mv_0'} = \frac{F}{F'}$

De este modo, las cantidades adquiridas del movimiento durante el mismo tiempo por dos puntos materiales diferentes son proporcionales á las fuerzas constantes que han podido producirlas.

Si en la fórmula establecida anteriormente para demostrar la *cantidad del movimiento* se supone $v = o$, se tendrá por resultado

$$mv_0 = -Ft.$$

Así, la cantidad de un movimiento poseido por un punto material es igual, tanto en la magnitud como en el signo, á la impulsion que ha recibido desde el momento en que principió su movimiento.

Además, si en la fórmula $mv - mv_0 = Ft$ se pone $v = o$, se tendrá:

$$mv_0 = -Ft.$$

En este caso la cantidad del movimiento poseido por un punto material es igual y de signo contrario á la impulsion necesaria para volverlo al estado de quietud.

100. Fuerza viva, trabajo. — Para encontrar la *fuerza viva* y el *trabajo*, es necesario que eliminemos ahora t de entre las ecuaciones

$$v - v_0 = \frac{F}{m} t; \quad x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2,$$

y para realizarlo con sencillez y precision, elevemos los dos miembros de esta primera ecuacion á cuadrado, despues de haber hecho pasar v_0 en el segundo; en seguida multipliquemos los dos miembros de la segunda ecuacion $x - x_0$, etc., por $2\frac{F}{m}$ y resultará :

$$v^2 = v_0^2 + 2v_0 t \frac{F}{m} + \frac{F^2}{m^2} t^2$$

$$2\frac{F}{m}(x - x_0) = 2v_0 t \frac{F}{m} + \frac{F^2}{m^2} t^2$$

y por consiguiente $v^2 = v_0^2 + 2\frac{F}{m}(x - x_0)$,

y por lo tanto la fórmula ó ecuacion

$$\frac{mv}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F(x - x_0).$$

Así, pues, el producto mv^2 de la masa de un punto material ó de un cuerpo por el cuadrado de su velocidad en la época t, ha recibido el nombre de *fuerza viva*, y el producto $F(x - x_0)$ de la fuerza

por el espacio que le ha hecho recorrer se llama *trabajo* de esta fuerza.

De la fórmula antecedente se desprende, que luego que una fuerza constante ejerce su accion durante cierto tiempo sobre un punto material estando este en quietud ó animado de una velocidad inicial de la misma direccion que la fuerza, la media variacion de la fuerza viva es igual por la magnitud y por el signo al *trabajo* de la fuerza durante el mismo tiempo.

Por consiguiente, si se opera sucesivamente en la fórmula $v_0 = o$, $v = o$ se obtendrá :

$$\frac{mv^2}{2} = F(x - x_0) \quad \frac{mv_0^2}{2} = -F(x - x_0);$$

y por lo tanto, la media fuerza viva poseida por un punto material es igual, así en la magnitud como en el signo, al *trabajo* que ha recibido desde que principió el movimiento : es así mismo igual y de signo contrario al *trabajo* necesario para reducirlo al estado de quietud.

Debe observarse que la palabra fuerza, en el precedente caso ó teorema, no tiene exactamente la significacion ordinaria. Antes la habíamos empleado para indicar un esfuerzo, una presion ó tirantez expresada por kilógramos. Ahora, por el contrario, el nombre de *fuerza viva* lo hemos aplicado al producto complexo de una fuerza por un espacio recorrido. Por lo tanto, no puede uno menos de lamentar que se haya adoptado esta palabra para representar nociones tan distintas.

Por otra parte, no es la cantidad entera mv^2 sino la mitad, la que entra en la enunciacion de los teoremas mas importantes de la mecánica, y por la misma razon es bastante desagradable de no tener mas que una palabra para representar el doble de una cantidad que se encuentra á cada instante. Mas valiera dar este nombre á la expresion $\frac{mv^2}{2}$; pero renunciamos á pesar nuestro á este deseo por conformarnos con el uso establecido generalmente.

101. Aplicacion de las reglas precedentes. — Apliquemos las reglas que anteceden á los siguientes casos:

1.° Si un ternero cuyo peso es p, cae sobre una estaca terminada en punta de la altura h, su velocidad al fin de la caida será v, operando para obtener este resultado en la fórmula que antecede

$$\frac{mv^2}{2} = F\,(x - x_0),$$

nos dará $ph = \frac{mv^2}{2}$:

Es así que $p = mg$,
luego $v^2 = 2gh$.

2.° Una bala del peso p sale del fusil con la velocidad dada v: admitiendo que la fuerza que la ha lanzado ha permanecido constante desde que se puso en movimiento, las ecuaciones

$$mv = Ft;\ \frac{mv^2}{2} = F\,(x - x_0)$$

se convertirán en

$$\frac{p}{g}\,v = Ft,\ \frac{pv^2}{2g} = Fx,$$

y nos dan la intensidad de la fuerza cuando se conoce ora el tiempo de la accion, ora la longitud del cañon.

Para los fusiles de municion ordinarios se tiene comunmente, $v = 500^m$ $p = 0^k\,0258$ y la longitud del cañon $x = 1^m,10$, resultando $F = 299^k$.

CAPITULO VI

De la composicion y descomposicion de las fuerzas.

102. RESULTANTE DE MUCHAS FUERZAS. — Un cuerpo material puede estar sometido simultáneamente á la accion de muchas fuerzas diferentes en magnitud y en direccion; pero no obstante, el cuerpo no toma ni puede tomar mas que un movimiento único y determinado. Este movimiento puede producirse aplicando, en su misma direccion, una fuerza proporcionada al punto material; y haciéndolo así se evidenciará *que todas estas fuerzas diferentes pueden reemplazarse por una sola.*

Una fuerza que produzca el mismo efecto que producen otras muchas, se llama *resultante*; y las fuerzas dadas, los *componentes.*

Por consiguiente, *las fuerzas* (cualquiera que sea su número) *aplicadas á un mismo punto material, tienen siempre una resultante.*

Fácilmente se concibe esta verdad. Supongamos que diez hombres arrastran un cuerpo, y que la fuerza de estos diez hombres puede reemplazarse por la de un solo caballo. Pues bien; la accion de la fuerza del caballo que sustituye las de los diez hombres, es la *resultante* en el presente ejemplo, y las de estos, *componente*.

Finalmente, la composicion de las fuerzas tiene por objeto el determinar la *resultante* cuando se conocen las *componentes*.

De lo expuesto se deduce el principio fundamental siguiente, que nos servirá para hacer un paralelógramo de las fuerzas.

103. TEOREMA. — *Dos fuerzas aplicadas á un mismo punto material y representadas, en magnitud y direccion, por dos líneas rectas trazadas desde este dicho punto, tienen una resultante única representada en magnitud y direccion por la de las diagonales del paralelógramo formado sobre las rectas que salen del expresado punto.*

Para demostrarlo, consideremos desde luego dos fuerzas constantes F, F_1 (figura 33) que obran si-

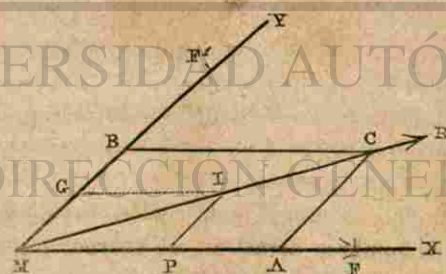

Fig. 33.

multáneamente sobre el punto M quieto en las direcciones MX, MY, y representadas en magnitud por las líneas rectas MA, MB, formemos el paralelógramo $MACB$. Supongamos ahora γ é γ_1 las velocidades constantes que imprimirian separadamente al cuerpo. En virtud de la primera, el punto material recorreria sobre MX, en el tiempo t, un espacio $MP=\frac{1}{2}\gamma t^2$; en virtud de la segunda, recorreria sobre MY, en el mismo tiempo, un espacio $MG=PI=\frac{1}{2}\gamma_1 t^2$.

Como se ve, existe una independencia mutua entre los efectos simultáneos de las dos fuerzas segun el principio establecido en el precedente capítulo. Así, las ecuaciones del movimiento serán

$$X=\frac{1}{2}\gamma t^2,\ Y=\frac{1}{2}\gamma_1 t^2,$$

y la de la trayectoria que se obtiene eliminando t

$$Y=\frac{\gamma_1}{\gamma}X.$$

Como esta ecuacion es del primer grado, el movimiento es rectilíneo.

Luego, puesto que se obtiene

$$\frac{Y}{X}=\frac{\gamma_1}{\gamma}=\frac{F_1}{F}=\frac{AC}{MA}$$

se evidencia que, reuniendo MI, los triángulos MPI, MAC son semejantes, y que el punto I está sobre MC. Luego el movimiento está dirigido siguiendo la diagonal AC.

Además $\frac{MI}{MP}=\frac{MC}{MA}$, ó $MI=\frac{MC}{MA}\cdot MP$,

$$MI=\frac{1}{2}\gamma\cdot\frac{MC}{MA}t^2.$$

En su vista, el movimiento es uniformemente acelerado, y la fuerza que lo produce constante.

Finalmente, la velocidad de este movimiento es $\gamma\frac{MC}{MA}$, y designándolo por Γ, se tiene la ecuacion

$$\frac{\Gamma}{\gamma}=\frac{MC}{MA}.$$

Así, MA es la fuerza que produce la velocidad γ; luego la que produce la velocidad Γ está representada por MC.

Obsérvese que si las dos fuerzas F, F_1 son variables en magnitud y en direccion, por eso no es menos cierto que, en un momento dado, cada una de ellas tiene un valor y una direccion perfectamente determinados, y que sus *variaciones ulteriores* no podrian tener influencia alguna en su *actual* composicion. Por lo tanto, bajo de este punto de vista pueden considerarse como variables; de este modo el principio establecido quedará demostrado en todas sus partes.

Sin embargo, no puede afirmarse que el movimiento es uniformemente acelerado ni que tiene lugar siguiendo la diagonal del paralelógramo.

Si el cuerpo tuviera una velocidad inicial, esta no ejerceria ninguna influencia sobre el efecto de las fuerzas. Por consiguiente, el principio establecido subsiste aun en este caso.

104. Descomposicion de una fuerza en dos. — Ahora descompondremos *una en dos fuerzas*. Resulta, pues, de lo que acabamos de demostrar, que se puede descomponer una fuerza, R, (figura 33) en otras dos que tengan direcciones dadas MX y MY. Podrá además descomponerse en otras dos con una magnitud MA y una direccion dadas MX. En fin, podrá darse la magnitud y la direccion de las dos componentes con la magnitud y la direccion de las resultantes. Al efecto, bastará formar para cada caso el triángulo MAC con las circunstancias necesarias para ejecutar la operacion cual se requiere.

Debe tenerse presente además, que dos fuerzas, cualesquiera que sean, se componen como dos movimientos, ó como dos velocidades, ó como dos aceleraciones; y en su virtud, lo mismo puede hacerse respecto de un número de mas ó menos fuerzas aplicadas simultáneamente á un punto material. Así, y sin que sea necesario repetir las razones aducidas anteriormente en prueba de esta verdad, se comprenderá que las reglas del paralelipípedo ó del polígono de las velocidades ó aceleraciones y sus recíprocas, subsisten con relacion á las fuerzas, como lo veremos en el siguiente paralelipípedo.

105. Paralelipípedo de las fuerzas. — *Tres fuerzas aplicadas á un mismo cuerpo ó punto material, y representadas, en magnitud y direccion, por la diagonal del paralelipípedo construido sobre las tres rectas precedentes.*

De aquí resulta la descomposicion de una fuerza en otras tres.

106. Polígono de las fuerzas. — No es menos evidente el principio relativo *al polígono de las fuerzas. Si muchas fuerzas son aplicadas á un mismo punto material y que se construye una línea poligonal saliendo de este punto, cuyos lados consecutivos representen estas fuerzas en magnitud y direccion, la recta que forma el polígono representa su resultante en magnitud y direccion.*

Por consiguiente, *si todas las fuerzas son dirigidas sobre una misma recta, la resultante es la suma algébrica de las mismas.*

107. Relaciones analíticas. — Ahora, pues, podemos establecer, con la aplicacion de lo expuesto, las relaciones analíticas que existen *entre las fuerzas y sus resultados.* Las fórmulas que evidencian estas relaciones entre las velocidades ó aceleraciones componentes y la resultante, subsisten igualmente respecto de las fuerzas. Bajo de este supuesto, designando las fuerzas con F, F', F'', etc.,

y la resultante con R, obtendremos este caso de dos fuerzas

$$\frac{F}{\operatorname{sen}(F', R)} = \frac{F'}{\operatorname{sen}(F, R)} = \frac{R}{\operatorname{sen}(F, F)},$$
$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2\,F, F' \cos(F, F');$$

caso particular de dos fuerzas rectangulares :

$$F = R \cos(F, R),\ F' = R \cos(F'\ R),$$
$$R^2 = F^2 + F'^2;$$

caso de tres fuerzas rectangulares

$$F = R\cos(F, R),\ F' = R\cos(F', R),\ F'' = R\cos(F'', R),$$
$$R^2 = F^2 + F'^2 + F''^2.$$

Resulta, de lo que precede, que cada fuerza es la proyeccion de la resultante sobre la direccion de la fuerza.

Caso de un número cualquiera de fuerzas : $a, b, c, a', b', c', \ldots\ A, B, C$, designan los ángulos de las fuerzas $F, F', \ldots\ R$, con tres ejes rectangulares fijos pasando por el punto de aplicacion nos dará :

$$R \cos A = \Sigma F (\cos a),\ R \cos B = (\Sigma F \cos b),$$
$$R \cos C = \Sigma F \cos c.$$
$$R^2 = (\Sigma F \cos a)^2 + (\Sigma F \cos b^2 + \Sigma F \cos c.$$

Caso particular donde todas las fuerzas están en un mismo plano : si designamos este con XY resultará :

$$R \cos A = \Sigma F \cos a,\ R \operatorname{sen} A = \Sigma F \operatorname{sen} a,$$
$$R^2 = (\Sigma F \cos a)^2 + (\Sigma F \operatorname{sen} a)^2.$$

108. — Demostrado ya las relaciones analíticas entre las fuerzas y sus resultantes, terminaremos este capítulo con las *componentes, tangencial y normal de la fuerza en un movimiento cualquiera*, primero y en seguida respecto de las de la *fuerza de inercia*.

Ya dejamos establecido en otro capítulo que la aceleracion, en un movimiento cualquiera, designada con γ se descompone en dos aceleraciones; la una es tangencial é igual al $lim. \frac{v_1 - v}{\Delta t}$, y la otra normal é igual á $\frac{v^2}{\rho}$. Y supuesto que las fuerzas se componen como las aceleraciones, resulta que la fuerza $m\gamma$, segun dijimos cuando tratamos de las relaciones de las fuerzas, masas y aceleraciones, tiene por componente tangencial $m \; lim. \frac{v_1 - v}{\Delta t}$, y por componente centripeta $\frac{mv^2}{\rho}$.

109. — Tambien expusimos hablando de la relacion que existe entre las fuerzas variables, masas y aceleraciones, que la fuerza de inercia es igual y opuesta á la fuerza motriz: aquella, pues, tiene por componente tangencial $m. \; lim. \frac{v^1 - v}{\Delta t}$, y por componente normal $\frac{mv^2}{\rho}$. Esta última, dirigida por el lado opuesto al centro, se llama *fuerza centrífuga*.

110. Teorema. — Finalmente, puesto que comunmente se componen y descomponen las fuerzas como las velocidades y aceleraciones, resultará,

que si la velocidad v de un móvil, de masa m, tiene por componentes paralelas á tres ejes v_x, v_y, v_z, y si la aceleracion γ tiene por componentes γ_x, γ_y, γ_z, la fuerza $F = m\gamma$, que solicita al móvil, tendrá por componentes $m\gamma_x$, $m\gamma_y$, $m\gamma_z$. Así, *la proyeccion del punto material sobre un eje se mueve como si estuviera animado, á cada instante, de una velocidad igual á la proyeccion de la velocidad, y solicitado por una fuerza igual á la proyeccion de la fuerza sobre el mismo eje.* Tal es el teorema que deberá tenerse presente en todos los casos en que se quiera proceder á la composicion y descomposicion de las fuerzas, etc.

CAPITULO VII

Del equilibrio de las fuerzas aplicadas á un mismo punto.

111. Definicion general del equilibrio. — Cuando un cuerpo está sometido á la accion de muchas fuerzas, y se halla sin embargo en las mismas condiciones que si estas fuerzas no influyesen sobre él, entonces dicho cuerpo está en *equilibrio*. Por consiguiente, este puede definirse así :

Muchas fuerzas aplicadas á un sistema cualquiera se hacen equilibrio, en un instante dado, cuando el estado actual del sistema (de quietud ó movimiento) no recibe influencia por la presencia de estas fuerzas.

Si el sistema está en quietud, el efecto de las fuerzas no debe turbar este estado, y en tal caso el *equilibrio* se llama *estático*. Si el sistema está en movimiento, las fuerzas no deben modificarlo, y entonces el *equilibrio* se llamará *dinámico*.

112. Teorema. — Condiciones del equilibrio.

1.ª Supuesto esto, veamos ahora *la condicion del equilibrio de las fuerzas aplicadas á un mismo punto.* Luego que muchas fuerzas ejercen su accion sobre un punto material enteramente libre, es menester y basta, en efecto, para obtener el equilibrio, que su resultante sea nula. Así es que si el equilibrio existe, el punto material es abandonado á su propia inercia en virtud de las leyes establecidas en el capítulo IV; por consecuencia, ó el cuerpo está en quietud, ó de lo contrario su movimiento es rectilíneo y uniforme. Queda, pues, en el mismo estado en que se hallaba antes de verse sometido á la accion de ninguna fuerza, segun dijimos en el capítulo VI hablando de la composicion y descomposicion de las fuerzas. Por la misma razon, ó si se llena recíprocamente dicha condicion, tambien será nulo el efecto de las fuerzas, y por lo tanto se harán equilibrio. Así, aplicando á muchas fuerzas la regla del polígono, *es necesario y basta para el equilibrio, que el polígono se cierre por sí mismo cuando se traza el último costado.* Esta condicion, como se observa, es independiente del estado de quietud ó de movimiento del punto material.

113. 2.ª CONDICION. — Mas no es esto solo lo que debe estudiarse. Hay que observar además, que tan luego como muchas fuerzas se hacen equilibrio, *cada una de ellas es igual y directamente opuesta á la resultante de todas las demás*, porque la fuerza

que se considera separadamente, destruye el efecto que tiende á producir esta resultante.

Por consecuencia, tres fuerzas concurrentes, en equilibrio, *están necesariamente en el mismo plan*; y tres fuerzas concurrentes situadas fuera del mismo plan, *no pueden hacerse equilibrio* al menos que cada una de ellas no sea *nula separadamente.*

Las precedentes observaciones nos conducen á hacer esta otra exposicion relativa á la naturaleza del equilibrio.

114. 3.ª Y ULTIMA CONDICION. — Efectivamente cualquiera que sea el número de las fuerzas aplicadas á un cuerpo, siempre puede descomponerse cada una de ellas en tres fuerzas dirigidas, siguiendo tres ejes que pasan por un punto y que sin embargo no están situadas, en el mismo plano (en consecuencia de las reglas establecidas en dicho capítulo VI tratando del paralelógramo de las fuerzas), y acto continuo añadir algébricamente las componentes dirigidas segun el mismo eje y reducir de este mismo modo todas las fuerzas dadas. Estas tres resultantes son, pues, las componentes de la resultante general. Luego, para que esta sea nula, es menester y basta con que las tres fuerzas resultantes parciales lo sean tambien separadamente.

Así, para que *muchas fuerzas aplicadas á un mismo punto se hagan equilibrio, es necesario y basta con que, descomponiendo cada una de ellas siguiendo tres ejes* *cualesquiera que no estén situados en el mismo plano, las sumas algébricas de las componentes dirigidas siguiendo cada eje sean nulas separadamente.*

115. Ecuaciones del equilibrio. — Mas, si para aplicar el cálculo á la expresion de las condiciones del equilibrio se supone que los tres ejes son rectangulares, en este caso la resultante está ya dada por la fórmula consignada en el capítulo precedente cuando hablamos de las relaciones analíticas entre las fuerzas y sus resultados, la cual reproducimos aquí para evitar trabajo al lector y facilitar la inteligencia de cuanto ahora exponemos. Hé aquí esta fórmula:

$$R^2 = (\Sigma F \cos. a)^2 + \Sigma F \cos. b)^2 + (\Sigma F \cos. e)^2.$$

Pues bien; para que sea nula es menester y basta que se obtenga esta otra fórmula:

$$\Sigma F \cos. a = 0,\ \Sigma F \cos. b = 0,\ \Sigma_i F \cos. c = 0\ ;$$

estas fórmulas nos conducen á las mismas condiciones, segun puede verse en el siguiente caso particular.

Si todas las fuerzas estuvieran situadas en un mismo plano, se designaria este por el plano XY y las condiciones del equilibrio se reducirán á dos:

$$\Sigma F \cos. a = 0,\ \Sigma F \text{sen. } a = 0.$$

Luego, para que *dos fuerzas situadas en un mismo plano, y aplicadas al mismo punto, se hagan equilibrio,*

es menester y basta que descomponiendo cada una de ellas siguiendo dos ejes que pasan por este punto y situados en este plan, las sumas algebricas de los componentes dirigidas siguiendo cada eje sean nulas separadamente.

Obsérvese, por fin, que cuando algunas fuerzas, cualesquiera que estas sean, influyen sobre un punto material, puede muy bien suceder que cierto número de dichas fuerzas satisfaga las condiciones de equilibrio; en este caso puede suprimirse este grupo sin alterar el movimiento, ó introducirse en el sistema un grupo de fuerzas que hagan equilibrio; así el movimiento queda lo que era.

TERCERA PARTE

DE LAS FUERZAS APLICADAS A LOS CUERPOS SÓLIDOS.

CAPITULO PRIMERO

Nociones sobre el organismo de los cuerpos.

115. En las dos partes precedentes hemos tratado del movimiento de un punto material, y si en diferentes casos hemos hablado y hecho mover los cuerpos, casi siempre hemos supuesto dichos móviles como reducidos á meros puntos materiales. Mas ahora salimos de aquel cuadro para abrazar otro mas general, y tratar de los movimientos de un sistema *de puntos materiales* indispensable para conocer la constitucion de los cuerpos, y abordar en seguida la explicacion de estos principios elementales á las máquinas, ó *el estudio* de diversas máquinas con relacion á los principios establecidos, y que vayamos estableciendo hasta entonces.

116. Organizacion de los cuerpos : fuerzas moleculares. — El estudio de los fenómenos físicos nos demuestra que los cuerpos se componen de moléculas de dimensiones imperceptibles, y cuyas distancias mútuas, aunque son tambien imperceptibles, á la simple vista, son sin embargo mucho mas considerables. Dichas moléculas ejercen unas sobre otras dos acciones diversas : las que se llaman fuerzas *atractivas*, las cuales dependen de las distancias, y las denominadas fuerzas *repulsivas*, dependientes de las distancias y del calor á la vez.

Las fuerzas moleculares disminuyen cuando la distancia aumenta, y se hacen nulas antes que esta distancia sea perceptible á los ojos del hombre ; y las *repulsivas* varían segun la distancia con mucha mas rapidez que las *atractivas*.

Finalmente, se admite tambien el principio de que la *reaccion es igual y contraria á la accion*, esto es, que si dos moléculas m y m' están en presencia, sus acciones recíprocas son dirigidas segun la recta mm'; y que si m' recibe de m una accion f, dirigida de m' hácia m, m recibe á su vez de m' una accion f dirigida de m hácia m'.

117. Cuerpos sólidos. — Cuerpo sólido es aquel que permanece estable ó en equilibrio permanente bajo la influencia de las fuerzas moleculares. *

Cuando fuerzas exteriores obran sobre este cuerpo, inmediatamente las moléculas, que reci-

ben esta accion extraña, se acercan de las que están junto á ellas y se separan de las demás en la misma proporcion : esta aproximacion y alejamiento moleculares hacen variar sus fuerzas respectivas como fácilmente se comprende : variando de posicion las primeras, las inmediatas varían á su vez obligando á las otras con las cuales están en contacto á variar así mismo de lugar, de tal suerte que propagándose desde la primera hasta la última este rápido movimiento, se establece un nuevo equilibrio entre las fuerzas exteriores y las nuevas intensidades de las acciones recíprocas.

118. Elasticidad. — Las fuerzas moleculares vuelven al cuerpo á su forma primitiva, tan luego como cesan de recibir la accion de las fuerzas extrañas. Esta propiedad, pues, se llama *elasticidad*. Pero es necesario para que esta vuelta á su primitivo estado se produzca, que la deformacion no haya sido considerable ni alcanzado ciertos límites, variables con la naturaleza y la forma de los cuerpos. Cuando se traspasan estos límites, las moléculas se agregan de otra manera y se constituyen en un nuevo estado de equilibrio.

119. Invariabilidad de las distancias moleculares. — De lo expuesto se desprende que, propiamente hablando, no existen en la naturaleza verdaderos *cuerpos sólidos*, lo cual quiere decir, que no hay cuerpos cuyas moléculas están á distancias

recíprocas enteramente invariables. Empero, en el mayor número de casos la variacion de las distancias y la deformacion que de ella resulta, bajo de la accion de las fuerzas, son tan débiles, que pueden pasar como desapercibidas y considerar inalterables la forma de los cuerpos.

Los resultados que se obtendrán, admitiendo esta hipótesis, no serán por cierto rigurosos, pero se acercarán de la verdad tanto cuanto el cuerpo se acerque mas al estado de verdadero *sólido*.

Sin embargo, para mayor inteligencia y sencillez de las operaciones, nosotros admitiremos la invariabilidad de las distancias recíprocas de las moléculas en todos los cuerpos sólidos á que aplicaremos las fuerzas extrañas, cualesquiera que estas sean, y en su virtud supondremos que estas fuerzas no pueden deformar jamas el cuerpo de una manera sensible, y mucho menos romperlo. Y si en las aplicaciones prácticas de la mecánica se producen muchos cambios de esta naturaleza, en tal caso será conveniente y aun necesario tenerlos en cuenta; pero los resultados que nos diera dicha hipótesis ya no podrían aplicarse, porque entonces falsificarian todas nuestras operaciones.

CAPITULO II

Leyes y reglas relativas al cambio de posicion del punto del cuerpo donde se aplica una fuerza.

120. — No puede negarse que, sin cambiar el estado de movimiento ó de quietud de un cuerpo, se puede transportar el punto de aplicacion de una fuerza á otro cualquiera de su direccion, con tal que el segundo esté ó se suponga ligado al primero de una manera invariable. Esta regla puede comprobarse por medio del dinamómetro aplicado á los extremos de una cuerda ó de un palo que sostengan verticalmente á un cuerpo: ejecutándolo así, se verá que el trabajo de la fuerza transportada es tambien el mismo para todo otro cambio elemental de la recta de aplicacion.

121. Axioma. — *Dos fuerzas iguales y de sentido contrario aplicadas, siguiendo la misma recta, en dos puntos diversos de un cuerpo sólido, se hacen equilibrio.*

Esta proposicion es evidente y puede mirarse como consecuencia del principio antes establecido de la *igualdad de la accion y reaccion*, sobre todo cuando ambos puntos de aplicacion están enlazados por una hilera rectilínea de moléculas, cuyas atracciones y repulsiones recíprocas transmitan sin alteracion los efectos de las fuerzas. Empero, no lo es si la recta que une los dos puntos de aplicacion no está contenida enteramente en el cuerpo.

Sin embargo, no nos esforzaremos en demostrar *á priori* la generalidad de este axioma, cuyas consecuencias y valor acredita la experiencia de todos los dias.

122. Teorema. — *Sin cambiar el estado de quietud ó de movimiento de un cuerpo, se puede transportar el punto de aplicacion de una fuerza á otro punto cualquiera de su direccion, con tal que otro punto esté enlazado invariablemente al primero.*

Puede admitirse el precedente teorema como principio experimental, porque es una consecuencia inmediata de la proposicion número 121. Efectivamente, supongamos una fuerza F (fig 34) aplicada en el punto A de un cuerpo sólido M. Tomemos en seguida sobre su direccion $A\,F$ un punto B, interior ó exterior al cuerpo, pero enlazado invariablemente con él: luego apliquemos en sentido contrario á dicho punto dos fuerzas F_1 y F_2 iguales y paralelas á F. El estado de reposo ó de movimiento del cuerpo no se altera en razon de que estas fuerzas F y F_2 se destruyen, y en su virtud pueden suprimirse, de manera que solo queda la fuerza F_1, la cual puede mirarse como la fuerza F transpor-

tada del punto A al punto B paralelamente á sí misma.

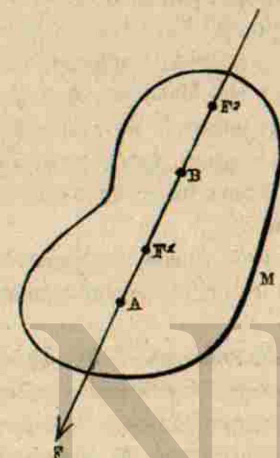

Fig. 34.

123. Dinamómetro para verificar el principio precedente. — Puede comprobarse este principio por la experiencia. Hé aquí cómo: Adáptese un dinamómetro al extremo superior de una vara ó de una cuerda vertical y otro al inferior, y suspéndase libremente un peso á este último extremo, y se reconocerá, que cuando el equilibrio existe ambos instrumentos nos suministran las mismas indicaciones, y si anunciaran alguna diferencia, esta será únicamente la del peso de la vara ó de la cuerda interpuesta. Así, se demuestra que el peso

aplicado al dinamómetro ejerce la misma accion sobre ambas extremidades. La experiencia demuestra el mismo resultado cuando el sistema está en movimiento rectilíneo y uniforme, segun se vé siempre que se reproduce sobre un barco que desciende por un rio. Mas luego que el movimiento es variado, las tensiones de ambos dinamómetros ya no son las mismas, porque la aceleracion de la cuerda ó de la vara intervienen entonces para hacerlos desiguales.

De lo expuesto puede establecerse y dejar su aplicacion al lector, el teorema siguiente :

124. SEGUNDO TEOREMA. — *Luego que se transporta una fuerza paralela á sí misma para aplicarla á un punto de su direccion, el trabajo de la fuerza transportada es el mismo en todos los cambios elementales del punto en la recta de aplicacion.*

CAPITULO III

Del equilibrio y composicion de las fuerzas.

I. Equilibrio.

125. DEFINICION DEL EQUILIBRIO. — La experiencia de todos los dias está demostrando que muchas fuerzas ejercen su accion sobre uno ó muchos cuerpos reunidos, y que estas fuerzas se neutralizan de tal suerte que su resultado es tan nulo como si estas mismas fuerzas no obraran de manera alguna. Pues bien; entonces se dice que se hacen *equilibrio*, ó que el cuerpo ó el conjunto de los cuerpos sometidos á la accion de todas la expresadas fuerzas está *en equilibrio*.

Mas debe notarse que el *equilibrio* de las fuerzas aplicadas á un cuerpo no encierra la idea de la inmovilidad de dicho cuerpo ; y que por consiguiente no turban la especie de movimiento que le imprimen.

126. EQUILIBRIO ESTABLE, É INSTABLE. — Equi-

librio *estable* es aquel que conserva ó vuelve á tomar un cuerpo tan luego como desaparece la causa que la habia perturbado. El *instable* es aquel que tiene instantáneamente un cuerpo cuando se le ha puesto en cierta posicion, que abandona inmediatamente bajo de la accion de la causa exterior mas insignificante. De manera que vulgarmente el equilibrio no es otro que el *instable*.

II. Composicion de fuerzas concurrentes ó paralelas.

127. Teorema. — *Si fuerzas en mayor ó menor número se aplican por diferentes puntos de un cuerpo sólido, de tal manera que sus direcciones concurran á un mismo punto, estas fuerzas se compondrán, segun las reglas establecidas para los casos designados, de un punto material aislado* (número 102 y siguientes).

Efectivamente, si el punto de concurso pertenece al cuerpo, en este caso todas las fuerzas se agrupan en él, de suerte que pudiera decirse con razon que todas estaban aplicadas al mismo punto del cuerpo. Si, por el contrario, no pertenece al cuerpo, entonces debe suponerse que el punto de concurso está ligado invariablemente al cuerpo, y de este modo se encontrará el primer caso. Así, en todos los casos pueden aplicarse á estas fuerzas las reglas demostradas del *paralelógramo*, *paralelipipedo*, y *polígono*.

128. Observacion. — Si, despues de haber construido la resultante con el auxilio de dichas reglas, se ve que esta fuerza encuentra el cuerpo, entonces puede tomarse uno de los puntos de encuentro por su punto de aplicacion, en razon que la citada modificacion no altera el estado del cuerpo. Pero si la direccion de la resultante está enteramente fuera del cuerpo, entonces debe considerársele como una fuerza ficticia; pues no hay fuerza única, realmente aplicada al cuerpo, que pueda reemplazar las fuerzas dadas. Con todo, aun en este caso puede imaginarse que el punto de aplicacion está unido invariablemente al cuerpo por un sistema de enlaces proporcionados, que permita á la fuerza de ejercer su accion sobre él, y conservar así teóricamente la intensidad y la direccion de la resultante, como concepcion útil para simplificar las operaciones.

Siempre es evidente, sin embargo, que las relaciones analíticas entre la resultante y sus componentes deben aplicarse sin modificacion alguna al caso actual, y que el trabajo de la resultante es igual á la suma algébrica de los trabajos de las componentes, puesto que transportando cada una de las fuerzas al punto de concurso no se altera el trabajo de las mismas.

129. Ejemplo de fuerzas que ejercen su accion siguiendo una misma direccion. — Si un cuerpo está sometido á la accion de cuatro fuerzas, una

de 2 kilógramos, otra de 6, otra de 3 y otra de 5 kilógramos, aplicadas al punto B (fig. 35), siguiendo la misma direccion BC y en el mismo sentido, este cuerpo se hallará bajo de las mismas condiciones que si la línea BC siendo vertical, los cuatro pesos expresados estuvieran suspendidos al punto B. Resultando, en definitiva, segun los principios establecidos en el curso de este MANUAL, que un peso único de 16 kilógramos (que compone la suma total de los guarismos 2, 6, 3 y 5), producirá el mismo efecto sobre el punto B.

Fig. 35.

Por consecuencia, cualquiera que sea el número de fuerzas aplicadas á un mismo punto en la misma direccion y en el mismo sentido, todas ellas tendrán una resultante igual á la suma total de fuerzas, obrando en la direccion y en el mismo sentido que las componentes.

III. Fuerzas paralelas.

130. TEOREMA. — *Dos fuerzas paralelas aplicadas á un punto sólido tienen una resultante igual á su suma paralela á cada una de ellas, y cuyo punto de aplicacion divide la distancia de los puntos de aplicacion de las componentes en dos partes, que son inversamente proporcionales á las magnitudes de las componentes.*

Para demostrarlo prácticamente, nos serviremos de una barra prismática de madera BC, suspendida en su centro, segun lo demuestra la fig. 36. La

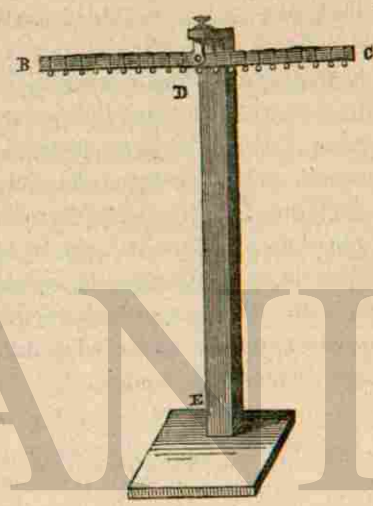

Fig. 36.

especie de cuchillo ó clavo que atraviesa dicha barra se apoya sobre dos chapitas de hierro adaptada, de manera que pueda moverse libremente, á la espiga tambien de madera DE que le sirve de sostenimiento. El frente anterior de esta barra lleva diez divisiones de igual longitud en cada uno de los lados del punto de suspension, y debajo de los puntos de division se hallan colocados otros tantos anillos con el fin de colgar en ellos los cuerpos ó pesas, construidas en tal disposicion que sea fácil de suspender unas á otras como medio de hacer mas palpable la operacion que nos ocupa.

Ahora bien, supongamos que se suspende en dos puntos de igual distancia del centro una pesa de 500 gramos en cada uno, segun se ve en la fig. 37; pues bien, la barra permanecerá horizontal. Si ahora se toman ambos dos pesos y se colocan uno bajo del otro en el punto céntrico de dicha barra como lo demuestra la figura 38, la barra no cambiará tampoco de posicion. De aquí se deduce, sin la menor sombra de duda, que la especie de cuchillo ó clavo que mantiene la barra ejerce sobre ella la misma accion, sin añadir ni quitar, así en el primer caso como en el segundo.

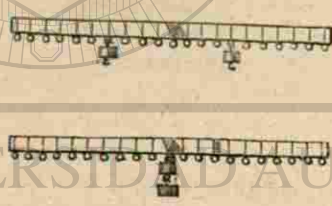

Fig. 37 y 38.

Esto mismo sucederia si se aumentasen los pesos en las mismas proporciones; y la razon es porque en el caso de la figura 37, la barra se halla sometida á dos fuerzas iguales ó paralelas, las cua-

les pueden ser reemplazadas por una sola fúerza componente todas las parciales, y aplicada al centro de la línea recta que reune sus puntos de aplicacion.

Mas, no es esto solo: tomemos ahora nueve pesas de medio kilógramo y suspendámoslos en otros tantos anillos de la barra BC, (fig. 36) igualmente distante uno de otro, y que el del centro corresponda al punto de suspension de la misma, y veremos así mismo que la barra conservará siempre su posicion horizontal. Esta posicion tampoco variará si tomamos estos mismos pesos y los colocamos, suspendidos unos de otros formando una cadena, en el punto céntrico, dejando ver así que la barra BC, cargada de nueve pesos iguales repartidos en toda su longitud, se halla en las mismas condiciones que cuando estaba cargada de un peso único de cuatro kilógramos y medio suspendido en el punto mas céntrico.

Empero, volvamos á tomar diez pesos de un kilógramo y coloquemos siete en un anillo y tres en otro anillo, segun lo demuestra la figura 39, y la

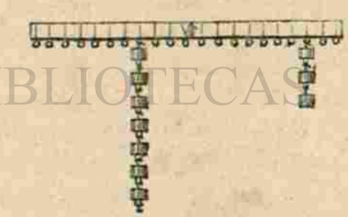

Fig. 39.

barra se mantendrá aun en la misma posicion horizontal. Resultando que un peso de 7 kilógramos enganchado en el primer anillo y otro de 3 suspendido en el segundo, producen el mismo efecto que un peso de diez kilógramos enganchado en el punto céntrico. Por consiguiente, observando que el segundo abraza tres divisiones de la barra mientras que el primero contiene siete, entonces no podrá menos de deducirse el teorema que hemos establecido al principio de este párrafo, y que ahora vamos á demostrar con los siguientes ejemplos.

131. EJEMPLO. — Imaginemos el cuerpo C (fig. 40)

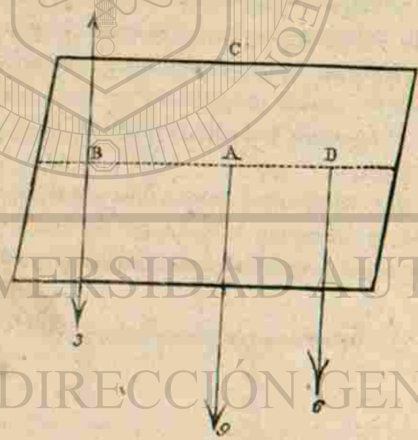

Fig. 40.

sometido á la accion de dos fuerzas paralelas y de

sentido contrario, una de 9 kilógramos aplicada al punto A, y la otra de 3 al punto B. Pues bien, para encontrar su resultante deberá procederse así : Se considerará la fuerza de 9 kilógramos como si proviniera de la fuerza 3 aplicada á B y de una fuerza de 6 aplicada en D; al afecto se prolongará BA y se tomará la distancia AD de manera que nos dé por resultado :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{3}{6}.$$

La fuerza de 9 kilógramos estando reemplazada por sus dos componentes, se tendrá en el punto B dos fuerzas de 3 kilógramos cada una y de sentido contrario que se destruyen en términos que solo quedará una fuerza de 6 kilógramos aplicada al punto D, que será la resultante de las fuerzas dadas.

132. EJEMPLO SEGUNDO. — Sometamos pues el cuerpo C á la accion de cuatro fuerzas paralelas, una de 3 kilógramos aplicada al punto A, otra de 5 aplicada al punto D, otra de 4 aplicada al punto E, y por fin otra de uno al punto B. Las dos fuerzas A, D pueden ser reemplazadas por una fuerza de ocho kilógramos aplicado al punto O; y en este caso se tendrá :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{5}{3}.$$

La expresada fuerza de 8 kilógramos puede componerse con la aplicada al punto E, y entonces resultará una fuerza de 12 kilógramos aplicada al

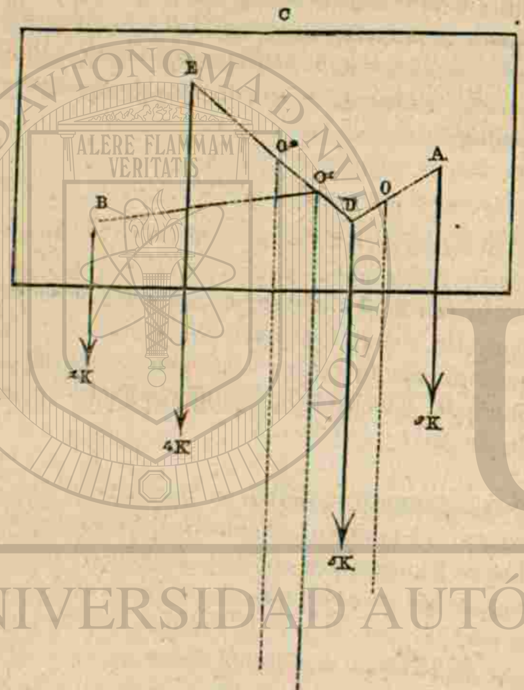

Fig. 41.

punto O'. Ultimamente, esta nueva resultante parcial se compondrá con la fuerza aplicada al punto B, y haciendo la operacion algébrica se obtendrá en

definitiva una fuerza de 13 kilógramos aplicada al punto O^2, que será la resultante de todas las fuerzas dadas.

Hé ahí el modo de componer en una sola las fuerzas paralelas de un mismo sentido, cualquiera que sea su número, pues en todos los casos que puedan imaginarse la resultante será siempre la suma de todas las componentes.

133. Observacion. — Siempre que un cuerpo se someta á la accion de numerosas fuerzas paralelas, pero obrando en sentido contrario unas de otras, se buscará la resultante de las primeras, en seguida la de las últimas, y se obtendrá de esta manera las dos resultantes parciales, la una ejerciendo su accion en sentido contrario, y la otra en direcciones paralelas. Hecho esto, ya no queda mas que componer entre sí las dos resultantes parciales, segun lo hemos demostrado en el párrafo 131. Esta última composicion podrá efectuarse siempre, al menos que las dos resultantes parciales no sean iguales y no obren siguiendo la misma recta. En este caso excepcional, las fuerzas dadas no tendrán resultante.

134. Trabajo de las fuerzas paralelas. Teorema. — Cuando un sistema de fuerzas paralelas tiene una resultante, el trabajo clemental de esta fuerza es igual al de sus componentes.

135. Otro teorema. — Cuando las fuerzas paralelas se hacen equilibrio, la suma de sus trabajos es enteramente nula para el cambio de sitio del cuerpo ó cuerpos sometidos á su accion.

136. Trabajo de las fuerzas. — Las proyecciones de los elementos del camino recorrido sobre las direcciones de las fuerzas y los términos de la igualdad, es lo que se llama trabajo de estas fuerzas. Tal es la igualdad que encierra el teorema precedente del trabajo de las fuerzas, que no demostramos prácticamente porque rigurosamente hablando queda ya explicado en los ejemplos expuestos en el presente capítulo.

CAPITULO IV

De los centros de gravedad de los cuerpos.

137. Definicion del centro de gravedad. — Ya hemos dicho en otro capítulo que un cuerpo sólido se compone del conjunto de numerosas moléculas reunidas mas ó menos compactamente en posiciones determinadas. Todas estas moléculas son graves y tienden siempre hácia su centro; pero como sus dimensiones son imperceptibles relativamente al radío del globo, debemos considerar el peso de todas estas moléculas como fuerzas paralelas de un mismo sentido, que tienen por consecuencia una resultante igual á la suma de todas ellas, dirigida, como las componentes, hácia el centro de la tierra. Esta resultante es lo que llamamos peso del cuerpo.

138. Centro de gravedad de un sistema de cuerpos. — La nocion del centro de gravedad se extiende naturalmente á un sistema cualquiera de cuerpos ligados ó no los unos con los otros, y en-

135. Otro teorema. — Cuando las fuerzas paralelas se hacen equilibrio, la suma de sus trabajos es enteramente nula para el cambio de sitio del cuerpo ó cuerpos sometidos á su accion.

136. Trabajo de las fuerzas. — Las proyecciones de los elementos del camino recorrido sobre las direcciones de las fuerzas y los términos de la igualdad, es lo que se llama trabajo de estas fuerzas. Tal es la igualdad que encierra el teorema precedente del trabajo de las fuerzas, que no demostramos prácticamente porque rigurosamente hablando queda ya explicado en los ejemplos expuestos en el presente capítulo.

CAPITULO IV

De los centros de gravedad de los cuerpos.

137. Definicion del centro de gravedad. — Ya hemos dicho en otro capítulo que un cuerpo sólido se compone del conjunto de numerosas moléculas reunidas mas ó menos compactamente en posiciones determinadas. Todas estas moléculas son graves y tienden siempre hácia su centro; pero como sus dimensiones son imperceptibles relativamente al radío del globo, debemos considerar el peso de todas estas moléculas como fuerzas paralelas de un mismo sentido, que tienen por consecuencia una resultante igual á la suma de todas ellas, dirigida, como las componentes, hácia el centro de la tierra. Esta resultante es lo que llamamos peso del cuerpo.

138. Centro de gravedad de un sistema de cuerpos. — La nocion del centro de gravedad se extiende naturalmente á un sistema cualquiera de cuerpos ligados ó no los unos con los otros, y en-

tonces es el punto de aplicacion de la resultante de los pesos de todos estos cuerpos. Por lo tanto, la expresada nocion no supone necesariamente la solidez de los cuerpos : se aplica á un sistema cualquiera de puntos materiales, cuyas posiciones, volúmenes y densidades pueden variar, siempre que se les considere en un estado dado en un instante determinado.

Cuando se conocen los pesos y los centros de gravedad de los diversos cuerpos que componen un sistema, se determina el centro de gravedad general aplicando las fórmulas que facilitan el centro de las fuerzas paralelas.

139. **Centro de gravedad de los cuerpos, de las superficies y de las líneas homogéneas.** — Aquí hablamos solo de los cuerpos homogéneos, cuya materia se considera distribuida uniformemente. En este caso el peso del cuerpo es proporcional á su volúmen, y, sabido esto, pueden establecerse las fórmulas que dan el centro de gravedad, los pesos por los volúmenes. El problema se reduce así á una cuestion geométrica, y el centro de gravedad se llama *centro de gravedad del volúmen.*

Si se considera una superficie semejante á la de una hoja homogénea que tenga por espesor constante el diámetro de una molécula, esta hoja tiene un centro de gravedad, que se denomina *centro de gravedad de la superficie.* Deberá tenerse siempre presente para no padecer equivocacion, que el vo-

lúmen de dicha hoja es proporcional á su superficie.

Si se considera una línea cualquiera como un cilindro homogéneo sumamente delgado, compuesto solo de una hilera de moléculas, este cilindro pesado tiene su centro de gravedad llamado *centro de gravedad de la línea.* El volúmen del cilindro es proporcional á su longitud.

140. **Casos en que la figura tiene un plano simétrico, un eje ó un centro de figura.**—1.° Toda figura que pueda descomponerse en partes que tengan todos sus centros de gravedad sobre un mismo plano ó sobre una misma recta, tiene su centro de gravedad sobre dicho plano ó dicha recta. 2.° Toda figura que tenga un plan simétrico, tiene su centro de gravedad en este plano. Porque dos elementos simétricos cualesquiera que tengan pesos iguales y los centros de gravedad á igual distancia del plano, el centro de gravedad de su sistema está en el plano. Luego tambien se encuentra el centro de gravedad general (caso 1.°). 3.° Toda figura que tiene un eje simétrico tiene su centro de gravedad sobre este eje. Un eje simétrico ó de simetría es la interseccion de dos planos simétricos. 4.° Toda figura que tenga un centro de figura, tiene su centro de gravedad en este *punto.* Porque toda recta que pasa por dicho punto y se termina en la figura, siendo dividida por él en dos partes iguales la hilera de moléculas que contiene, tiene su cen-

tro de gravedad en este punto. Lo mismo sucede, pues, respecto del centro de gravedad general.

142. De lo expuesto en el párrafo precedente resulta que:

El centro de gravedad de una línea está en medio.

El del contorno ó área de un paralelógramo está en el punto de interseccion de las diagonales.

El del área de un polígono regular ó de un círculo está en el centro de la figura.

El del área ó del volúmen de un paralelipípedo está en el punto de encuentro de las diagonales.

El de la superficie ó volúmen de una esfera está en el centro.

El del área ó del volúmen de un cilindro recto ú oblícuo y de bases circulares está en medio de su eje.

141. Determinacion experimental del centro de gravedad. — Supongamos un cuerpo suspendido de una cuerda segun lo demuestra la figura 42, y veremos en seguida que toma cierto equilibrio. La fuerza que le impele para precipitarlo á la tierra es su peso específico, y el punto de aplicacion de esta fuerza, su centro de gravedad.

El cuerpo, si no cae es porque experimenta de parte de la cuerda una traccion dirigida de abajo arriba que hace equilibrio con la primera fuerza, y que por lo tanto debe serle igual, pero en direc-

cion opuesta. Así, suponiendo además que la direccion de la cuerda se prolonga por el interior del

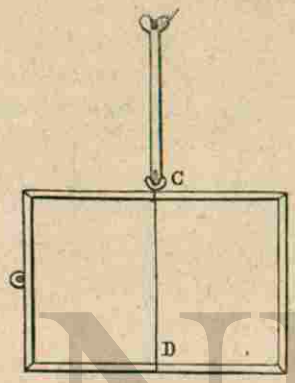

Fig. 42.

cuerpo siguiendo la línea *C D*, esta línea deberá pasar por su centro de gravedad.

Suspendiéndolo en seguida por otro punto, el cuerpo tomará nuevo equilibrio. En esta última posicion, y supuesto que la cuerda se prolonga por el interior del cuerpo siguiendo *A B* (figura 43), esta cuerda pasará por el centro de gravedad *C D*, y si se conservó el trazado de la primera línea *C D* que pasó ya por este punto, se verá que *C D* se encontrará con *A B* en el punto *E*.

Si el precedente medio de encontrar el centro de gravedad parece de difícil aplicacion porque supone tiradas dos líneas por el interior del cuerpo, aduciremos otro ejemplo que nos proporcionará las indicaciones necesarias para hallar el lugar que este punto ocupa en el interior del mismo cuerpo.

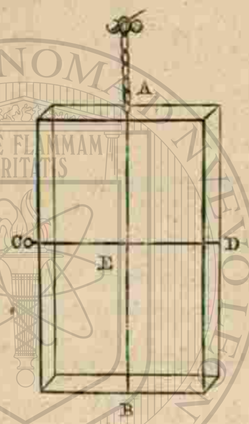

Fig. 43.

Tómese una barra de hierro ó de madera mas delgada de un extremo que del otro partiendo la disminucion insensible de su volúmen desde el principio del primer extremo hasta que el opuesto quede como la mitad del diámetro de aquel; pongámosla en seguida sobre un eje y no la dejemos hasta que haya quedado en equilibrio, y entonces hallaremos que el centro de gravedad de dicha barra está situado en el punto de la misma que se encuentra en contacto con el eje ó punto de apoyo.

143. Centro de gravedad de los volúmenes. — Divídase un prisma cualquiera, cuya base sea b y su altura h por la parte n, prismas iguales con planos equidistantes paralelos á las bases, y se hallará que los centros de gravedad están colocados de la misma manera en estos prismas; y por lo mismo se encuentran todos sobre la misma paralela á los extremos laterales y á igual distancia de la base inferior del prisma correspondiente. Siendo esta distancia x, las distancias de los diversos centros de gravedad á la base del plano inferior del prisma, tomados por plano de los momentos, serán respectivamente:

$$x', x' + \frac{h}{n}, x' + \frac{2h}{n} \ldots, x' + \frac{(n-1h)}{n}.$$

Desde luego el volúmen de cada prisma parcial es $b \frac{h}{n}$: el del prisma entero ó total es bh. Luego si la distancia del centro de gravedad buscado en la base es x, la ecuacion de los momentos dará:

$$bhx = b\frac{h}{n}\left(x' + x' + \frac{h}{n} + x + \frac{2h}{n} + \ldots + x' + \frac{(n-1)\,h}{n}\right),$$

$$x = \frac{1}{n}\left(nx' + \frac{h}{n}\,\{1 + 2 + \ldots + n - 1\}\right),$$

$$x = x' + \frac{n\,(n-1)\,h}{2n^2},$$

$$x = x' + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{h}{1}.$$

Si además se supone que n aumenta indefinidamente, x' disminuye indefinidamente, y $x = \frac{h}{2}$. Así, *el centro de gravedad de un prisma cualquiera está en medio de la recta que une los centros de gravedad de sus bases.*

144. Centro de gravedad de una pirámide. — Es fácil de descomponer una pirámide por medio de planos diagonales en tetráedros que tengan una vértice comun y á la misma altura. Si se la hace una seccion paralela á la base y á la distancia de la vértice igual á $\frac{3}{4}$ de la altura, este polígono encierra los centros de gravedad de todos los tetráedros y por consiguiente el de la pirámide. Además, los centros de gravedad de los diversos tetráedros son los diversos ángulos de la seccion, pues la recta que va desde la vértice de un tetráedro hasta el centro de gravedad de su base, pasa por todos los centros de gravedad de las secciones paralelas á dicha base. Por consiguiente, basta para obtener el de las pirámides con aplicar á los centros de gravedad de los triángulos de las secciones de las fuerzas proporcionales á los volúmenes de los tetráedros correspondientes, y de componer las expresadas fuerzas. Estos tetráedros teniendo la misma altura, son proporcionales á sus bases, y por consecuencia á los triángulos de la seccion. Luego, en definitiva, las fuerzas aplicadas deben ser proporcionales á las áreas de estos triángulos. Luego, el centro de gravedad buscado es el mismo del conjunto de dichos triángulos ó del polígono de seccion. Así pues, el centro de gravedad de una pirámide es el de la seccion conducida paralelamente á la base, á una distancia igual á $\frac{3}{4}$ de la altura principiando por la vértice; y por consiguiente está sobre la recta que va desde la vértice al centro de gravedad de la base.

145. Centros de gravedad de un cono y de un cilindro. — Cuanto acabamos de exponer en el precedente párrafo, es independiente del número de lados de la base de la pirámide. El resultado obtenido se aplica, pues, al caso en que este número se aumenta infinitamente ó en que las pirámides se cambian en cono. Luego el centro de gravedad del cono se encuentra sobre la recta que une su vértice al centro de gravedad de la base, y á una distancia igual á la cuarta parte de su longitud principiando á medir por la base.

Se evidenciará igualmente, que el resultado obtenido en el párrafo 143 se extiende tambien al cilindro, y que en su virtud el centro de gravedad de un cilindro está en medio de la recta que une los centros de gravedad de sus bases.

146. Trabajo de la gravedad sobre un cuerpo ó sobre un sistema de cuerpos. — Este trabajo es el mismo que la masa de dichos cuerpos haria si

se hallase concentrada en su centro de gravedad general.

Así, cuando se levanta un cuerpo cualquiera P con movimiento uniforme á una altura vertical h, se despliega una fuerza F constante igual y contraria al cuerpo P. Por consiguiente, el trabajo de esta fuerza es igual y contraria al de P, y como este último es $-Ph$, el trabajo de la fuerza F es $+Ph$. No depende, pues, mas que de la altura vertical recorrida por el cuerpo. Sin embargo, si el motor fuera un hombre ó un caballo, en este caso es necesario tener en cuenta la longitud del camino recorrido horizontalmente, lo cual ocasiona ó una fatiga ó una pérdida de tiempo que no están comprendidas en la precedente evaluacion del trabajo.

CUARTA PARTE

DE LAS MAQUINAS

CAPITULO PRIMERO

Nociones generales de las máquinas.

147. Las máquinas tienen por objeto el transmitir, bajo ciertas condiciones, la accion y el trabajo de las fuerzas que cada una tiene. Por lo general, el trabajo motor es mayor que el trabajo útil, de manera que muchas veces lo que se gana en fuerza se pierde en tiempo ó en camino, y esto aun en las de vapor y electricidad para las vías férreas, navegacion y telégrafos eléctricos, etc.

148. Definicion de las máquinas. — Cuando las fuerzas ejercen su accion unas sobre otras por medio de un cuerpo sólido enteramente libre, no pueden equilibrarse si no llenan las condiciones determinadas por la ciencia. Pero si el cuerpo se halla embarazado en su movimiento por algun

se hallase concentrada en su centro de gravedad general.

Así, cuando se levanta un cuerpo cualquiera P con movimiento uniforme á una altura vertical h, se despliega una fuerza F constante igual y contraria al cuerpo P. Por consiguiente, el trabajo de esta fuerza es igual y contraria al de P, y como este último es $-Ph$, el trabajo de la fuerza F es $+Ph$. No depende, pues, mas que de la altura vertical recorrida por el cuerpo. Sin embargo, si el motor fuera un hombre ó un caballo, en este caso es necesario tener en cuenta la longitud del camino recorrido horizontalmente, lo cual ocasiona ó una fatiga ó una pérdida de tiempo que no están comprendidas en la precedente evaluacion del trabajo.

CUARTA PARTE

DE LAS MAQUINAS

CAPITULO PRIMERO

Nociones generales de las máquinas.

147. Las máquinas tienen por objeto el transmitir, bajo ciertas condiciones, la accion y el trabajo de las fuerzas que cada una tiene. Por lo general, el trabajo motor es mayor que el trabajo útil, de manera que muchas veces lo que se gana en fuerza se pierde en tiempo ó en camino, y esto aun en las de vapor y electricidad para las vías férreas, navegacion y telégrafos eléctricos, etc.

148. Definicion de las máquinas. — Cuando las fuerzas ejercen su accion unas sobre otras por medio de un cuerpo sólido enteramente libre, no pueden equilibrarse si no llenan las condiciones determinadas por la ciencia. Pero si el cuerpo se halla embarazado en su movimiento por algun

obstáculo, todas las precedentes condiciones no son ya necesarias. Por ejemplo, si el obstáculo es un punto fijo en cuyo derredor tiene el cuerpo la libertad de moverse, ya no es menester para obtener el equilibrio el oponer á cada una de las dos resultantes S y T una fuerza igual y contraria; pues como una de ellas S puede pasar siempre por el punto fijo, basta entonces con aplicar al cuerpo otra fuerza V, elegida de tal manera que la resultante comun de F y V vaya á pasar tambien por el punto fijo.

Un cuerpo así embarazado en su movimiento por un obstáculo, es una *máquina.*

Ahora se comprenderá que con el auxilio de esta máquina dos fuerzas desiguales pueden hacerse equilibrio, siempre que su resultante encuentre el obstáculo fijo. Entonces la accion de la mas débil se transmite por medio de la máquina cambiando de direccion y modificándose de manera que esta accion se haga considerable.

Empero, no basta de considerar las máquinas en el estado de equilibrio. Es indispensable estudiar su movimiento bajo el punto de vista de la accion de las fuerzas que les son aplicadas. De este modo siempre se reconocerá que este movimiento es efecto de la accion de una ó muchas fuerzas, cuyos puntos de aplicacion cambian de lugar para producir un trabajo motor que pueda triunfar de la accion de otras fuerzas cuyos puntos de aplicacion son contrarios al sentido que las

mismas quisieran seguir. El trabajo de resistencia, hecho por estas se halla destruido con el auxilio de la máquina por el trabajo motor de las primeras. Por lo tanto, puede decirse con bastante razon que :

Una máquina es un conjunto de piezas perfectamente coordinadas con el fin de transmitir bajo ciertas condiciones la accion y el trabajo de las fuerzas.

Las máquinas son simples y compuestas.

Las *compuestas* son el conjunto de muchas máquinas simples que influyen unas sobre otras.

Las *simples* son un cuerpo sólido embarazado en su movimiento, destinadas á transmitir la accion y el trabajo de las fuerzas. Haciendo atencion á la naturaleza del obstáculo, las máquinas simples pueden reducirse á tres principales : La *palanca, la polea, ó rueda,* y el *plan inclinado.*

En la *palanca* el obstáculo es un punto fijo, en cuyo derredor el cuerpo sólido tiene la libertad de moverse en todos sentidos.

En la *rueda ó cábria* el obstáculo es un eje fijo, en derredor del cual cada punto del cuerpo sólido no tiene mas libertad que la de moverse en un plano perpendicular á la direccion de dicho eje.

En el *plano inclinado* el obstáculo es un *plano fijo* contra el cual se apoya el cuerpo sólido, y tiene la libertad de deslizarse.

149. Distincion de las fuerzas. — Las fuerzas que obran en las máquinas pueden dividirse en

tres claces á saber : *en fuerzas motrices*, *en resistentes útiles* y *en resistentes pasivas*.

Las *motrices* son el viento, el vapor, el agua y la accion muscular del hombre ó del animal. Ellas solas ponen las máquinas en movimiento, y por esta razon se las ha denominado *potencias*. El camino recorrido por el punto de aplicacion de cualquiera de ellas forma siempre un ángulo agudo con la direccion de esta fuerza. El trabajo es *positivo ó motor*.

Las *fuerzas resi tentes, ó de resistencias útiles*, son las que tiene que vencer la máquina para producir su efecto, como la resistencia que ofrece un cuerpo que se quiere elevar, un árbol que la sierra quiere dividir, ó el grano de trigo que la piedra quiere moler. Por consecuencia, la máquina ha sido inventada para triunfar de todas estas resistencias y de otras semejantes. Los caminos descritos por los puntos de aplicacion de estas resistencias vencidas, forman siempre ángulos obtusos con las direcciones de dichas fuerzas. El trabajo desarrollado es negativo ó resistente, y se le llama *trabajo útil*.

Las *pasivas ó dañosas*, como el roce de las diversas partes de la máquina entre sí, la resistencia de los puntos sobre qué se mueven, la tirantez de las cuerdas, etc., etc. Dichas fuerzas suministran un trabajo resistente que destruyen una parte del trabajo motor, y que por lo tanto, no siendo de ninguna utilidad, es un trabajo perdido.

Así, para mayor inteligencia representaremos con $F m$ el trabajo positivo ó motor; con $F u$ el trabajo útil y con $F p$ el trabajo pasivo.

Pueden considerarse aun otras diversas fuerzas, como las resistencias que nacen en una máquina del punto fijo, del eje ó del plano invariable que embaraza su movimiento. Todas estas resistencias pueden asimilarse á las principales fuerzas antes detalladas. Incapaces de producir el movimiento, solo sirven para destruirlo. Sin embargo, nada impide que consideremos estos obstáculos como fuerzas iguales y contrarias á las que ellas aniquilan cuando funcionan. Empero, respecto de los dos primeros casos (del punto ó eje fijo) los puntos de aplicacion quedan fijos para todos los cambios de fuerza en el plano invariable. Luego el trabajo de las mismas fuerzas es siempre nulo y no debe tenerse en cuenta.

150. Relacion entre el trabajo util y el trabajo motor. — Cuando una máquina está en quietud bajo la accion de las fuerzas que la solicitan, las potencias y las resistencias de toda especie se hacen equilibrio, y la suma de sus trabajos es nula para todos los cambios posibles de los cuerpos sujetos á su accion. Luego que la máquina está puesta en movimiento, se busca el medio de hacer uniforme este movimiento, lo cual se consigue siempre, porque á medida que el movimiento se acelera, aumentan las resistencias. Por consi-

guiente, cuando el movimiento se ha hecho uniforme, las fuerzas están en las mismas condiciones que si la máquina estuviera en quietud puesto que se hacen equilibrio recíprocamente, y en este caso la suma algébrica de sus trabajos es nula. Y entonces, teniendo cuenta de los signos

$$Fm = Fu + Fp$$

se saca

$$Fu = Fm - Fp.$$

Por consecuencia, el trabajo útil es el exceso del trabajo motor desarrollado por las potencias sobre el trabajo resistente desplegado por las potencias pasivas.

Tal es el principio de la transmision del trabajo.

De lo cual puede concluirse además en

$$Fu < Fm.$$

Cosa que demuestra tambien que el trabajo útil es siempre menor que el trabajo motor.

La relacion $\frac{Fu}{Fm}$ se llama *rendimiento* de la máquina, el cual es siempre inferior á 1. Finalmente, la máquina será tanto mejor cuanto esta relacion se aproximará mas á la unidad; pero aun en las mejores máquinas no excede de $\frac{3}{4}$.

De aquí se deduce la observacion de que una máquina no puede transmitir mas trabajo que el que ella misma ha recibido.

151. Imposibilidad del movimiento perpetuo. — Como segun queda dicho la máquina no puede transmitir mas trabajo del recibido por la misma, y como este trabajo motor se emplea desde luego en triunfar de las resistencias pasivas, las cuales, si es fácil atenuarlas, no es posible de disiparlas enteramente, la máquina no puede producir su efecto útil, si las potencias no hacen un trabajo superior al de las resistencias. En este caso, debe quedar sometida á la accion de ciertas potencias. Empero, aun cuando el efecto útil debiera ser nulo, no por eso será menos necesario de aplicar una potencia á la máquina capaz de mantener su movimiento uniforme, triunfando de las resistencias pasivas. Una máquina, por lo tanto, no puede prescindir de la accion de un motor, porque ella misma no puede servirse de motor. Así, es imposible construir una máquina, cuyo movimiento se continúe indefinidamente por sí mismo, ó sin la accion de un motor. Bajo de este supuesto incontrarrestable, el movimiento perpetuo es imposible.

152. Observacion. — Limitaremos á lo expuesto en el presente capítulo las nociones generales de las máquinas, porque nos proponemos dar en seguida cuantas explicaciones consideramos necesarias para la perfecta inteligencia de las mismas, pero dejando sin tratar á fondo las resistencias pasivas, que señalaremos á la vez que demostremos la composicion, uso y efecto de las que contendrá

este MANUAL, pues no es posible comprender en él todas las conocidas hasta el dia; solo sí hemos elegido las mas necesarias, entre las cuales figuran las últimas inventadas por los hombres de la ciencia. Empero, debemos tambien advertir, por regla general, que en todas ellas *lo que se gana en fuerza se pierde en camino, en velocidad y en tiempo.*

CAPITULO II

Del estudio de varias máquinas relativo al equilibrio de las fuerzas que las son aplicadas.

I. De la palanca y sus especies.

153. DEFINICION Y DEMOSTRACION DE UNA PALANCA RECTA. — Palanca es un cuerpo sólido movible sobre un punto fijo. Comunmente tiene la forma de una barra de hierro recta ó curva, con cuyo auxilio se mueve y maneja un cuerpo pesado, como lo representa la figura 44. Esta palanca, que suponemos que es *A B*, mueve el cuerpo pesado *D* por el extremo *B* haciendo un esfuerzo por el extremo opuesto *A* : la palanca se apoya sobre el punto *C*, en cuyo alrededor puede dar vueltas cuando la accion de la fuerza aplicada en *A* es bastante para dominar la resistencia. Ahora bien; imaginemos que el cuerpo *D* levantado por el punto *B*, segun se ve en la expresada figura, permanece inmóvil y sostenido por la barra de hierro en la posi-

cion que ahora ocupa. En este estado la palanca se hallará sometida á la influencia de dos fuerzas, cuales son la de resistencia que el cuerpo *D* hace en *B* y la aplicada en *A* para impedir que el cuerpo vuelva á caer. Ambas fuerzas, que consideraremos como si fueran paralelas, pueden reemplazarse por una sola fuerza que produzca el mismo efecto so-

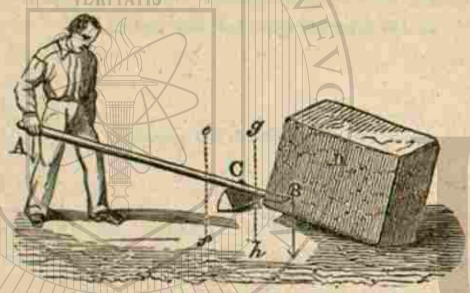

Fig. 44.

bre la palanca. Dicha fuerza única debe pasar por el punto *C*, pues si, por el contrario, se encaminase por *ef* ó *gh*, la palanca daria necesariamente vueltas en derredor del punto *C* bajo de la accion única de esta fuerza. La inmovilidad de la palanca, bajo de la accion simultánea de las dos fuerzas aplicadas en *A* y en *B*, necesita que la resultante de dichas dos fuerzas pase por el punto *C*, y al efecto es menester que las fuerzas sean, en sentido inverso, proporcionales á las distancias *BC* y *AC*

que se llaman los brazos de la palanca. Si *CA* es 5, 30, 60, 100 y mas veces mayor que *BC*, la accion de la fuerza en *A* será por lo mismo 5, 30, 60 y 100 ó mas veces mas pequeña que la de resistencia que la barra encuentra en *B*, y á la cual se trata de hacer equilibrio.

Las ventajas incalculables de esta máquina simple llamaron tanto la admiracion de Arquímedes, que al consignar el siguiente principio que estableció él mismo : « Dos fuerzas que obran sobre « una palanca, se equilibran siempre que están en- « tre sí en relacion inversa de los brazos de la pa- « lanca á cuyos extremos se hallan aplicadas, » no pudo menos de exclamar : « Qué se me dé una palanca y un punto de apoyo y yo levantaré el mundo. »

154. Palanca curva. — Veamos lo que es y los efectos que produce una palanca curva. Supongamos la que nos representa la figura 45, á cuyos

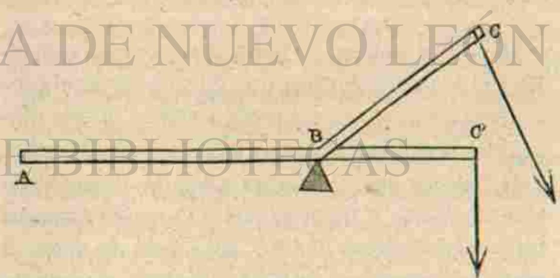

Fig. 45.

extremos $A C$ se aplican dos fuerzas perpendiculares respecto á $A B$ y $C B$. Supongamos tambien que el brazo $C B$ quede suprimido, y reemplazado por el brazo $C' B$ de la misma longitud, pero dirigido segun la prolongacion $A B$. La palanca curva $A B C$ se verá reemplazada por una recta $A B C'$. Por consiguiente, si se aplica en C' perpendicularmente á $C' B$ la fuerza aplicada en C, ejercerá su accion del mismo modo á fin de mover la palanca al rededor del punto de apoyo B; y en ambos casos deberá tener la misma accion para hacer equilibrio á la fuerza aplicada al punto A.

Hablando de la palanca recta hemos demostrado que, para obtener este equilibrio, cuando se halla bajo de la accion de dos fuerzas paralelas, es menester que estas fuerzas fuesen de una manera inversa proporcionales á los brazos de la palanca sobre cuyos extremos influyen. Lo mismo, pues, sucede con la curva sometida á la accion de dos fuerzas dirigidas perpendicularmente á sus brazos.

155. Caso comun. — Dánse varios casos sin embargo en que las fuerzas que ejercen su accion sobre una palanca, ya sea recta ó curva, no son dirigidas perpendicularmente á sus respectivos brazos. Estampemos pues la figura 46 para demostrarlo prácticamente, y supongamos en seguida abajadas las perpendiculares $B A'$ $B C'$ del punto de apoyo B sobre las direcciones de las dos fuerzas, y entonces

se podrán considerar dichas fuerzas bajo las mismas condiciones que si estuvieran aplicadas á los

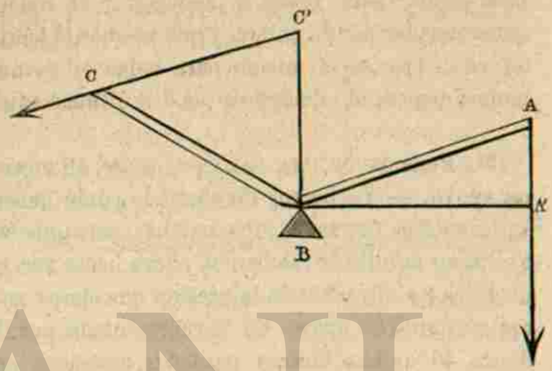

Fig. 46.

extremos de la palanca curva $A B C'$. De aquí es fácil de deducir, que para que se hagan equilibrio, es indispensable que las fuerzas sean de una manera inversa proporcionales á las longitudes de las perpendiculares $B A'$ $B C'$. Por consiguiente, para poder aplicar el principio establecido en el párrafo 153 á todos los casos, es necesario que se extiendan á los brazos de la palanca, en cuyos extremos se aplican las fuerzas, las perpendiculares abajadas del punto de apoyo sobre las direcciones de las fuerzas.

156. Observacion. — Generalmente se distin-

guen tres clases de palancas rectas, y esta distincion procede de la diferente posicion que ocupa el punto de apoyo con relacion á la potencia y á la resistencia. Como todas se conocen y se hallan generalizadas por do quiera, y que además la teoría del equilibrio es la misma para todas ellas, nos hemos dispensado de incluir las dos últimas aquí.

157. PRESION DE UNA PALANCA SOBRE SU PUNTO DE APOYO. — Ya hemos demostrado cómo deben aplicarse las fuerzas á una palanca para que se quede en equilibrio; debemos ahora hacer ver la magnitud y direccion de la presion que ejerce sobre su punto de apoyo. En la representada por la figura 46 ambas fuerzas paralelas aplicadas en *A* y *C* tendrán una resultante igual á su suma paralela á cada una de ellas, que pasará por el punto *B*. Dicha resultante es la presion que la barra hace sobre su punto de apoyo.

Respecto á la palanca recta sometida á dos fuerzas paralelas en sentido contrario, se puede considerar la aplicada al punto *C* como resultante de la composicion de dos fuerzas (fig. 47), de la composicion de las dos fuerzas paralelas aplicadas la una al punto *A* y la otra al punto *B*. La primera es igual y contraria á la que ejerce su accion sobre el punto *A*, la cual seria destruida por esta fuerza, y la segunda igual á la diferencia entre la fuerza que influye en el punto *C* y la que obra en el de *A*. Esta segunda componente representa la presion

que la palanca ejerce sobre su punto de apoyo.

La precedente palanca, que tiene su punto de apoyo en uno de sus extremos *B*, y se halla sometida á dos fuerzas aplicadas en *A* y *C* en direccio-

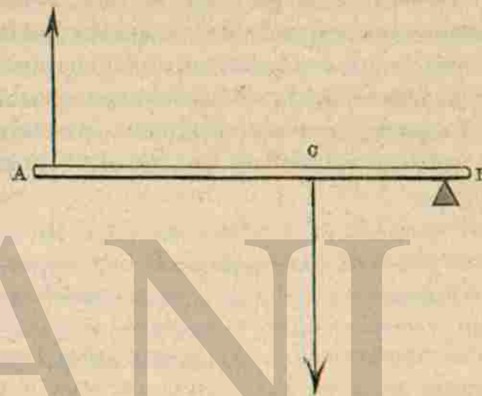

Fig. 47.

nes paralelas, pero en sentido contrario, se podrán considerar *BA* y *BC* como dos brazos de la palanca á cuyos extremos obran estas fuerzas, de manera que el equilibrio tendrá lugar cuando las fuerzas sean inversamente proporcionales á los expresados brazos de la palanca.

El carreton de una sola rueda para conducir peso, arrastrado por un hombre es un ejemplo exacto de lo que acabamos de demostrar con la precedente palanca. El punto de apoyo es el eje de la rueda, una de las fuerzas aplicadas, el peso del cuerpo colocado en el carreton, y la otra es la resultante de las dos presiones ejercidas de abajo arriba por las manos del hombre que empuña las barras.

Finalmente, una palanca, ya sea recta, ya curva, sometida á la accion de dos fuerzas no paralelas, no podrá quedar en equilibrio mientras que las direcciones de dichas dos fuerzas no se encuentren en un punto, y que sus magnitudes no satisfagan las reglas ó condiciones consignadas anteriormente.

II. De las balanzas.

158. Observacion. — Ya hemos hablado en la segunda parte de este Manual, capítulo I, seccion III, que trata de la composicion y medida de las fuerzas de la Romana de comercio, de la balanza romana y de la inventada por Poncelet. Esto bastará para dar una idea exacta de cuanto podremos decir sobre las balanzas; empero, parécenos que el estudio de estas máquinas simples quedaria imperfecto si no diéramos aquí la definicion general de las mismas, y las explicaciones sobre la indispensable sensibilidad que deben tener para obtener pesos exactos.

159. Definicion. — La balanza es una palanca

de primer órden cuyos extremos suspenden, con el auxilio de cadenas ó cuerdas, los platos destinados á recibir los cuerpos cuyos pesos quieren compararse. Para asegurar la inmovilidad de la máquina el *fiel* tiene un prisma de acero, fijo transversalmente en medio de su longitud, que sobresale por ambos lados. Este prisma ó especie de cuchillo descansa sobre el eje colocado entre dos planos de acero horizontales, fijos al pié de la máquina. Las oscilaciones del *fiel* se efectuán, pues, al rededor de dicho eje, que pudiera llamarse de rotacion.

Se usa la balanza colocando en uno de los platos el cuerpo que se quiere pesar y en el otro ciertas pesas determinadas, ó en número y cantidad suficientes para establecer el equilibrio ó que el fiel se mantenga horizontalmente.

160. Precision ó afino de la balanza. — Para que una balanza sea justa, debe llenar indispensablemente dos condiciones:

1.ª *Que sean iguales las distancias del punto de apoyo del fiel á los puntos de suspension de los platos.*

2.ª *Que el fiel permanezca perfectamente horizontal mientras que no se coloque algun cuerpo en los platos.*

Satisfechas estas condiciones, lo cual se conoce cuando el fiel se conserva siempre horizontal, entonces ya puede procederse al peso, añadiendo ó quitando pesas hasta que queden en equilibrio con el cuerpo ó cuerpos sujetos al peso. Ya queda dicho que hemos tomado por unidad del peso el gramo, kilógramo, etc.

161. Observacion. — Conténtanse comunmente, para verificar la precision y afino de la balanza, asegurándose de que la segunda condicion antes expresada quede enteramente satisfecha. Pero no basta con esto solo, puesto que puede ser inexacta aunque llene dicha condicion, en razon de que esto solo no prueba la igualdad de los brazos. Así, para asegurarse enteramente si una balanza es justa es menester hacer lo siguiente.

Luego que se ha reconocido que el fiel se mantiene en la mas perfecta horizontalidad cuando los platos no contienen cuerpo alguno, se pondrán en dichos platos dos pesos tan exactos el uno con el otro que el fiel conserve su mismo estado horizontal. En seguida se pondrá el peso que estaba en el plato derecho en el izquierdo y vice-versa, y si despues de esta operacion el fiel no cambia nada absolutamente su posicion horizontal, en este caso la balanza es perfecta y en gran manera exacta.

Si los brazos de la palanca ó barra del fiel fueran desiguales, los pesos puestos en los platos y que se hacian equilibrio ejerciendo su accion en los extremos de dichos brazos deberian ser asimismo desiguales, en atencion á que el mas largo obraria sobre el mas corto. Así, cambiando las pesas de uno á otro plato, el equilibrio debe subsistir

el mismo, como prueba de la igualdad de los brazos de la balanza; pero si no permanece horizontal, puede asegurarse que la máquina es inexacta y por consiguiente infieles los pesos que se hagan con ella.

162. Medida de los pesos con una balanza falsa. — Cuando una balanza es justa, se pesa un cuerpo contando el número de gramos, kilógramos necesarios para equilibrarla, y acto continuo se emplea el método de las dobles pesadas, llamado de Borda, para ver si es falsa.

163. Método de Borda, ó de dobles pesadas. — Hé aquí en qué consiste este método. Despues de haber practicado la operacion indicada en el párrafo precedente, 162, ó de haber puesto el cuerpo sujeto al peso en uno de los platos, se le busca el equilibrio poniendo en el opuesto arena ó plomo. Puestos así en equilibrio, se quita el cuerpo y se reemplaza con pesos marcados en número suficiente para que el fiel vuelva á recobrar su posicion horizontal, ó para que oscile igualmente por ambas partes. Si los pesos marcados producen con exactitud el mismo efecto que el cuerpo, entonces deben en iguales circunstancias servirle de medida á su peso. Empleando este ingenioso método se ve que la exactitud del resultado no depende en manera alguna de la precision ó afino de la balanza, sino de su extremada sensibilidad.

Una balanza imperfecta ó mala, si es sensible, podrá servir aun para efectuar pesadas muy delicadas.

164. Balanza de Quintenz.— Esta balanza, que ha tomado el nombre de su autor, se llama comunmente báscula, y se usa mucho en el comercio y con especialidad en los caminos de hierro para pesar fardos y equipages. La figura 48 la ponemos primero para hacer ver su mecanismo; pero además fijamos la figura 49 para representarla tal como se ve funcionar en todos los establecimientos industriales.

El plano *AB*, que tiene elevado uno de sus bordes *CB*, y que sirve para colocar el cuerpo que quiere someterse al peso, forma una sola pieza con *D* y se apoya por una parte sobre el punto *E*

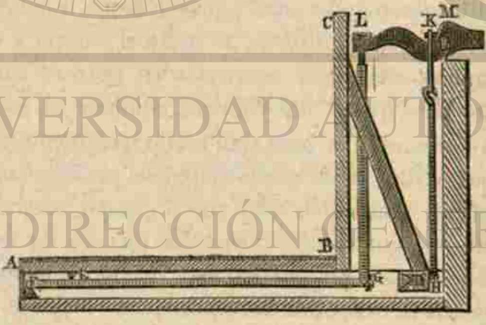

Fig. 48.

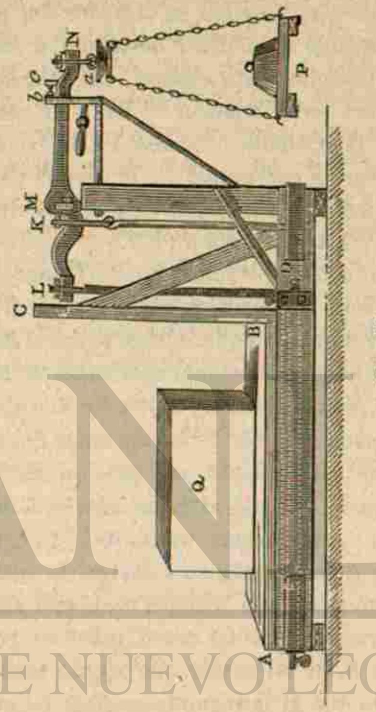

Fig. 49.

situado en la especie de palanca *FG*, y por otra en *H*, que pasa á engancharse en el anillo que termina el triángulo *HK*. La palanca ó barra de hierro *FG*, movible al rededor del punto *F*, se apoya en el extremo inferior del triángulo *GL*. Los dos triángulos expresados se apoyan á su vez sobre la espiga de hierro *LN*, movible en derredor del punto *M*, que suspende el plano *P* destinado á recibir los pesos marcados. Esta balanza, en fin, debe quedar de manera que la relacion de *EF* á *GF* sea la misma que la existente entre *KM* á *LM*. La distancia *KM* es por lo comun igual á la décima parte de la distancia *MN*; *EF* será por ejemplo la quinta parte de *GF*, y *KM* la quinta de *LM*.

Ahora bien, colocando el cuerpo *Q* sobre el plano *AB*, su peso se repartirá entre los dos puntos de apoyo, y la porcion que influya sobre el de *H* producirá una presion igual aplicada á la palanca ó espiga *LN* en el punto *K*; la otra porcion ejerciendo su accion en el punto *E* de la palanca *FG*, hará por medio de esta palanca una presion cinco veces mas pequeña sobre el extremo inferior *G* del triángulo *GL*; esta presion transmitida integramente al punto *L* de la palanca ó espiga de hierro *LN*, producirá sobre esta palanca el mismo efecto que produjera una presion cinco veces mayor sobre el punto *K*, de tal suerte que sucede exactamente lo mismo que si la segunda porcion del cuerpo *Q* obrase directamente sobre el punto *K*. La palanca *LN* se halla en las mismas condiciones que si el peso del cuerpo *Q* estuviera aplicado enteramente en el punto *K*. Por consiguiente, para equilibrarlo es necesario poner en el plato *P* un peso diez veces mas pequeño.

Antes de servirse de ella es necesario asegurarse

de que la palanca *LN* conserva su posicion horizontal, y en caso que discrepe alguna cosa, poner para rectificarla unos pequeños pesos en la parte destinada á recibirlos. Estas pesas se llaman *tara*, la cual se deduce siempre del peso general. Mas para conocer si en efecto se halla perfectamente horizontal la palanca *LN*, se han colocado dos apéndices *b*, *c*, el uno fijo en la palanca y el otro movible, con la palanca que debe colocarse al frente del primero. Hecho esto se procede á la operacion, y su resultado será diez veces mayor de la suma de gramos ó kilógramos que se hayan puesto para equilibrar el cuerpo que acaba de pesarse.

CAPITULO III

Del torno, de la polea y sus especies, y del equilibrio y trabajo de las fuerzas aplicadas á dichas máquinas.

I. Equilibrio y trabajo de las fuerzas aplicadas al torno.

164. Definicion. — El torno ó cábria es una máquina que solo tiene libertad de moverse ó dar vueltas sobre un eje fijo. Compónese de un cilindro *AB* (fig. 50) de hierro colado y mas comunmente de madera, cuyas dos extremidades terminan en dos *muñones* que descansan sobre dos coginetes fijos y cilíndricos que sostienen dos puntos invariables *DE*. El cilindro así apoyado puede dar vueltas en derredor de su eje. Una cuerda sujeta y arrollada á la circunferencia del cilindro por un extremo, y por el otro ligada al cuerpo *P* que se trata de levantar, forma una parte del mecanismo. En seguida, para proceder á la operacion se da vueltas al cilindro con el auxilio de las dos barras *C*, introducidas por las aberturas practicadas al efecto en uno de sus extremos. A medida, pues,

que la cuerda se enrosca, sube el cuerpo que se desea levantar.

Para poder apreciar la relacion existente entre la fuerza y el peso del cuerpo levantado, poco im-

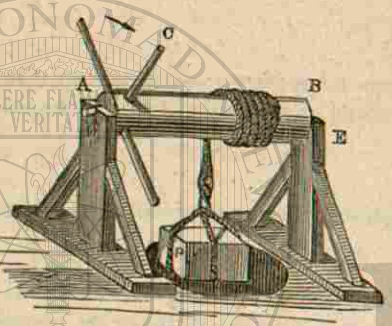

Fig. 50.

porta que las barras que ponen en movimiento la máquina se hallen colocadas en tal ó cual punto del cilindro; siempre que tengan la misma longitud, y que la fuerza ejerza su accion sobre el mismo punto, y perpendicularmente á su longitud, dicha fuerza conservará constantemente la misma intensidad.

Ahora bien, para simplificar en cuanto nos sea posible esta cuestion, supondremos que las barras que aplican la fuerza y la cuerda que suspende y levanta el peso están situados en el mismo plano perpendicular al eje de la máquina, y veremos que las fuerzas motoras y resistentes *F P* (fig. 51) se

encuentran en las mismas condiciones que si estuvieran aplicadas á los extremos de la palanca ó barra curva *M O N*, pues, como se colige, para que se hagan equilibrio deben hallarse en razon inversa del radío *O M* del torno y de la longitud *O N* de la barra. Por consiguiente, y dando por supuesto que *O N* es igual á siete veces *O M*, la fuerza *F* será ó deberá ser siete veces mas pequeña que el cuerpo *P* que trata de elevarse.

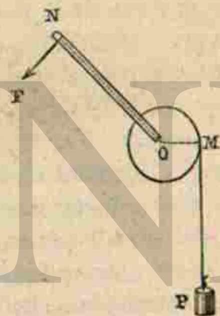

Fig. 51.

Finalmente, sépase que cuando el eje de las precedentes máquinas 50 y 51 tienen el eje horizontal, entonces se emplean generalmente para subir pesos, y se llama *torno*. Mas cuando su eje es vertical, entonces se usan en los puertos de mar para ejercer grandes esfuerzos en direccion horizontal ó casi horizontal que toma el nombre de *cabestante*. Sin embargo, las condiciones del equilibrio y del movimiento son idénticas en ambos, aunque por nuestra parte damos al torno figura 50 la ventaja en cuanto al equilibrio sobre el cabestante.

Nota. — Las ruedas *dentadas y de clavigas* ó de escalera pueden figurar así mismo en este capítulo, porque realmente, en nuestro concepto, son verdaderos tornos con sola la diferencia del punto de aplicacion de la fuerza motriz, como todas las máquinas de esta especie.

II. Ruedas dentadas ó de encaje; rueda de clavijas y correa sin fin.

165. Explicacion y definicion de las ruedas dentadas. — Las ruedas dentadas se emplean para transmitir el movimiento de rotacion de un cilindro á otro; al efecto, es necesario que estén aproximadas suficientemente, pues no es necesario que se hallen en línea paralela. Así, para transmitir el movimiento de un cilindro á otro basta con adaptarles dos tambores cuyos extremos se toquen, cuidando que no se opriman de tal naturaleza que se impidan recíprocamente la marcha, pero dejándoles siempre el roce necesario para que puedan moverse el uno por el otro. Sin embargo, este movimiento seria ineficaz, tratando de servirse de esta composicion de fuerzas para obrar sobre cuerpos que ofrezcan grande resisten-

cia. Por esta razon, y con el fin de obviar tamaño inconveniente, y que un tambor no pueda dar vueltas sin arrastrar el otro, como sucede en el primer caso, se ha ideado el hacer en sus circunferencias varias concavidades ó especie de dientes dispuestos de manera que las de un tambor encajen en el otro. Hé ahí en definitiva lo que se llama *rueda dentada*.

Dichas ruedas deben estar paralelas para que pueda verificarse el encaje de una en otra, en términos que el diente de la una y la concavidad de la otra donde deben enlazarse tienen que ocupar el mismo espacio de la circunferencia, y que el número de concavidades y dientes guarden entre sí la misma relacion que las longitudes y radíos de dicha circunferencia. La rueda pequeña relativamente á la que debe encajarse, se le ha dado el nombre de piñon. Respecto de la accion de las fuerzas, las ruedas dentadas ejercen una accion semejante á la de las que en vez de dientes reciben el contacto de una correa sin fin de que trataremos luego.

167. Funcion y efecto de esta máquina. — Imaginemos que la fuerza A se aplica á la barra B para hacer dar vueltas al torno C con el auxilio de las ruedas dentadas DE (fig. 52), y al punto notaremos como se eleva el cuerpo F. Los dientes del piñon D hacen una presion p sobre la rueda E suficiente para que el cuerpo F quede equilibrado.

Mas la rueda E á la vez ejercerá su accion sobre los primeros dientes de tal suerte que les hará sufrir una presion igual y contraria P'. Empero, la fuerza A triunfa inmediatamente de esta segunda presion.

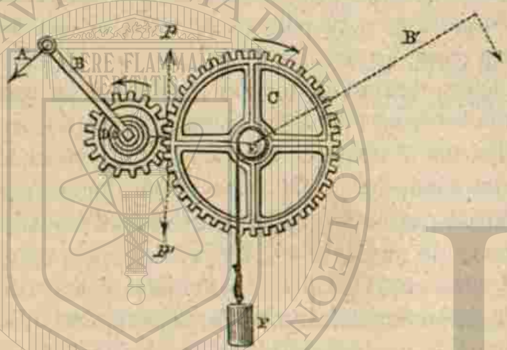

Fig. 52.

Mas, debe notarse que si el radío de la rueda D es la cuarta parte de la barra B que imprime la accion de las fuerzas, en este caso la presion P' será cuatro veces mayor que A. Empero, á su vez la fuerza P será asimismo cuatro veces mayor que A, y por consiguiente, para vencer la resistencia del cuerpo F, aquella fuerza podrá substituirse por otra idéntica en un todo á la de A, obrando sobre la barra B', cuya longitud sea cuatro veces mas grande que el radío de la rueda E.

Así, elevando el cuerpo F por la accion de la fuer-

za A aplicado á la barra B, dicha fuerza debe tener la misma magnitud é importancia que si se la hubiera aplicado á B', barra fijada directamente al torno C. Las longitudes de ambas barras están en perfecta

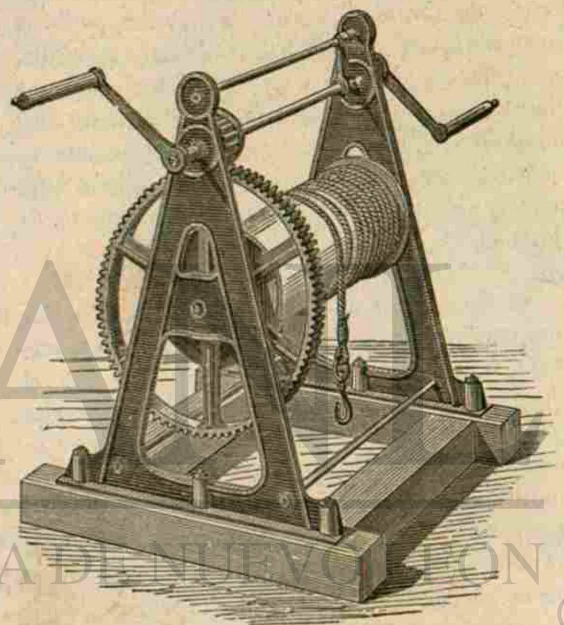

Fig. 53.

relacion con los radíos de las dos ruedas, y por lo tanto con la suma de dientes de cada una.

Finalmente, si la rueda E cuenta cinco, siete ó mas dientes que el piñon, la fuerza *A* levantará un cuerpo cinco, siete y mas veces grande del que elevará suponiendo la barra *B* fija directamente al torno.

El *torno á encaje*, ó de ruedas dentadas, cuyo uso y mecanismo acabamos de explicar, es de la mayor utilidad á la industria humana: en el dia, para aumentar las fuerzas vivas, en vez de una barra que tenian en su orígen, se les ha puesto dos, circunstancia que aumenta considerablemente su potencia, segun podrá calcularse á la simple vista de la preciosa máquina que representa la figura 53.

167. Rueda con clavijas o escalerada. — Nadie ignora cuan difícil era en otro tiempo el trabajo minero y las grandes dificultades que el obrero tenia que vencer para extraer los minerales y escombros de las minas. Pues bien, estas dificultades, que consumian muchos brazos y tiempo inútilmente, se han vencido con el auxilio del torno, armado de una rueda con clavijas en toda su circunferencia, en forma de escalera, á fin de que los hombres que la comunican el movimiento puedan pasar de un escalon á otro á medida que la rueda da vueltas en derredor de su eje, como lo demuestra la figura 54. Entiéndase aquí, que hablamos de las minas que comunican por medio de pozos verticales con el exterior.

Empero, no dejaríamos satisfecha la curiosidad

ó el deseo de aprender que tendrán nuestros lectores si, por no aumentar las páginas de este

Fig. 54.

Manual, no explicásemos el uso y efectos de esta máquina, y con este objeto bueno es que entremos en los pormenores de su accion y manera de funcionar.

Aquí el hombre no presta á la máquina mas que el peso de su cuerpo, y por lo mismo esta fuerza es siempre igual, por cuanto no está en su poder el variarla segun quisiera, como sucede en otras máquinas donde comunica la fuerza motora con el auxilio de sus brazos. Empero, si es cierto que no puede modificar dicha fuerza, le es fácil variar de posicion subiendo ó bajando un escalon, por cuyo medio puede equilibrarse con el peso y dominar la resistencia que este le ofrece hasta el punto de vencerla completamente sacando el mineral y escombros que produce la mina.

Así las cosas, supongamos que el jornalero ocupa el punto A (fig. 55), en cuyo caso debe considerarse su peso como si obrara sobre el brazo de la barra CB. Si de esta posicion el hombre se traslada á E necesariamente debe aumentar el brazo de la barra, logrando de este modo hacer equilibrio al peso que desea sacar del fondo de la mina. Entonces el peso del cuerpo del hombre y el del mineral y escombros serán proporcionales, de una manera inversa, á los brazos de la barra CB CD. Ahora imaginemos que A es la posicion que debe ocupar el jornalero para equilibrarse con el mineral; pero si de A sube á E, aumentará la longitud de la barra de la distancia que media de A á E; y como el peso de su cuerpo permanece siempre inalterable, resulta que aumenta su accion lo bas-

tante para mantener con una parte el equilibrio precedente y determinar con la otra el movimiento de la máquina en el sentido de la flecha F. El movimiento de la rueda vuelve al operario al punto

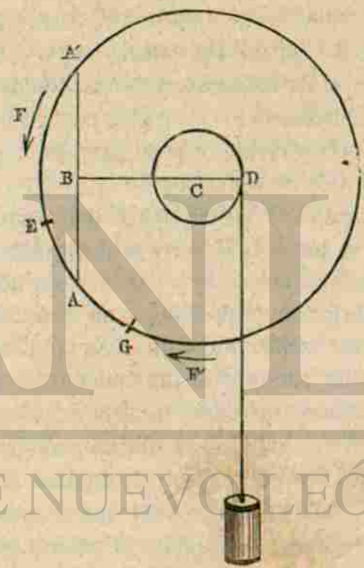

Fig. 55.

A de donde acababa de salir, pero inmediatamente vuelve á subir el otro escalon para volverse á encontrar en E, cuyo ejercicio continúa hasta que logra su objeto.

Mas si de A el jornalero bajase á G, entonces su peso no podria mantener el equilibrio del mineral que se propone extraer, y la máquina se pondria á dar vueltas con el movimiento contrario que indica la flecha F' en razon de que este descenso de A á G disminuia el brazo de la barra tanto como lo aumentaba antes pasando de A á E.

De lo expuesto resulta que el punto A señala la posicion del equilibrio estable entre el peso del hombre y el del mineral; pues ya suba de A á E, ó que de A descienda á G, la rueda, en su movimiento natural ó contrario, volverá siempre el jornalero al punto A de donde parte.

Si en vez de la posicion A el jornalero ocupara la de A', el brazo de la barra se encontrará tambien en la misma línea $C B$, y por lo tanto conservará el equilibrio; empero, este ya no será estable, carácter que conservará aun cuando suba ó baje de A', pues siempre el movimiento de la rueda, bajo la presion indicada, lo alejará mas y mas del equilibrio estable que se obtiene siempre que el hombre ó los hombres ocupen el punto A.

Debe cuidarse, para evitar las desgracias que ocasiona la ignorancia de los jornaleros que manejan este torno, de que el equilibrio se conserve en el estado de estabilidad indispensable para que el mineral no les arrastre y precipite al abismo. Así, deberá colocarse la posicion A mucho mas bajo del eje de la rueda con el doble objeto de precaver los accidentes y de sacar todas las ventajas que ofrece esta máquina.

168. Correa ilimitada ó sin fin. — Esta correa se usa en los talleres compuestos de diversas máquinas destinadas á diferentes trabajos, y que para economizar tiempo y brazos se ponen en movimiento por la accion de una sola máquina motora, ya sea esta hidráulica ó de vapor. Dicha máquina motor hace dar vueltas á las varias ruedas ó cilindros colocados en fila por toda la extension de la fábrica, guardando cierta distancia unas de otras á fin de que las correas que deben transmitir el movimiento de rotacion de un árbol á otro paralelo entre sí, puedan abrazar el tambor fijo en cada uno de los expresados árboles. Su combinacion es tan ventajosa, que causa maravilla el ver como una sola máquina pone en movimiento á otras numerosas simples y compuestas, como lo son las inventadas para trabajar en los metales, serrar las maderas, mármoles, y preparar é hilar la seda y el algodon, etc. Así, representarémosla por medio de la figura 56, que dará una idea del órden y manera como funcionan un batallon de máquinas, formado en batalla en salones sumamente extensos, como se ven muchos en Inglaterra y Francia.

Pues bien, la correa arrastrada por el movimiento de rotacion del árbol $B C$ pone en movimiento la rueda que vemos en la parte inferior; para dejarla en reposo solo basta dirigir hácia el lado izquierdo el extremo D del resorte $D F$ que, terminado en dos dientes, puede moverse en derredor del árbol de dicha rueda. Estos dientes ú orquilla, por donde pasa la correa, se dirigen entonces hácia la derecha, y la correa llevada por

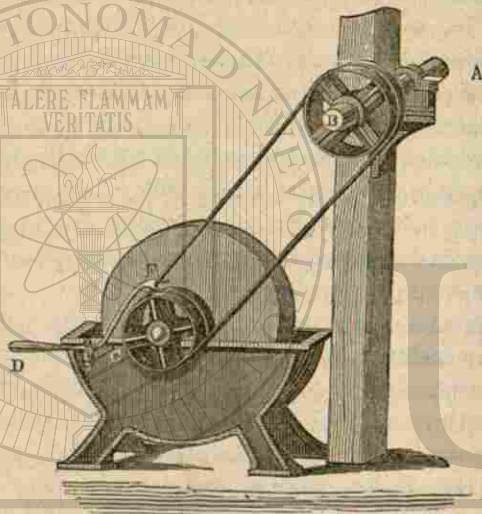

Fig. 56.

dicha horquilla pasa y se enrosca en otra rueda ó tambor colocados al costado de la máquina donde operaba antes. Este segundo tambor, llamado *polea loca*, no está fijo al eje que lo traspasa, y en su virtud puede moverse con toda libertad sobre este árbol, visto que la presion de la correa le hace dar vueltas sin que dicho árbol participe de su movimiento.

Para poner otra vez en movimiento la rueda, no hay mas que volver á dirigir la horquilla hácia la derecha, y la correa, entrando inmediatamente entre sus dientes, como estaba antes, la hará funcionar todo el tiempo que se quiera.

III. Equilibrio y trabajo de las fuerzas aplicadas á una polea fija ó móvil.

DEFINICION. — *Polea* es un cilindro circular de pequeña altura, sobre cuya superficie convexa se ha practicado cierta especie de canal para recibir una cuerda. Muévese en derredor de un eje que pasa por el centro de sus bases. Una chapa abraza y suporta las extremidades del eje.

La polea es fija cuando el eje está fijo, y entonces solo puede moverse al rededor de su eje; y es *móvil* cuando lo es el eje: en este caso cambia de lugar en el espacio á medida que da vueltas.

170. La figura 57 representa una polea fija. La cuerda que pasa por la polea suspende un cuerpo á uno de sus extremos, y la otra la empuña la mano de un hombre que debe mantener el peso en equilibrio, ó se fija á una máquina para que la aplique la fuerza de traccion necesaria. Ambas fuerzas ejercen su accion siguiendo las dos partes rectilíneas de la cuerda, y se encuentran bajo las mismas condiciones que si obrasen á los extremos

de una palanca curva, formada de los radios que unen el centro de la polea á los puntos de contacto

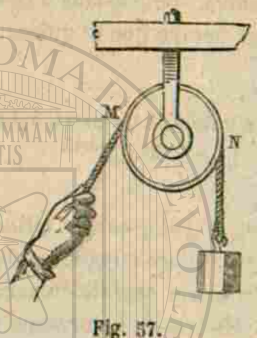

Fig. 57.

M y *N* de la cuerda con la circunferencia. Así, es necesario para que la fuerza de traccion sea igual al peso del cuerpo que mantiene en equilibrio, que los dos brazos de esta especie de palanca sean iguales.

De aquí se deduce, pues, que para que una polea fija esté en equilibrio ó dé vueltas con movimiento uniforme, es necesario y basta de que la potencia sea igual á la resistencia.

La potencia no tiene ventaja alguna en esta máquina, y por esta razon no puede servir sino para cambiar la direccion de la fuerza. En su virtud, nadie se extrañará de que la denominen *polea de vuelta ó de retorno.*

171. Equilibrio de las fuerzas de la polea móvil. — Las poleas móviles, representadas por las figuras 58 y 59, están sostenidas y abrasadas por una cuerda de la cual el extremo *F* está fijo y el otro solicitado por la potencia (muchas veces con el auxilio de una polea fija). La chapa lleva unido un gancho para suspender el cuerpo.

Tan luego como se establece el equilibrio, las dos partes de la cuerda que se separan de la polea por ambos lados deben poseer la misma tension, y la resultante de dichas tensiones, por consiguiente, deberá ser igual al peso del cuerpo que suporta la polea. En el caso representado por la figura 58, la fuerza de traccion será, pues, la mitad de dicho peso. Mas en el de la figura 59 se prolongarán ambas partes de la cuerda hasta su encuentro en *D*: se conducirá por dicho punto una vertical sobre la cual se tomará la longitud *DA* que representa el peso sostenido por la polea. Luego se conducirá *AB*, *AC* paralelas á ambas partes de la cuerda, y las líneas obtenidas *DB*, *DC* figurando las tensiones de la cuerda, la fuerza de traccion será igual á una de ellas. Así, siendo iguales las tensiones de las cuerdas, las líneas *DB*, *DC* deberán tener la misma longitud, y por lo tanto, ambas partes de la cuerda se inclinarán igualmente, ó deberán estar idénticamente inclinadas á la vertical *DA*.

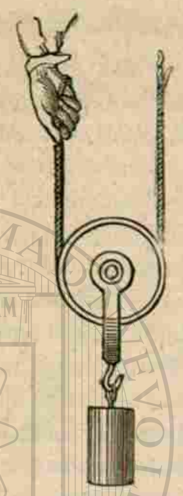

Fig. 58.

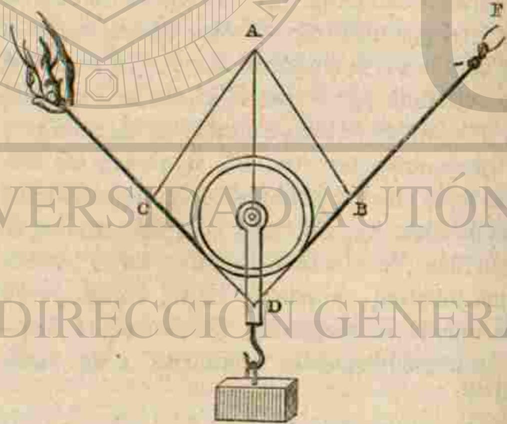

Fig. 59.

IV. De las poleas ó garruchas polipastas.

172. Definicion. — Una polea ó garrucha polipasta es un sistema de dos ó mas chapas, la una fija y la otra móvil, que contienen cada una varias poleas reunidas, ya sea sobre ejes particulares, ó sobre un mismo eje. Una misma cuerda, atada por un extremo á una de las chapas, se enrosca en diversas poleas pasando alternativamente de la chapa móvil á la chapa fija y de esta á aquella hasta que al fin sale por la polea opuesta, pero de chapa paralela, á la en que se fijó la cuerda. Así dispuesto, se aplica una potencia á esta extremidad libre de la cuerda, con el fin de poner en equilibrio el cuerpo que se engancha en las garruchas inferiores (fig. 60).

Examinando detenidamente la cuerda en todos sus contornos ó longitudes, se observará que los cordones ó cuerdas que van de una chapa á otra son paralelos, y tienen el mismo grado de tirantez; de manera que si las seis partes de la cuerda sostienen el peso que se trata de levantar, la tirantez de cada una de ellas será equivalente á la sexta parte del peso del cuerpo suspendido.

La potencia aplicada al extremo libre de la cuerda, que determina esta tirantez, será por consiguiente seis veces mas pequeña que el peso con el cual se equilibra. Y la razon es porque en

Fig. 60.

una garrucha polipasta en equilibrio, la potencia es á la resistencia como la unidad al guarismo de las que van de una polea ó chapa á otra.

173. Trabajo de las fuerzas en esta máquina. — Luego que en el movimiento dado á una polea polipasta, estando en equilibrio, la chapa móvil ha recorrido una longitud dada, todas las cuerdas que pasan de una chapa á otra se acortan ó prolongan á la vez de la misma cantidad. Por consecuencia, los trabajos respectivos de la potencia y de la resistencia son iguales en razon del equilibrio.

174. Observacion. — Lo que se ha dicho de la palanca puede decirse tambien de la polea ó garrucha polipasta. Y efectivamente, nadie nos tachará de exageracion cuando se reflexione que con una fuerza dada se puede poner en equilibrio con el cuerpo mas voluminoso y pesado que pueda imaginarse. Con este fin solo se necesita aumentar el número y potencia de las poleas y cuerdas, pues, como se deja expuesto, para vencer la resistencia es forzoso dividirla por el número total de las cuerdas ó poleas que se empleen con este objeto.

CAPITULO IV

Del plano inclinado.

175. Equilibrio de un cuerpo sobre un plano cualquiera. — Cuando un cuerpo se halla oprimido contra un plano fijo, y perfectamente unido por toda la superficie, por una fuerza dada, esta fuerza puede descomponerse en otras dos, una normal al plano y la otra situada en dicho plano. La primera, destruida por la resistencia del plano, no puede imprimir al cuerpo movimiento alguno; la segunda, sí, conserva toda su accion y produce todos sus efectos.

Por consecuencia, puede uno sentar este principio, á saber : *Que es necesario y basta que la fuerza sea normal al plano para obtener el equilibrio del cuerpo.* Mas aunque el cuerpo se apoye sobre una superficie curva, no por esto derogará á la ley que acabamos de establecer, porque puede substituir su plano tangente á la superficie, en el punto considerado, y así, *para obtener el equilibrio, la fuerza debe ser normal á la superficie en el expresado caso.*

De lo expuesto se desprende que una superficie perfectamente unida y aun pulimentada solo puede destruir las *presiones* normales, y esto oponiendo á dichas fuerzas *resistencias* iguales y contrarias.

176. Condiciones del equilibrio de un cuerpo sobre un plano. — Cuando un cuerpo recibe la accion de algunas fuerzas, entre las cuales figura la de su propio peso, y no se apoya sobre un plano fijo, ó sobre una superficie sólida mas que por el solo punto de contacto, es necesario, para que se ponga en equilibrio, que dichas fuerzas queden destruidas por la resistencia de la superficie, fuerza única normal aplicada al expresado punto de contacto.

Mas este equilibrio no podrá lograrse, como se deduce de estas explicaciones, sino observando las tres leyes ó reglas siguientes :

1.ª *Que todas las fuerzas tengan una resultante única.*
2.ª *Que esta resultante sea normal á la superficie.*
3.ª *Que pase por el punto de contacto.*

177. Observacion. — Luego que un cuerpo se apoya sobre su plano por muchos puntos de contacto, cada uno de estos puntos determina una resistencia normal al plano. Debe notarse asimismo que todas estas fuerzas son paralelas y de un mismo sentido, y que pueden componerse en una sola, igual á la suma de todas ellas, normal, por consiguiente, al plano, y cuya direccion va á

parar al interior del polígono que forman los puntos de contacto.

Por fin, es necesario que todas las fuerzas que ejercen su accion sobre el cuerpo se equilibren completamente con la resultante. En suma, todo lo que precede puede reducirse así : *Que todas las fuerzas expresadas tienen una resultante única, normal al plano y dirigidas hácia el interior del polígono que forman los puntos de contacto.*

178. Momentos y grados de estabilidad de un cuerpo pesado. — Luego que un cuerpo descansa sobre un plano horizontal, las reacciones del plano en los diversos puntos de contacto son fuerzas verticales, cuya resultante, siendo tambien vertical, cae necesariamente en el interior de la figura formada por estos puntos. Por lo tanto, para que el equilibrio exista es menester que esta resultante destruya el peso del cuerpo, y que la vertical que pasa por el centro de gravedad encuentre asimismo en su interior la superficie de apoyo. Pues bien; si una vez satisfecha esta condicion, el cuerpo, impedido por una causa cualquiera, no puede deslizarse sobre el plano, en este caso, y sin turbar el equilibrio, deberá aplicársele cierta fuerza que determine el movimiento, cuidando, para obtener el efecto, que la resultante de la fuerza añadida no caiga fuera de la superficie de contacto.

Ahora, fácil es de conocer el *momento de la estabilidad* de un cuerpo sobre su plano; este no es otro, segun se concibe, que el instante en que el cuerpo resiste á la fuerza que le impele á moverse, instante que se repite tantas veces cuantas el cuerpo tiende á conservar su posicion de quietud, ó que se opone al movimiento de rotacion que se le imprime.

Generalmente, el momento de estabilidad de un cuerpo que descansa sobre el suelo varía con el arete que se toma por eje de rotacion, ó con el elemento rectilíneo del contorno de su base, en cuyo rededor el movimiento tiene lugar. Así, se comprende que este momento es susceptible de un *mínimum* que corresponde al eje mas inmediato al pié de la vertical que pasa por el centro de gravedad. Si esta vertical encuentra el contorno de la base, entonces el *mínimum* es nulo, y será negativo si cae fuera, y en tal caso no se podrá de modo alguno obtener el equilibrio, porque el cuerpo se moverá en derredor del elemento mas inmediato, siempre que para evitarlo no se le oponga una fuerza suficiente, cuyo momento, con relacion al eje, debe ser, cuando menos, igual al de resistencia del cuerpo.

En suma, para que la estabilidad de un cuerpo pesado sobre un plano horizontal quede asegurada, es necesario que su momento mínimo sea superior á la suma de los momentos de fuerzas que tienden á dirigir su movimiento de rotacion sobre la suma de los momentos de las fuerzas que tienden á contenerlo.

179. Equilibrio de un cuerpo pesado sobre un plano inclinado. — Coloquemos, pues, un cuerpo sobre un plano inclinado sólido y fijo que nada pueda alterarlo: sometámoslo en seguida á dos fuerzas, á saber; la potencia *P* (fig. 61) aplicada á

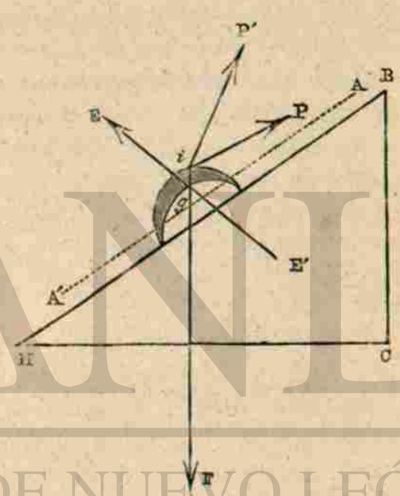

Fig. 61.

uno de sus puntos, y la resistencia *F* (peso del cuerpo) aplicada á su centro de gravedad *g*. Es necesario, además, para establecer el equilibrio, que ambas fuerzas tengan una resultante normal al plano inclinado, y que sean de un mismo plano, el cual, debiendo ser perpendicular al inclinado en virtud de que contiene la normal, y al horizonte en virtud de que contiene la vertical, deberá ser asimismo perpendicular al trazado horizontal del plano inclinado. Pues bien; si ahora se hace una seccion, por este plano, en el sistema que nos ocupa, el horizonte quedará representado por la horizontal HC, el plano inclinado por la recta HB y la inclinacion del mismo por $CHB = i$. Ambas fuerzas, en este caso, van á encontrarse en i, y la resultante, dirigida segun la normal iE', cae en el interior del polígono que forman los puntos de contacto. En este estado, conduzcamos luego por el punto i una paralela iA á HB y designemos con θ el ángulo iPA que hace con esta recta la potencia. Descompongamos la fuerza P en otras dos, en P cos. θ dirigida hácia iA, y la otra P sen. θ dirigida como iE'. Descompongamos tambien el peso F en otras dos fuerzas, la una P sen. i dirigida hácia iA, y la otra P cos. i dirigida siguiendo iE'. Por último, designemos con E la reaccion normal del plano, dirigido conforme iE, y veremos que las condiciones del equilibrio serán :

$$P \text{ cos. } \theta = F \text{ sen. } i,\quad E = P \text{ sen. } \theta + F \text{ cos. } i.$$

La primera ecuacion nos da la relacion que debe existir entre la potencia y la resistencia para obtener el equilibrio, y la segunda la intensidad de la presion que, en el caso supuesto anteriormente, suporta el plano inclinado.

Esta última podrá escribirse tambien, si se quiere, de este modo :

$$E = F \left(\text{cos } 1 + \frac{P}{F} \text{ sen. } \theta\right.,$$

ó bien reemplazando $\frac{P}{F}$ por su verdadero valor $\frac{\text{seno } i}{\text{coseno } \theta}$ (que es la primera ecuacion), y simplificando $E = F \frac{\text{coseno } (i - \theta)}{\text{coseno } \theta}$.

180. Observacion. — Tanto para los casos explicados como para todos los demas que puedan imaginarse, debe tenerse presente :

1.° *Que la potencia paralela al plano inclinado es al peso que la mantiene en equilibrio, como la altura del plano á su longitud.*

2.° *Que la potencia horizontal es al peso que mantiene en equilibrio sobre el plano inclinado, lo que la altura de este es á su base.*

3.° *Que cuando las dos fuerzas se hacen equilibrio sobre el plano inclinado, el trabajo motor es igual al trabajo resistente respecto á todos los cambios compatibles con las condiciones del sistema.*

181. Otra observacion. — Todo cuanto dejamos dicho en el segundo extremo del párrafo 178, puede aplicarse á los casos en que el cuerpo descansa sobre un plano inclinado. Queda en equilibrio si la

vertical conducida por su centro de gravedad encuentra la superficie de apoyo, y su estabilidad será tanto mayor cuanto mas lejana se halle esta vertical del elemento en cuyo derredor puede dar vueltas.

CAPITULO V

De las resistencias pasivas, ó de la cohesion y rozamiento de un cuerpo con otro.

I. Diversas especies de resistencia pasiva.

182. — Estudiando ó exponiendo en los capítulos precedentes sobre el equilibrio y movimiento uniforme de las máquinas, hemos omitido, con el fin de consagrarle un capítulo especial, el tratar de la accion é influencias de las resistencias pasivas.

Una máquina, como se sabe ya, está destinada á vencer ciertas resistencias, como son el peso de los cuerpos que tienen que elevar ó arrastrar la cohesion de las moléculas de los cuerpos que debe pulverizar, etc., etc. Empero, debe tenerse en cuenta que además de las resistencias *útiles* se producen otras que emanan de su movimiento, y las cuales, oponiéndose á su marcha, neutralizan una porcion mas ó menos importante de la fuerza motriz.

Comunmente estas resistencias se denominan *resistencias pasivas*.

183. Resistencias pasivas. — Cuatro son las especies de resistencias pasivas que se distinguen, por lo general, en las máquinas.

1.° *La rigidez ó tirantez de las cuerdas.* Hemos supuesto que las cuerdas y las correas son perfectamente flexibles é inextensibles: por lo tanto, se puede no tener en cuenta su inextensibilidad, ya porque por lo comun esta es demasiado débil é insignificante, ya porque solo se nota en los primeros instantes del movimiento; mas no sucede lo mismo en cuanto á su defecto de flexibilidad, puesto que á cada instante ofrece una resistencia continua en los puntos en que la cuerda y la correa se enroscan y desenroscan.

2.° *Rozamiento de la primera especie*, ó de desliz ó escurridura. Hemos supuesto tambien que los cuerpos en contacto estaban perfectamente lisos, y que por lo mismo las presiones que ejercian eran normales á sus superficies. Empero, no sucede así en todos los cuerpos que pueblan la naturaleza, y mucho menos respecto de ciertos cuerpos duros y pesados que las máquinas tienen que suportar, pulir y arrancar muchas veces de la superficie, y aun en realidad, los cuerpos mas duros y mejor alisados están erizados de asperezas que se encadenan ó encajan unas con otras cuantas veces una presion cualquiera las mantiene en contacto, y por lo mismo para deslizar una superficie sobre otra es menester destruir la resistencia que estas asperidades ofrecen al movimiento. Dicha resistencia es con

frecuencia considerable, en términos que pueden compararse á las fuerzas desplegadas ó puestas en accion por las máquinas, y de ahí proviene la necesidad de aplicar un trabajo suficiente, así para producir como para alimentar el movimiento de algunas máquinas.

3.° *El rozamiento de segunda especie* ó de rodadura: esta resistencia es mucho menor que la precedente, y por consiguiente impide menos el movimiento, como fácilmente se concibe.

4.° *La resistencia de los medios.* Como las máquinas se mueven generalmente en el aire ó en el agua, comunican á las moléculas de estos centros un momovimiento que no puede producirse sino á espensas de la fuerza motora.

II. Leyes experimentales del rozamiento.

184. Cuando un cuerpo pesado descansa sobre una superficie plana y horizontal y que se le quiere deslizar sobre ella, se experimenta una resistencia que no puede vencerse sin el auxilio de una fuerza. Y en el caso en que esta fuerza sea insuficiente para determinar el movimiento, será necesario admitir que la reaccion de la superficie sobre el cuerpo se compone no solamente de la presion normal, sino tambien de una fuerza tangencial igual y contraria á la fuerza aplicada. Esta reaccion tangencial constituye el *rozamiento*. A medida que

la potencia crece, crece tambien el rozamiento que sigue siendo igual y contrario á la fuerza motora.

El valor de la potencia en este momento es la medida del rozamiento en el instante de ponerse el cuerpo en movimiento, que se llama *rozamiento de partida.*

Mas luego que dicho cuerpo continúa su movimiento sobre un plano horizontal, segun la velocidad adquirida anteriormente, se observa que su marcha disminuye hasta que llega á pararse enteramente, en lugar de continuar su movimiento constantemente, cosa que se verificara sin duda alguna si la reaccion del plano no fuera mas que normal. Así, es necesario admitir que el cuerpo experimenta de parte de la superficie una reaccion tangencial, llamada por los hombres de la ciencia *rozamiento durante el movimiento.* Ahora, si se aplicara al cuerpo una fuerza tangencial capaz de conservar su movimiento uniforme, esta fuerza destruiria á cada instante el roce durante el movimiento, y le serviria de medida.

185. Coeficiente del rozamiento. — Es necesario admitir, en virtud de lo expuesto, que cuando dos superficies se hallan en contacto, existe entre la presion normal P que ejercen la una sobre otra una fuerza tangencial F contraria y opuesta constantemente á la marcha del cuerpo tanto cuando esta se produce como cuando se halla ya producida. En su consecuencia, representaremos con F

el roce y la presion normal á un momento dado, de suerte que $F = FP$. Esta relacion es lo que se llama *coeficiente del rozamiento.* En seguida se considera mas particularmente su valor : 1.° al instante en que principia el movimiento, y entonces se denomina el coeficiente del rozamiento *á la salida* ; 2.° durante que una de las fuerzas se desliza sobre la otra, y en este caso se llama coeficiente del rozamiento *durante el movimiento.*

Componiendo luego en una sola las dos fuerzas P y FP, la direccion de su resultante $P\sqrt{1+f^2}$ formaria con la normal un ángulo cuya tangente seria $\frac{fP}{P} = f$. Luego se representa con γ este ángulo y se le designa con el nombre de *ángulo* del rozamiento. Tenemos, pues, por definicion, tang. $\gamma = f$. El ángulo del rozamiento se considerará especialmente en el momento de principiar el movimiento, *á la partida,* y el ángulo del rozamiento durante el movimiento ; hecho esto fácil es despues de aplicar las leyes que deben regir γ y f.

186. Experiencia de Coulomb. — Este ilustre físico hizo en 1781 las primeras investigaciones sobre el rozamiento. Al efecto se sirvió de la máquina que representa la figura 62. Compónese de una caja C que llenaba á discrecion de cierta cantidad de peso á fin de que pudiera deslizarse sobre dos planchas de madera colocadas paralela y horizontalmente una de otra. La cuerda ligada á la caja

pasaba por la polea *A*, bajaba verticalmente suspendiendo de este extremo el plato *B*. Una vez cargada la caja, se colocaba en dicho plato el peso suficiente para producir el movimiento, el cual,

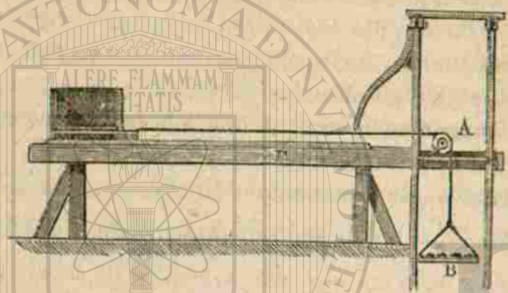

Fig. 62.

unido con el peso específico del plato, da la medida de la fuerza motora y de la del rozamiento que se oponen al principio y á la continuacion del movimiento. Debe tenerse en cuenta que la carga de la caja *C* podia disminuirse ó aumentarse así como la naturaleza de las superficies del plano, cubriéndolas con metales ó cueros, ó bañándolas de aceite, agua, sebo, etc., en el diámetro y longitud de las mismas superficies en que la caja descansaba, y se movia tan luego como quedaba bajo de la accion de la fuerza motora.

He ahí, pues, como Coulomb ha podido investigar las leyes del rozamiento á la *partida* del cuerpo

y *durante su movimiento*; empero, así como las experiencias de *Amontons*, Coulomb no pudo demostrar con toda la claridad necesaria las del rozamiento durante la marcha del cuerpo, sin duda porque no empleó para hacer estas útiles experiencias los elementos de que se ha valido el célebre Mr. Morin.

Sin embargo, no puede negarse que Mr. Coulomb ha hecho un servicio eminentísimo á la ciencia enriqueciéndola con las leyes siguientes, confirmadas por las experiencias de dicho Morin y demas físicos que las han comprobado.

III. Leyes del rozamiento halladas por Mr. Coulomb.

187. 1.ª LEY. — *En ciertos cuerpos el rozamiento es mayor en el momento de la partida que durante el movimiento.* Los cuerpos duros y elásticos como el hierro, el acero, la plata, etc., pertenecen á la segunda categoría, y las maderas, cueros, etc., corresponden á la primera.

Ya hemos indicado que la carga del plato en el momento de la partida es la medida de la intensidad del rozamiento inicial. Pues bien; la velocidad inicial comunicada á la caja se conserva constantemente en ciertos cuerpos sometidos á la accion de la potencia del plato. Siendo esto así, como lo es efectivamente, debe convenirse en que el roce es invariable en dichos casos. Esta velocidad aumentaba, por el contrario, en otros cuerpos sometidos á la misma experiencia. Luego el rozamiento *de la partida* disminuia *durante el movimiento.*

188. 2.ª LEY. — *El rozamiento durante el movimiento es independiente de la velocidad.*

Hé aquí como Coulomb operó para verificar esta ley. Cargó el plato del peso necesario para lograr un movimiento uniforme; obtenido, lo comunicaba al sistema de una velocidad diferente, y observó cuantas veces lo practicó así, que el movimiento permanecia siempre uniforme.

La misma consecuencia se obtiene haciendo el experimento respecto del movimiento variado que resulta de una carga cualquiera puesta en el plato. Con este fin, deben medirse los espacios recorridos y los tiempos gastados en recorrerlos, en seguida construir y apreciar la curva de los espacios, segun las reglas dadas en la primera parte de este MANUAL, y muy luego se evidenciará que el movimiento de la caja es uniformemente acelerado, y que el rozamiento es constante durante todo el movimiento, cualquiera que sea la velocidad inicial.

En seguida puede calcularse su valor, cosa que se consigue con la mayor facilidad.

189. 3.ª LEY. — *Los rozamientos en el momento de la partida, y durante el movimiento, son proporcionales á la presion.* (Con tal, sin embargo, que dicha presion no sea sumamente considerable.)

Para verificar la ley precedente es necesario examinar si las superficies que se rozan entre sí permanecen constantes, cualquiera que sea el peso del plato, y deducir la relacion llamada el *coeficiente del rozamiento.*

190. 4.ª LEY. — *El rozamiento de partida y el rozamiento durante la marcha del cuerpo son independientes de la extension de las superficies en contacto.*

Esta ley puede comprobarse variando la extension de las superficies sin cambiar su naturaleza. Así, supongamos que un cuerpo se desliza por un mismo plano poniendo sucesivamente en contacto con dicho plano superficies de diversa extension, cuya relacion sea r. En el primer caso la presion será distribuida sobre una superficie r veces mas grande que en el segundo; por consiguiente, cada elemento superficial suportará una presion r veces mas pequeña, y su rozamiento será asimismo r veces menor; y como los elementos son r veces mas numerosos, resultará en definitiva que el rozamiento será siempre el mismo.

Debe observarse que si la superficie del cuerpo tuviese asperidades tan fuertes y agudas que pudieran penetrar en la superficie en que se apoya, entonces dicha ley seria inaplicable.

191. 5.ª LEY. *El rozamiento varia conforme el grado de union y lisura de las superficies en contacto, y de la naturaleza de las capas de aceites con que se hallen revestidas.*

Luego expondremos el cuadro que Mr. Morin ha hecho para demostrar las experiencias practicadas por él mismo con el fin de fijar las variaciones del rozamiento en el sentido que indica la ley precedente.

192. Perfeccionamiento del precedente método por Mr. Morin. — Este ilustre físico, en 1831, estudió y comprobó las leyes anteriores, valiéndose de elementos mas adecuados y de mayor precision que los empleados por su antecesor, puesto que perfeccionó de la manera siguiente los ya empleados por Mr. Coulomb.

Unió un ancho disco de cobre, cubierto de papel, al eje de la polea que transmitia á la caja la accion del plato. A este disco puso un pincel bañado en tinta de China que, recibiendo de una máquina semejante á la de un reloj su movimiento uniforme de rotacion en derredor de un eje paralelo al de la polea, trazaba sobre el papel una curva cuya naturaleza dependia de los movimientos. Con este auxilio, admirable por su eficacia y exactitud, Mr. Morin observó las leyes de su distinguido predecesor.

193. Experiencias de Mr. Morin. — La dificultad que presentaban las investigaciones relativas al rozamiento de los cuerpos, consistian, como queda expuesto, en conocer las leyes del movimiento producido por el peso colocado en el plato;

tal era lo que se deseaba vencer, y á Mr. Morin cupo la suerte de dar la última mano á este descubrimiento. Veamos como operó con la adicion de su mecanismo al plano precedente.

Supongamos *O* el centro del disco (figura 63) é *I* el del pequeño círculo que describiria el pincel sobre el disco inmóvil. Supongamos tambien que el movimiento del reloj hace recorrer al pincel los arcos iguales *A B′ B′ C*... en un segundo cada uno, y que *A B C*... es la curva trazada por él en el disco en virtud del doble movimiento. En el momento

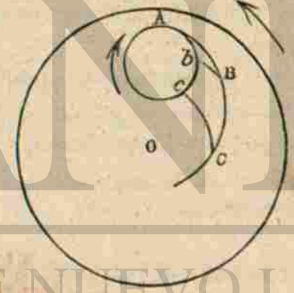

Fig. 63.

de partida el pincel se encuentra en *A* y en *b* al fin de un segundo; pero por causa del movimiento del disco, el punto *B* se coloca sobre su punta de manera que el disco ha vuelto del ángulo *b O B* durante el primer segundo. Al cabo de dos segundos el pincel está en *c*, y sin embargo marca el punto *c O C* durante el segundo siguiente. Así, se observa que pueden obtenerse los ángulos formados por el disco, en un segundo cada uno, describiendo desde el punto céntrico *O* los arcos *b B*, *c C*..., hasta el encuentro con la curva *A B C*.

Ahora bien; dichos ángulos son proporcionales á los arcos descritos por un punto cualquiera de la circunferencia de la polea, y por lo tanto á los caminos recorridos por la caja. Su lectura hacia conocer, pues, los espacios andados en funcion del tiempo, y como estos espacios eran proporcionales á los cuadrados de los tiempos, Mr. Morin concluyó que el movimiento de la caja era uniformemente acelerado.

Desde luego el ángulo descrito durante el primer segundo le revelaba el camino hecho en el mismo tiempo por la caja ó carreton, y en su virtud dobló luego el camino y obtuvo por último resultado la aceleracion.

194. Tabla resumida de los coeficientes usuales del rozamiento. — Mr. Morin multiplicó sus experiencias durante tres años consecutivos con numerosos cuerpos diferentes, y valiéndose de sebo, aceite, etc., para moderar las resistencias que ofrecian sus respectivas superficies, segun se observa en las *Memorias* de este ilustre físico que encontramos en los tomos cuarto y sexto *De los sábios extranjeros*. Empero, aquí nos limitamos á

consignar cierto número de los resultados que obtuvo, y que sirven para apreciar los movimientos de las máquinas.

SUPERFICIES EN CONTACTO.	COEFICIENTE DEL ROZAMIENTO	
	DURANTE EL MOVIMIENTO.	A LA SALIDA.
Madera sobre madera seca.............	0,50	0,36
— mojada con agua...............	0,68	0,25
— untada de sebo...............	0,19	0,07
— con jabon seco...............	0,36	0,14
— sobre metales ó seco...........	0,60	0,42
— mojados con agua..............	0,65	0,24
— dados con sebo á manteca.....	0,12	0,07
Cuerdas de cáñamo sobre madera ó seco.	0,63	0,45
— — mojadas de agua...	0,87	0,33
Metal sobre metal con aceite de olivas...	0,12	0,07
— — con manteca.........	0,10	0,09
— á seco........................	0,18	0,18
Correas sobre metal con manteca.......	0,28	0,18
— — á seco...	0,54	0,30
— sobre madera á seco...........	0,47	0,30

IV. Resistencia de los fluidos.

195. La resistencia que el rozamiento de los cuerpos experimenta en la superficie de la tierra, la experimentan igualmente los cuerpos en los fluidos, de suerte que cuando un cuerpo se mueve en

este elemento, experimenta una resistencia que tiende siempre á disminuir y paralizar su velocidad. Esto emana, como se desprende de cuanto dejamos dicho sobre esta cuestion, en que el cuerpo en su marcha comunica su movimiento á las moléculas del fluido que encuentra á su paso. Comparando, pues, esta resistencia á la que produce el rozamiento, se verá que son por su esencia diferentes una de otra.

Efectivamente, luego que se quiere deslizar un cuerpo sobre una superficie, se opera una resistencia antes que el cuerpo haya principiado su movimiento, y aunque esta resistencia subsiste durante el movimiento, se disminuye en seguida y no varía con la velocidad del cuerpo deslizado. Mas no sucede lo mismo en los fluidos : mientras que el cuerpo no está en movimiento, esta resistencia no se hace sentir; solo se revela y desarrolla durante el movimiento, y cambia considerablemente á medida que el movimiento se acelera.

Por cierto, no es este el momento de tratar la cuestion, porque su importancia es tal que necesita un libro especial; empero, apuntaremos sin embargo que esta resistencia es proporcional á la extension de la superficie que choca directamente con las moléculas del fluido, y al cuadrado de la velocidad con que se produce este choque. Inútil será el decir que esta resistencia es mucho menor en el aire que en el agua, pues nadie ignora que

aquel es mucho mas ligero y sutil que esta que es pesada y mas compacta sin comparacion alguna.

196. **Máquina para experimentar la resistencia de los fluidos.** — Cuando se aumenta la superficie que encuentra directamente las moléculas líquidas ó gaseosas, se aumenta en la misma proporcion la resistencia que estos la oponen, como lo demostraremos con el auxilio de la figura 64. Compónese esta máquina de dos ruedas *B* y *C* montadas en un eje particular á cada una, y sumamente movibles sobre sus respectivos ejes. Dos llares fijas entre sí se encajan en dos piñones de las mismas dimensiones que mantienen los ejes de ambas ruedas, de manera que si se bajan rápidamente las dos llares, procediendo como lo indica la figura 64, hasta que ya no encajen con los piñones, que podrán dar vueltas libremente en las sesgaduras ó carcelillas *A A*, se comunica á las dos ruedas con la mayor exactitud la misma velocidad de rotacion. Cada rueda se forma de cuatro aletas. En la rueda *B*, estas están fijas al eje y vienen á encontrar el aire solamente por sus extremos. Por el contrario, en la rueda *C* las alitas son movibles y pueden colocarse del mismo modo que las de *B*, ó inclinarse mas ó menos, siguiendo la direccion del movimiento; aun pueden disponerse de manera que reciban el aire de frente mientras que giran sobre su eje. Cuando las alas

de la rueda *C* se han puesto en la misma disposicion que las de *B*, y que se las hacen dar vueltas

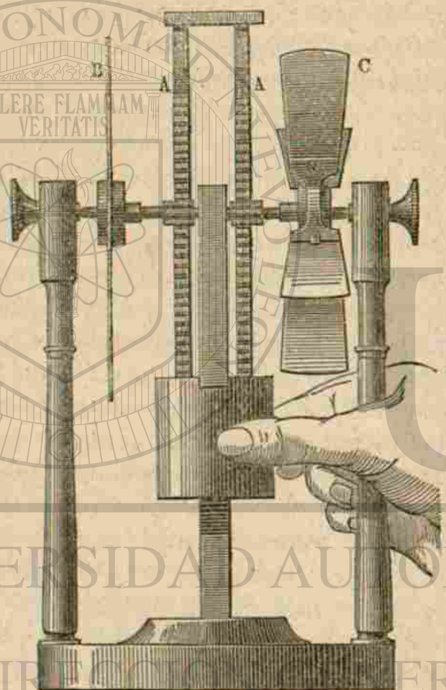

Fig. 64.

con las llares, se moverán durante largo tiempo y pararán casi á la vez. Mas si las alas de la rueda *C*

se colocan diversamente, ó segun representa la figura, entonces el movimiento de esta rueda disminuye y cesa mucho antes que el de la otra, disminucion que se nota tanto mas cuanto las alas se hallen mas de frente á la corriente del aire.

CAPITULO VI

Del estudio de las máquinas en estado de movimiento no uniforme.

1. De los volantes.

197. Volantes. — Hay numerosas máquinas que no pueden producir el movimiento uniforme, y de aquí la necesidad de regularizar, en cuanto sea posible, la marcha de las mismas con el fin de que la velocidad de cada una de sus piezas no aumente ni disminuya mas allá de los límites á que debe circunscribirse.

Cuando la potencia es mucho mas superior que las resistencias que tiene que vencer, el movimiento de la máquina se acelera considerablemente; esto no necesita demostracion; empero, debemos conocer que esta aceleracion es proporcional á la magnitud y disposicion de las piezas de las máquinas sujetas á la accion de la fuerza que la produce. Ahora bien; la cantidad de movimiento producido por esta fuerza debe distribuirse, como fácilmente se concibe, entre todas las piezas que funcionan á la vez, y por lo tanto cada una recibirá la bastante para llenar su objeto. Sucede que esta distribucion no puede verificarse con la medida exacta que fuera de desear, y para remediar este inconveniente se han fijado á la máquina cuerpos duros y pesados con el solo fin de aumentar la resistencia y hacerlas menos sensibles á la accion de las fuerzas aceleradoras, y por consiguiente con el de modificar, segun convenga, la velocidad del movimiento.

Hay quien supone que estos cuerpos duros y pesados añadidos á la máquina, no exigen en ella el aumento de la fuerza que alimenta su movimiento, y que si las resistencias son las mismas, la misma debe ser tambien la potencia que ha de vencerlas, lleven ó no fijos dichos cuerpos, visto que estos solo tienen la mision de estrechar los límites en cuyo círculo puede variar la velocidad de la máquina. Mas nosotros, siguiendo la opinion de eminentes físicos, no podemos menos de afirmar que adaptando un cuerpo pesado á un arbol cuando gira, este cuerpo aumenta la presion del árbol sobre sus puntos de apoyo, y en su virtud el rozamiento debe ser mayor que antes de la adicion del cuerpo, y la potencia suministrada á la máquina debe ser aumentada para vencer el exceso del rozamiento. Con todo, tampoco podemos negar que la adicion de dichos cuerpos necesita muy poco

aumento de fuerza motora, y en algunos casos es tan débil que puede pasar como desapercibida sin exponerse á inconveniente alguno.

Generalmente estos cuerpos ó masas adicionales tienen la forma de una rueda, ó de dos ó tres rayos terminados en forma circular como lo demuestran las figuras 65, 66 y 67, y se llaman volantes, cualesquiera que sean sus formas.

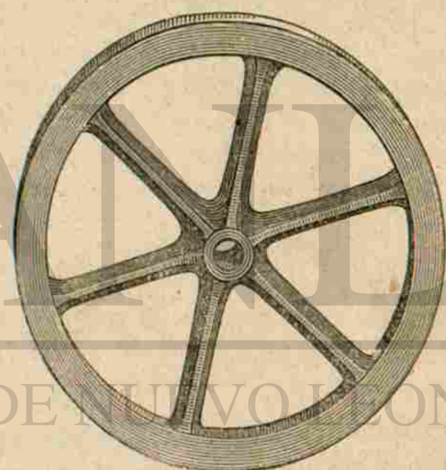

Fig. 65.

La precedente rueda adaptada al árbol de la máquina cuya velocidad se desea disminuir, participa del movimiento de rotacion del expresado árbol, y la aceleracion de su circunferencia será tanto mayor cuanto mas grande sea el *volante* ó la rueda adaptada.

Fig. 66.

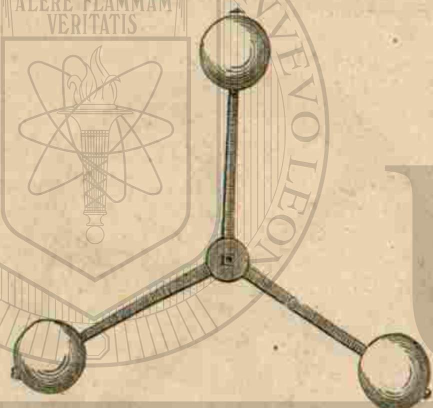

Fig. 67.

Los volantes representados por las figuras 66 y 67 terminan por un disco, para que con su auxilio puedan cortar y disminuir la resistencia del aire, cuya magnitud está siempre en proporcion de la velocidad de su movimiento, y en su virtud podria ser considerable en ciertos casos.

Colócanse, como el volante, en forma de rueda, y hacen las mismas funciones que esta.

198. Manera de aumentar la potencia de un volante. — Se acrecienta la potencia de un volante, ya sea aumentando su peso sin variar en forma, ya dándole mayores dimensiones sin añadirles mas materia en su fabricacion. Este último medio se emplea con preferencia á fin de no hacer el volante demasiado pesado, y de no sobrecargar mucho el árbol que lo suporta. Por esa razon vemos muchas máquinas de escasa fuerza, armadas de volantes de extensas dimensiones. Sin embargo, no deben exceder de ciertos límites, porque engrandeciéndolos sin aumentar el peso no quedarian bastante sólidos, y por consecuencia correria riesgo de romperse á impulsos de la fuerza centrífuga que se desenvuelve durante su movimiento de rotacion.

199. Resultado que dan los volantes. — Siempre que la potencia es mayor que la resistencia, el exceso de la primera se transforma en movimiento, produciéndose generalmente aceleracion en la máquina. Si la aceleracion es demasiada en términos que sea dañosa á las funciones regulares de la máquina, entonces es indispensable moderarla, y al efecto habrá que usar de los volantes como el único medio eficaz conocido hasta el dia para contener las aceleraciones del movimiento de las máquinas. Mas, si el volante disminuye el aumento de la velocidad, no disminuye sin embargo el efecto que produjera dicho

aumento. El exceso del movimiento ocasionado por la preponderancia del trabajo motor sobre el resistente, se distribuye en muchas mas partes que si la máquina no tuviera volantes, y así, aun cuando la velocidad no cambia realmente, con todo, el exceso del movimiento que se reune en todo el volante, sin que por esta circunstancia se modifique sensiblemente la velocidad, da lugar siempre á la produccion igual de un trabajo resistente.

Efectivamente, cuando el trabajo motor excede al resistente, el exceso del primero se deposita en el volante bajo la forma de movimiento. Esta reserva de trabajo produce una suma igual de trabajo resistente en ciertas ocasiones, como la que se presenta en el momento de principiar el movimiento de la máquina, y durante sus primeros pasos, en cuyos casos se necesita mayor fuerza motora que si los volantes no existieran. Empero, como dejamos ya apuntado, este exceso de trabajo no se pierde, visto que se utiliza en los últimos instantes del camino cuando al parecer se ofrece á la máquina una cantidad igual de trabajo resistente.

Hé ahí porque, considerados bajo este punto de vista, los *volantes* pueden llamarse almacenes ó depósitos de trabajo, para emplearlo cuando el momento lo requiera.

II. De los frenos.

200. Otros medios para aumentar las resistencias pasivas. — Aunque generalmente se trata de producir la mayor suma de trabajo útil con una cantidad dada de trabajo motor, y de atenuar así la influencia de las resistencias pasivas, se presentan, sin embargo, casos excepcionales en que hay necesidad de modificar y moderar la marcha de la máquina, y de aumentar por consiguiente la potencia resistente en proporcion de la disminucion de movimiento que se considera conveniente al objeto que los maquinistas ó conductores se proponen.

Con este fin se ha imaginado un mecanismo sumamente sencillo que aumenta considerablemente el rozamiento de las piezas giratorias, y se llaman *frenos*.

El de los carruajes, como lo vemos cada dia, consiste en una plancha de hierro plana levantada por ambos lados de manera que encaje en la superficie inferior de la rueda hasta impedirla, si se quisiera, el movimiento de rotacion. Unas se hallan sujetas á una cadena de hierro fija en las varas del vehículo, otras se manejan por medio de un mecanismo adaptado al carruaje y á la mano del conductor, á fin de que sin incomodarse en bajar y subir pueda ponerlo en uso segun lo exijan las circunstancias de los caminos que recorre. Empero, estos frenos ya no se colocan debajo de las ruedas, sino detras, como lo demuestra la figura 68.

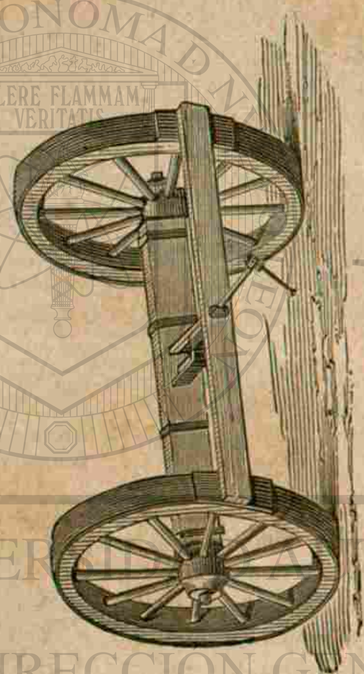

Fig. 68.

Los frenos aplicados á las gruas para moderar el movimiento cuando se quiere descender un cuerpo, sin necesidad de tener aseguradas las

cuerdas con las manos ó torno, consiste en una hoja de hierro batido que envuelve casi enteramente el tambor cilíndrico, fijo al lado de una de las ruedas dentadas. Ambos extremos de la hoja de hierro están unidos por medio de un tornillo en los puntos *A B* dos pequeños brazos de la especie de palanca *D B A* que puede moverse al rededor del punto fijo *C*. Cuando se levanta el tercer brazo, que es el principal y mas largo *D C*, la hoja se estrecha con la superficie del tambor colocado en su interior, y si este tambor se mueve sobre su propio eje, experimenta un rozamiento tanto mas considerable cuanto mayor es la fuerza que se imprima al extremo *D* de la palanca ó brazo principal de ella. La figura 69 nos hará conocer prácti-

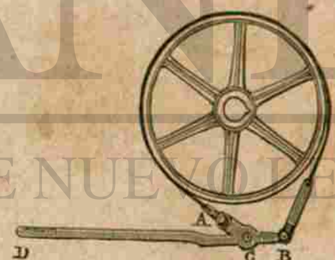

Fig. 69.

camente cuanto queda dicho. Mas, si no fuera conveniente el producir tanta resistencia, se abajará dicho brazo *D*, y en su virtud se disminuirá la opresion hasta dejarla sumamente débil en ciertos casos. Pero cuando el cuerpo se ha elevado mas del punto donde debia quedar, entonces se abandonan los brazos del torno para que descienda en virtud de su propio peso, haciendo mover las ruedas en sentido contrario, sin aumentar la velocidad fuera de sus justos límites, y al efecto se aumenta proporcionalmente la presion del freno hasta que su fuerza resistente se equilibre con la del cuerpo que tiende á descender aumentando su velocidad.

201. Frenos dinamométricos. — Una máquina de vapor en funcion comunica un movimiento de rotacion á un árbol horizontal llamado *árbol* de *couche* ó de tálamo, del cual se toma el que debe transmitirse á las máquinas útiles destinadas á ejecutar sus respectivos trabajos. Así, cuando se quiere medir la potencia de la máquina motora, hay necesidad de incomunicar las máquinas útiles del árbol que las pone en movimiento, y de las resistencias que tiene que vencer. Acto contínuo se añade al árbol una resistencia artificial fácil de evaluar, é inmediatamente, haciendo variar la suma de dicha resistencia, se opera de manera que el movimiento de la máquina motora se encuentre ó quede en las mismas condiciones que cuando transmitia su fuerza viva á los utiles que ponia en accion. Por consiguiente, venciendo esta resistencia y graduándola en seguida, se obtendrá la me-

dida del trabajo realizado por la máquina en circunstancias ordinarias.

La dificultad de esta operacion consistia antes en la adopcion del freno que produjera la resistencia necesaria para ejecutarla, y afortunadamente el célebre físico *Prony* tuvo el honor de resolver la cuestion inventando los frenos dinamométricos que llèvan su nombre. Este freno consiste en una especie de cadena formada de placas de hierro batido, articuladas unas con otras, guarnecidas de pedazos de madera entre articulacion y articulacion; termínase en dos pernos de hierro en forma de tornillo para enlazarse á la otra mitad del freno, compuesta de una barra ó palanca de madera guarnecida de un pedazo de madera circular á fin de que pueda abrazar la parte superior del cilindro que no cubre la cadena. Esta palanca sostiene en el extremo del brazo mas largo un plato destinado á recibir el peso. Ultimamente colócanse convenientemente dos puntos de parada con objeto de mantener la posicion horizontal del freno mientras el árbol gire en su interior.

Ahora bien; supongamos que el árbol *A* (1) (fig. 70) se pone en movimiento por la máquina motriz cuya potencia quiere saberse, y que al efecto se estrechan los tornillos de la cadena *FF* de

(1) La superficie de este árbol debe ser cilíndrico, y no siéndolo, se le deberá adaptar un mango exactamente circular, á fin de que todos los puntos de la superficie estén igualmente distantes del centro del eje de rotacion.

manera que el punto D de la barra y la cadena B' B queden fuertemente aplicados sobre el cilin-

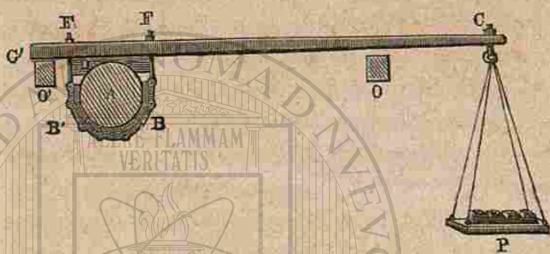

Fig. 70.

dro A. La adherencia y rozamiento que se desarrolla entre el cilindro y el freno arrastrará á la palanca C' C E en su movimiento de rotacion. Pero los puntos de parada O' se oponen obligándola á permanecer en su estado horizontal. Este rozamiento es una resistencia que tiende á destruir el movimiento del árbol, y esto supuesto, ya será fácil calcular la cantidad del movimiento que produce la máquina en circunstancias ordinarias, visto que para lograrlo no hay mas que aflojar los tornillos y graduarlos de manera que nos dé el resultado que se busca. Entonces el trabajo resistente producido por el roce del cilindro con el freno, se toma por la medida del que la máquina puede realizar.

Veamos ahora cómo se evalúa este trabajo. Pon-

dráse peso suficiente en el plato P á fin de que la palanca C' C se mantenga horizontalmente, sin tocar los puntos de parada O y O'. No chocando con dichos puntos, entonces la palanca se hallará equilibrada por la accion de las fuerzas del roce del árbol con el freno, y del peso colocado en el plato.

Lo que precede, quizas no diera la inteligencia necesaria para hacer dicha evaluacion, y por esta razon, para simplificar la operacion, parécenos conveniente el dejar de lado el peso del freno incluso el de su plato, y suponer F el peso total colocado en el mismo. Supongamos así mismo que Q es la fuerza única, en vez de las varias que ejercen su accion en la circunferencia del árbol. Así, el freno, debiendo moverse al rededor de dicho árbol, no podria permanecer en equilibrio si las fuerzas no fueran proporcionales á sus distancias respectivas de sus propios ejes, ó, lo que es lo mismo, inversamente proporcionales á las circunferencias del círculo, cuyos radios son dichas distancias. El producto de la fuerza del rozamiento Q se multiplicará por la circunferencia del eje del árbol á la vertical que pasa por el punto E'. Empero, el primer producto no es otra cosa mas que el trabajo hecho por la expresada fuerza Q durante una vuelta entera del árbol : el segundo, que puede evaluarse con facilidad, es el que servirá de medida al mismo trabajo. Al efecto se multiplicará el segundo producto por un cuarto de hora ó por una hora, segun mejor convenga, para tener la suma total de trabajo que la máquina puede hacer en el mismo tiempo.

Idéntico resultado se obtendrá si en vez de la única fuerza *Q* que acabamos de suponer como aplicada al freno, se distribuyesen otras muchas en diversos puntos del cilindro que comunica el movimiento. Tambien hemos hecho abstraccion del peso específico del freno y de su plato : empero, si se quiere hacerlo entrar en el cálculo, entonces se medirá con un dinamómetro la fuerza que deberá aplicarse verticalmente y de abajo arriba al punto *C'* para sostener el freno en el momento en que los tornillos no están apretados y el plato se halla sin ningun peso extraño : hecho así, se adicionará al peso colocado en el mismo, y en seguida ya puede procederse á ejecutar la operacion.

Deberá tenerse en cuenta y no olvidarlo, que la unidad del trabajo es la elevacion de un cuerpo del peso de un kilógramo á la altura de un metro. Esta unidad se llama unidad *dinámica* ó *kilográmetra*. Por esta razon se dice que el trabajo desarrollado por la elevacion de un cuerpo que pesa 8 kilógramos á tres metros de altura, es igual á 24 unidades dinámicas ó á 24 kilógramos elevados á un metro de altura.

Observando lo que precede, se hará el cálculo de esta manera. Se contará el peso puesto en el plato y se añadirá el que represente el específico de todo el freno, y en seguida se multiplicará el peso

total por la longitud de la circunferencia del círculo que tiene por radío la distancia horizontal del eje del árbol á la vertical que pasa por el punto de suspension del plato : en seguida se multiplicará este primer resultado por el número de vueltas que el árbol hace en una hora por ejemplo ; empero, no deberá olvidarse que es necesario evaluar á kilógramos el peso puesto en el plato, y el que debe añadírsele, el cual no es otro que el del mismo freno, y á metros la longitud de la circunferencia que debe servir para ejecutar la primera multiplicacion. De este modo, el resultado dará el trabajo de la máquina durante una hora, evaluado á kilográmetros, segun queda dicho antes.

III. De los reguladores de fuerza centrífuga.

202. Hemos dicho en el párrafo 197 y siguientes, que los volantes impiden así la aceleracion excesiva, como la disminucion de la velocidad necesaria al buen funcionamiento de las máquinas, que se producen por el desquilibrio ó desigualdad de la accion recíproca de las fuerzas motoras resistentes. Sin embargo, preséntanse numerosos casos en que los volantes son insuficientes para lograrlo cual se requiere. Si disminuyeran notablemente las fuerzas resistentes, la velocidad del movimiento creceria por instantes, pues aunque los volantes lo contuvieran, segun dejamos dicho, se aumentaria ince-

santemente á despecho mismo de su verdadera influencia, en términos de perjudicar el trabajo de la máquina y de producir aun otros inconvenientes mucho mas funestos todavía. En sentido contrario, la máquina se pararia; esto es, si la resistencia que ofrecieran los volantes fuera tal que dominara la accion de la potencia.

En ambos casos es indispensable modificar las fuerzas que ejercen su accion sobre la máquina, ora sea aumentando, ora disminuyendo la potencia ó la resistencia hasta equilibrar ambas fuerzas y dejar el movimiento en su estado natural. Cierto es que no se puede mantener constantemente dicho equilibrio; empero, no obstante deben regularizarse las fuerzas de tal suerte, que el aumento ó disminucion sucesivo del movimiento no altere la velocidad en términos de perjudicar ó embarazar el trabajo ordinario de la máquina. Este inconveniente se evita con un regulador.

203. Regulador de fuerza centrífuga. — Generalmente compónese este, en cuanto á lo esencial, de dos bolas metálicas fijas á los extremos de dos árboles *B D*, *B C*, los cuales se fijan al principal *A E* por el punto *B* (fig. 71). Este árbol vertical recibe de la máquina su movimiento de rotacion, y en su virtud pueden moverse formando con dicho árbol ángulos mas ó menos grandes, segun la velocidad que la fuerza motora les imprima. Dos barras de hierro unen otra vez el árbol *A E* con los

dos meneres terminados en dos bolas por los puntos *E C D*. Nótese que el punto *E* es una abrazadera que puede subir y bajar libremente por lo

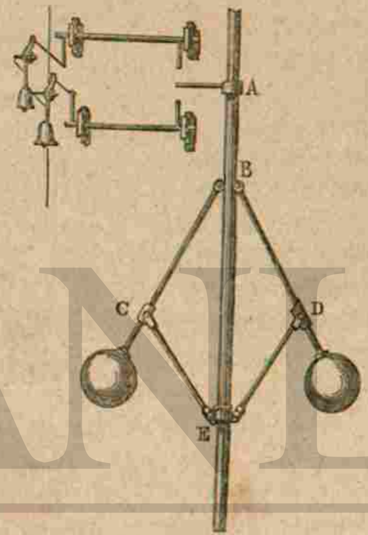

Fig. 71.

largo del árbol *A E*. Separando á derecha é izquierda ambas bolas, el losange *B C E D* se deforma, disminuye su diagonal, y por consiguiente sube la abrazadera *E* que bajaria si, en vez de separarla, se unieran ambas bolas al árbol *A E*.

Hemos dicho que el árbol principal recibe su movimiento de la máquina. Pues bien; como el regulador se halla sometido á la fuerza resistente de su propio peso, y á la centrífuga que produce el movimiento de rotacion del árbol vertical *A E*, sucede que ambas bolas dan vueltas al mismo tiempo y se separan de él hasta que la resultante de dichas fuerzas siga la direccion de abajo arriba y de arriba abajo que indica la posicion del regulador. Si la velocidad de la máquina se aumenta, el movimiento de las bolas se aumentará en proporcion de aquella alejándolas cada vez mas de su tronco. Por el contrario, disminuyendo la velocidad disminuirá tambien la fuerza centrífuga, y las bolas bajarán hasta unirse al árbol á que se hallan adaptadas. En suma, el movimiento ascendente y descendente de la abrazadera *E*, se utiliza en favor de la fuerza motora ó resistente, segun mejor convenga al buen trabajo de la máquina, visto que el regulador ejerce su accion sobre la potencia que hace mover todo el mecanismo, ora disminuyéndola cuando el movimiento es demasiado rápido, ora aumentándolo cuando es insuficiente y débil.

En otros casos el regulador no hace mas que prevenir al conductor ó director de la máquina indicándole la rapidez ó lentitud del movimiento : entonces el director se apresura á modificar la velocidad de la máquina aumentándola ó disminuyéndola segun las circunstancias lo exigieran.

204. Mecanismo adaptado al regulador para

advertir la rapidez ó lentitud excesivas de una maquina. — La expresada figura 71 nos dará una idea de la disposicion de este mecanismo, muy puesto en uso en los telares *á la Jacquard*, en los molinos harineros y en otras diferentes máquinas. La abrazadera *E* del árbol vertical *A E* tiene dos varillas verticales ; una de ellas, la invisible en la expresada figura, está unida á la abrazadera *A*. Ligado así ambos anillos, los dos tendrán necesariamente el mismo movimiento, de modo que subirá ó bajará conforme la mayor ó menor velocidad de la máquina.

El anillo *A*, que da vueltas al propio tiempo que el regulador, lleva un dedo horizontal colocado de manera que no encuentre en su camino obstáculo alguno, mientras que la máquina marche con la velocidad conveniente á la perfecta ejecucion de los trabajos que la incumben. Empero, tan luego como la velocidad aumenta excesivamente sus proporciones, el dedo metálico lo anuncia acto continuo chocando ó levantando uno de los martillos que van á dar á las campanillas adaptadas con este objeto. Debemos advertir que cada campanilla tiene un sonido diferente á fin de que puedan llenar sus funciones respectivas. Así, cuando la velocidad del movimiento es demasiado grande, el dedo metálico levanta el martillo de la campana que tiene la mision de anunciarlo, y vice-versa cuando tiene que advertir la extremada lentitud ó insuficiencia del movimiento.

205. Observacion. — Ya hemos tratado en otro capítulo de las *resistencias pasivas*, de *su influencia* y de los *medios de vencerlas*. Bajo de este supuesto, allí remitimos al lector que desea enterarse á fondo de los principios que rigen esta materia. Tambien hemos hablado en el expresado capítulo de las consecuencias generales de dichos principios, y sin embargo, aunque incurramos en la nota de extremadamente prolijos, reproduciremos, en otra forma, las siguientes, que consideramos mas necesarias al estudio de las máquinas en estado del movimiento que nos ocupa.

206. 1.ª consecuencia. — No es absolutamente necesario que las potencias estén siempre equilibradas con las resistencias. Pues, si es cierto que en ciertos casos se experimenta exceso de potencia, resulta sin embargo de él un aumento de movimiento capaz de producir mas tarde el mismo efecto que produjera el mismo exceso de potencia.

207. 2.ª consecuencia. — Si la velocidad de la máquina pudiera aumentarse considerablemente por la demasiada acumulacion producida sucesivamente por el exceso del trabajo motor, el empleo de un regulador de fuerza centrífuga puede modificar convenientemente esta velocidad y mantener la que debe conservar siempre la máquina.

208. 3.ª consecuencia. — Es necesario disminuir, en cuanto sea posible, las resistencias pasivas que se desarrollan durante el movimiento de la máquina, absorviendo inútilmente una parte mas ó menos considerable de la potencia.

209. 4ª. consecuencia. — Los choques de dos cuerpos, no siendo perfectamente elásticos, ocasionan siempre una pérdida de trabajo. El mejor medio de evitar esta pérdida es el cambiar las partes de la máquina que tienen que chocarse durante el movimiento de la misma en otras fabricadas con materias verdaderamente elásticas.

210. 5.ª y última consecuencia. — Si la potencia y las resistencias no permanecen constantemente equilibradas en términos que la máquina tenga que depositar, en ciertos momentos y bajo la forma de movimiento, el exceso del trabajo motor, en tal caso se la adaptará un volante que impida el desequilibrio, segun queda indicado en el párrafo 197 y siguientes.

CAPITULO VII

De los motores y de su aplicacion á varias máquinas, segun los principios establecidos.

1. Consideraciones generales sobre los motores.

211. Definicion. — Ya se ha dicho antes, y nadie lo ignora tampoco, que una máquina no puede hacer trabajo alguno si una potencia cualquiera no la imprime su movimiento. Pues bien, esta potencia se llama comunmente *motor*.

212. Diversas especies de motores. — Los hombres, los animales, el viento, el agua, el vapor, el gas, la electricidad, los resortes de los relojes, y la gravedad de los cuerpos pesados, componen la série de los motores conocidos. Mas todos ellos no tienen la misma importancia; así es que considerados bajo el punto de vista industrial, todos los referidos motores quedan realmente reducidos á los cuatro principales, á saber:

1.° *Los motores animados*. Estos son las fuerzas que despliegan los hombres y animales para imprimir el movimiento á ciertas máquinas.

2.° Los rios y otras corrientes de agua sirven de motores á numerosas máquinas hidráulicas, como las de hilados, herrerías, molinos, etc., etc.

3.° El aire, llamado vulgarmente viento, se emplea como motor en los molinos de viento, en la navegacion y en otras muchas máquinas.

4.° El vapor ó la fuerza elástica que el calor comunica generalmente al agua y á todos los líquidos que se volatilizan con facilidad, nos da un motor preciosísimo cuyo uso y aplicacion se extiende todos los dias de una manera prodigiosa.

213. Observacion. — Todas las máquinas no son susceptibles de todos los motores sin distincion, ni estos pueden ejercer su accion, hablando de una manera general, sino con el auxilio de una máquina especial que los desarrolle y transmita á los respectivos mecanismos que deben ejecutar el trabajo que á cada uno incumbe.

Esta máquina, que se llama *máquina motora*, es de dos especies; *hidráulica* y *de vapor*.

214. Doble estudio de un motor. — Debe examinarse primeramente en sí mismo, esto es, sin pensar en los medios de utilizarlo : de este modo será fácil calcular la cantidad de trabajo que puede hacer en un tiempo dado, bajo el supuesto de que dicho trabajo no deberá exceder jamas de sus límites, cualquiera que sea la máquina á que se aplicará.

Esto no quiere decir que separemos absolutamente el motor de su *máquina motora*, porque generalmente se evidencia prácticamente la cantidad de trabajo de aquel con ayuda de esta. Empero, esta operacion debe practicarse únicamente despues del primer estudio del motor en sí, así para comprobar el cálculo, como para apreciar el perfeccionamiento de la máquina, y la suma mas ó menos grande de potencia que necesita para funcionar con regularidad.

215. Manera de proceder al estudio de un motor. — Este se hará examinando cómo puede ejercer su accion, qué fuerza puede desplegar á ciertos tiempos dados, á cada instante, qué espacio recorre el punto de aplicacion de esta fuerza, siguiendo su misma direccion.

Tratándose de un motor animado, de un hombre por ejemplo, se reconocerá que su potencia es bastante variable, pues será mas ó menos grande, segun que el hombre se valga ó de su propio peso, ó de las manos, ó de los piés, que tirará ó impelirá, ó que ejercerá su fuerza vertical ú horizontalmente.

Tratándose de un despeñadero de agua, se examinará la elevacion de la caida y la cantidad de agua que suministra en cada hora. De este modo se obtendrá la medida de su potencia, la cual será siempre invariable ó enteramente determinada, lo que no sucede con la potencia del hombre.

Empero, en todos los casos basta, para obtener los diversos resultados que se buscan, con que se pongan en práctica los medios conocidos; es decir, que se evalúen las fuerzas que produzcan los motores durante su accion con el auxilio de un dinamómetro, determinando la magnitud del espacio recorrido por el punto de aplicacion de cada una de ellas siguiendo su direccion, ora sea midiéndola directamente, ora recurriendo á otros medios fáciles de imaginar, una vez impuesto de los principios contenidos en este MANUAL.

II. De los motores animados.

216. MOTORES HUMANO Y ANIMADO. — Quedan consignadas las diversas maneras que tiene el hombre de emplear su fuerza; empero, es necesario además que no se eche en olvido, al resolver el problema, que el hombre se cansa trabajando, y que si se le exige mas trabajo del que buenamente puede hacer, se le imposibilitará en términos de que no pueda continuar su obra el dia siguiente.

Aun mas, la fuerza del hombre, segun queda dicho, varía en proporcion de la facilidad con que la despliega. Así, cuando se le ocupa en levantar peso del suelo con sus brazos, se ha hecho la ex-

periencia de que, por término medio, solo puede levantar 130 kilógramos; muchas veces llega á 200 kilógramos y muy rara y difícilmente á 300 kil. Mas, la fuerza del hombre no es, en muchos casos, mas que un elemento del trabajo que puede realizar, y para determinarlo hay necesidad de examinar el camino que esta fuerza hace recorrer al punto donde la aplica.

217. OBSERVACION. — Un hombre no debe emplear toda su fuerza cuando se ocupa en un trabajo continuo : solamente debe desplegar, á cada instante, una porcion del esfuerzo máximo que puede hacer.

Por consiguiente, la experiencia únicamente puede darnos la medida de la fuerza que el hombre es capaz de desarrollar, y la velocidad con que su punto de aplicacion debe moverse para efectuar la mayor suma de trabajo que puede hacer en un dia.

218. DIVERSAS EXPERIENCIAS DEL TRABAJO HECHO POR LA FUERZA DE UN HOMBRE. — En las mazas, ó *sonnettes* para clavar maderos en la raja de los rios, y aun en ciertos cimientos de algunos edificios, se necesita desplegar una fuerza considerable, porque es necesario ejercer una presion sumamente considerable sobre la cabeza de las estacas, maderos ó vigas, á fin de vencer la resistencia que les opone el terreno. Al efecto se valen de la máquina repre-

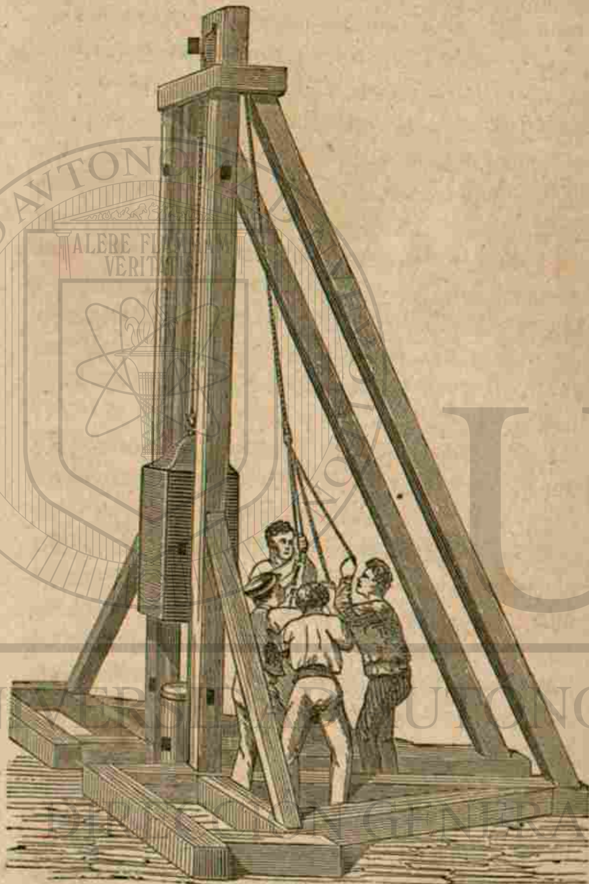

Fig. 72.

sentada con la figura 72. Una maza de hierro colado *A*, llamada moton, pende de un extremo de la cuerda que pasa por la polea *O* y baja terminada por tantos cabos cuantos sean los hombres que se ocupan en hacerla funcionar. Estos hombres tiran á la vez de sus respectivas cuerdas y elevan el moton á cierta altura, y lo dejan caer sin abandonar por esto la cuerda. En el ascenso ó descenso el mazo realiza su movimiento entre los dos cuartones verticales *C*, *C*, los cuales tienen una abertura ó especie de canal donde entran las orejas del moton á fin de que no varíe de direccion y caiga de aplomo sobre la estaca *D*, si como es de suponer se ha colocado perfectamente entre los expresados cuarterones; por fin la estaca ó viga tiene un círculo de hierro para evitar que se hienda y despedace bajo la accion de continuados golpes.

Ahora bien; en la precedente operacion, se ha calculado que cada hombre que tira de la cuerda levanta veinte kilógramos del peso de la maza á un metro de altura; que dan veinte golpes por minuto y sesenta ú ochenta seguidos, y que concluido este número de golpes, tienen necesidad de descansar tanto tiempo como el consumido en el trabajo indicado.

219. Perfeccionamiento de la precedente máquina. — Los accidentes que ocasiona la expresada máquina á los jornaleros empleados en ella, pues si alguno no dejase de tirar de su cuerda en

el mismo instante que los demás seria arrastrado, lanzado y aplastado, han obligado á sustituirla con la llamada de *declive* que representa la figura 73 : en esta máquina se reemplazan las cuerdas por medio de un torno. En esta dos hombres dan vueltas á las cigüeñuelas *PE* que comunican el movimiento al eje *C*, el cual tiene un piñon que se encaja con la rueda fija al torno. Una vez levantado el moton (que puede subir hasta tocar con la vértice del mecanismo) se le deja descender, deslizando el expresado eje en direccion de su longitud, de manera que el piñon se coloque al lado de la rueda dentada, cesando toda comunicacion con ella. Acto continuo suelto el mazo, se precipita siguiendo el camino que le está trazado, y cae con toda su gravedad sobre la estaca que se quiere clavar: en su descenso el cuerpo hace dar vueltas á la rueda y cigüeñuelas, en sentido inverso y con increible celeridad.

La rapidez de la caida gastaria luego la cuerda, y para obviar este inconveniente y el deterioro del torno, se le suelta el moton en el punto de elevacion que se le ha dado, empleando al efecto un mecanismo sencillo y eficaz que no explicamos porque se ve todos los dias.

Para deslizar el eje *C* é incomunicar el piñon con la rueda dentada, se levanta el resorte en forma de orquilla *MC* que se mueve horizontalmente por el punto *E*, cuyos dientes entran en las carcelillas practicadas al efecto en ambos lados del ár-

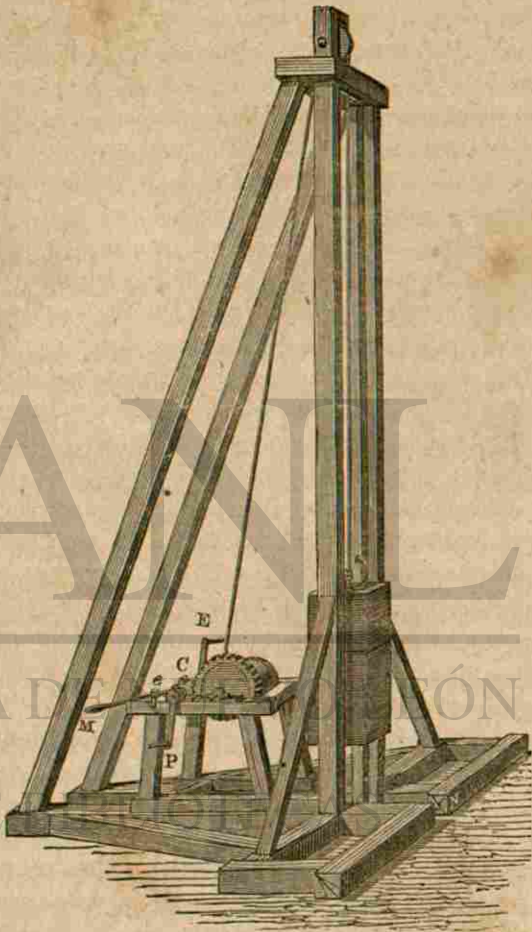

Fig. 73.

bol *C*. Así, tan luego como se desencajan los dientes del resorte, el eje cambia de lugar en sentido contrario, pero el piñon no pierde su movimiento mientras dura la fuerza motora en accion.

El motor, pues, de esta máquina, perfeccionada con la adicion del torno, es animado, es del hombre como en la precedente; y sin embargo, el mismo jornalero hace en el mismo tiempo, segun la experiencia acreditada constantemente, casi el doble trabajo que hacia tirando de la cuerda, como queda dicho en el párrafo 218.

220. Máximum del trabajo del hombre. — Generalmente se observa que el hombre trabaja y produce mas fuerza motora en un dia, cuando descansa de tiempo en tiempo, que cuando se afana y no cesa de trabajar de una manera continua.

Por otra parte, la sola elevacion de su cuerpo mientras que sube una escalera ó una pendiente produce cierta cantidad de trabajo, que se evalúa por lo comun multiplicando su peso por la altura total que haya recorrido siguiendo la vertical: esta cantidad de trabajo es mucho mayor que la que hace subiendo cargado y bajando vacío, puesto que en la evaluacion del resultado debe comprenderse siempre la elevacion de su cuerpo.

Así es mucho mas ventajoso de hacer consistir el trabajo del hombre en la sencilla elevacion de su cuerpo, siempre que esta elevacion pueda servir á la produccion de los efectos que se buscan,

y en su virtud tal es el medio escogitado en los casos en que hay necesidad de elevar tierra y otros objetos de un nivel á otro. Con este fin se ha imaginado la máquina que representa la figura 74. Compónese de una polea de gran diámetro por cuya canal pasa la cuerda que suspende un plato de crecidas dimensiones, semejante á los de una balanza, en cada uno de sus cabos. La longitud de la cuerda debe ser proporcionada á la distancia de una superficie á otra, de manera que uno de dichos platos esté al nivel del suelo superior cuando el otro se halle al nivel del suelo inferior. En esta disposicion se carga un *carreton* lleno de tierra sobre el plato que se halla en la superficie del suelo inferior, y al mismo tiempo un jornalero se sienta sobre el carreton vacío puesto sobre el plato del otro extremo de la cuerda. Si el hombre pesa mas que la tierra que trata de levantar, inmediatamente desciende mientras que á la vez sube el peso opuesto. Hecho esto, el jornalero descendido sustituye en su lugar otra carga de tierra, y la elevada antes se reemplaza con otro carreton vacío sobre el cual se sienta otro jornalero; acto continuo, la máquina vuelve á ponerse en movimiento. En suma, esta operacion, repetida durante el dia, da resultados admirables. Finalmente, para aumentar ó disminuir el movimiento, segun el caso lo requiera, otro obrero puesto en lo alto del mecanismo apoya y favorece el ascenso.

Por este medio, pues, se ha reconocido que ma-

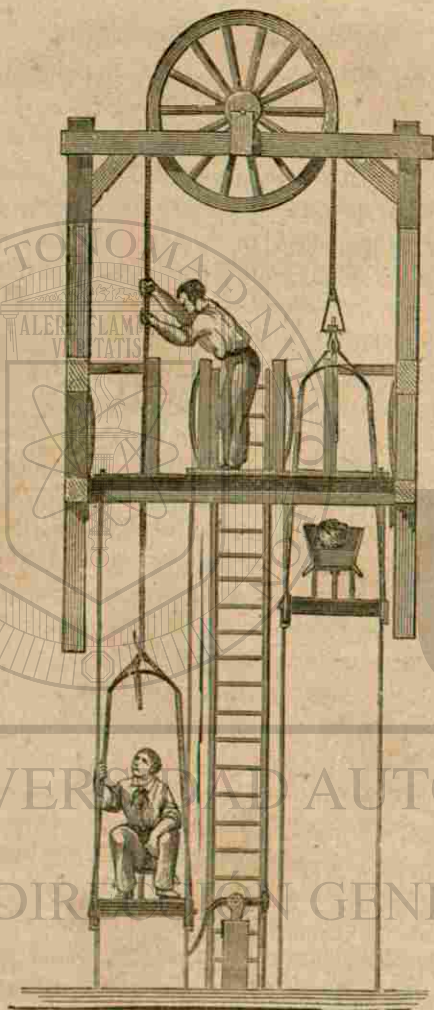

Fig. 74.

niobrando de esta manera y trabajando 8 horas por dia un hombre produce un trabajo de 280,000 kil. El mismo hombre, moviendo unas cigüeñuelas, no producirá en el expresado tiempo mas que 172,000 kil., y tirando de la cuerda para levantar un moton y clavar estacas ó vigas en los rios, etc., apenas llegaria á producir 100,000 kil. de trabajo. En vista de la diferencia de los tres resultados comparados, es sin duda ventajoso de ocupar al hombre en esta especie de trabajos siempre que las circunstancias lo permitan.

221. EL BUEY Y EL BURRO COMO MOTORES. — El primer animal tirando de una carreta, etc., ejerce una fuerza de traccion casi igual á la que ejerce el caballo; empero, por razon de la lentitud de su marcha, apenas produce la mitad del trabajo. Uncido á una noria ú otro mecanismo semejante, realiza casi tanto trabajo como el caballo.

El burro puede efectuar la cuarta parte del trabajo del caballo, y la mitad en ciertos casos.

222. EL CABALLO EMPLEADO COMO MOTOR. — Las observaciones generales relativas al trabajo del hombre pueden aplicarse al que realiza un caballo. El esfuerzo máximo de este en el tiro de un carruaje se eleva por término medio á 400 kil., pero arrastrará mucho menos trabajando continuamente. Un buen caballo carretero que trabaja seis dias por semana y que recorre veinte y ocho kilómetros

por dia, con la velocidad de tres por hora, ejerce una fuerza de traccion de cincuenta kilógramos; por consiguiente, el trabajo que desarrolla en un dia asciende á 1,400,000 kilog.

El mismo caballo empleado á dar vueltas á una máquina como noria, taona, etc., produce mucho menos trabajo que tirando de un carro y se fatiga mas. Así para que marche con mayor libertad en estas vueltas, es necesario que la circunferencia que describen tenga unos trece metros de diámetro. Mas comparando la cantidad de trabajo que el caballo hace de este modo, con la que produce el hombre dando vueltas á unas cigüeñuelas, se ve que el trabajo de un caballo equivale al de siete hombres.

Finalmente, el trabajo realizado por un caballo moviendo una de las máquinas antes expresadas, durante un segundo, no excede de 42 kil., y bajo de este punto de vista pudiera afirmarse que la fuerza de un caballo es inferior á la del caballo dinámico ó de vapor, puesto que con este nombre damos á entender una fuerza capaz de darnos 75 kilógramos de trabajo por segundo.

223. Definicion de un caballo de vapor. — Hablando de máquinas de vapor oimos decir, esta ó aquellas son de uno, de cuatro, de seis, de ocho caballos de vapor. Pues bien; dícese que una máquina tiene la fuerza de un caballo, cuando puede levantar en un segundo 75 kilógramos á un

metro de elevacion. Por consiguiente, será de cuatro si en el expresado tiempo levanta á la misma altura 300 kilógramos, de seis si levanta 450 y de ocho si eleva 600 kil.

Véase ahora si guarda proporcion la comparacion que puede hacerse de la fuerza de un caballo con la llamada de un *caballo de vapor*.

En suma, la palabra *vapor* añadida á la de *caballo* para precisar su significacion, emana de que esta unidad ha servido para evaluar la fuerza de una máquina de vapor. Muchas veces se reemplaza con la expresion de *caballo dinámico* la de caballo de vapor, pues ambos tienen el mismo significado.

III. Uso del agua para motor.

224. Causa del movimiento del agua. — En el párrafo 212, hablando de los motores, hemos designado los rios ó el agua como uno de los mas útiles á la industria humana. Ahora bien, el movimiento del agua dimana de la accion de su peso específico, ó de su propia gravedad. Las moléculas en su corriente se abajan en cierta proporcion dando así lugar á la produccion de una suma de trabajo motor que puede obtenerse multiplicando el peso de las moléculas por la desigualdad ó diferencia de las extremidades de los espacios recorridos. Este trabajo tan importante se perdiera, si el ingenio hu-

mano no hubiera estudiado los medios de utilizarlo.

225. Caida ó despeñadero de agua. — Para utilizar la accion del agua como fuerza motriz, se levanta el nivel de su cauce oponiéndose á su paso de manera que el agua se eleve y caiga en seguida ejerciendo toda su influencia. Cuando el agua no es caudalosa se la reune en un depósito á cierta altura, y se la deja la salida por un conducto proporcional á la cantidad reunida, de tal suerte que todo su empuje venga á dar en la rueda que debe poner en movimiento, el cual se comunica en seguida á toda la máquina, como lo vemos en ciertos molinos y herrerías. En el primer caso, la cantidad de agua que se obtenga en un tiempo dado será igual á la que pasaba en el mismo tiempo al traves de una seccion transversal del rio, antes de levantar el nivel; empero, esta misma agua, pasando de su nivel superior al inferior, caerá de una altura igual á la diferencia que exista entre ambos niveles de su nuevo cauce ó direccion. Supuesto esto, para poder saber la medida del trabajo motor que el líquido desarrolla en su descenso, ya no resta mas que multiplicar esta altura por el peso del agua caida, y en seguida ver si la suma de trabajo que proporciona es suficiente para hacer funcionar algunas máquinas.

226. — Modo de evaluar la fuerza de un despeñadero de agua. — Supongamos al efecto que este despeñadero de agua tiene metro y medio de altura, 1 m. 50 c., y que nos produce en un segundo 600 kilómetros de trabajo; en seguida dividamos esta suma de trabajo por 75 kil. en que está evaluada la fuerza del *caballo dinámico*, segun queda demostrado en el párrafo 223, y veremos que la fuerza de dicho despeñadero de agua, tendrá la de ocho caballos de vapor.

Debe tenerse en cuenta que los elementos que entran en esta evaluacion son variables, pues que en el verano las corrientes de agua disminuyen notablemente, y, en determinados puntos, esta disminucion es tal que llega á suspender el trabajo de las máquinas durante los fuertes calores.

227. Motor hidráulico. — Estos no pueden hacer ningun trabajo útil sin el auxilio de la máquina que recibe su accion y la transmite á las máquinas especiales que deben aprovecharlo. Por consecuencia, es de necesidad absoluta que se examine la máquina motora sujeta á su accion. Por consiguiente, sin detenernos en describir las formas diversas que pueden darse á esta especie de máquinas, estableceremos por regla general que todas deben llenar estas dos condiciones esenciales:

Primera: el agua debe ejercer su accion sin choque, es decir, que desde el momento en que se halla á punto de entrar en la máquina hasta el instante en que la abandona enteramente, no ha de experimentar cambios bruscos, ora sea en la direccion, ora en la magnitud de la velocidad de las diversas moléculas del líquido.

Segunda : el agua debe salir de la máquina de manera que no tenga entonces mas que una ligera velocidad, y si fuese posible una velocidad nula cuando llegue al recipiente inferior; de lo contrario, llegando con una velocidad apreciable podria producir cierta cantidad de trabajo en razon de esta misma velocidad, y por consecuencia no habria transmitido á la máquina motora la totalidad del trabajo que era capaz de producir.

228. Condiciones de los motores hidráulicos. — En vista de lo que precede se infiere que el establecimiento de los motores hidráulicos deben sujetarse á las siguientes reglas :

Primera : El agua debe descender sin experimentar, en cuanto sea posible, la menor pérdida de velocidad.

Segunda : Debe ejercer su accion sin violencia ni choque.

Tercera : Debe llegar sin velocidad al depósito ó curso inferior.

229. Observacion. — No es fácil, rigurosamente hablando, de llenar con exactitud las precedentes condiciones. Sin embargo, puede juzgarse de la

bondad y perfeccion de un motor hidráulico determinando, con ayuda de la experiencia, el trabajo que produce en un tiempo dado, y al efecto se buscará la relacion que existe entre dicha suma de trabajo y la que proporciona la caida del agua en el mismo tiempo. El motor, por consiguiente, será tanto mejor cuanto mas se aproxime de la unidad.

230. Rueda de canales. — Esta rueda se halla fabricada para recibir el agua por su parte superior por medio de un canal que la impele al nivel de la superficie superior. En dicho canal, el agua no toma mas que la velocidad necesaria para poder alcanzar la rueda; de allí cae en las divisiones ó canales que adornan toda su circunferencia, las cuales va llenando sucesivamente á medida que la rueda se mueve. Estos canales se vacían á su vez derramando el agua en el nivel inferior, y vuelven á subir inmediatamente para volverse á llenar; en esta operacion se observa que todas las canales descendentes están llenas mientras que las ascendentes suben vacías, y esto es precisamente lo que produce el movimiento, es decir, el peso del agua contenida en la mitad de la rueda.

En la construccion de esta especie de ruedas (fig. 75), debe tenerse buen cuidado de disponer las canales ó cajones de manera que no se vacien antes de llegar á lo mas bajo posible, pues de lo contrario se pierde una cantidad considerable de trabajo útil.

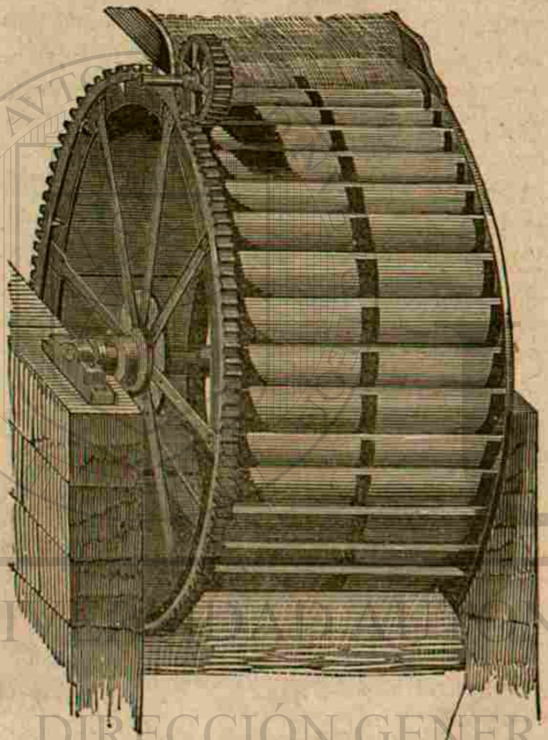

Fig. 75.

Además, debe observarse igualmente que dicha rueda produce mayor efecto cuando se mueve con

lentitud, y debe emplearse con preferencia á las conocidas hasta el dia en las fábricas que cuenten con un despeñadero de agua de 3 hasta 12 metros de elevacion.

Como el movimiento lento de la precedente rueda seria dañoso en los mecanismos hidráulicos ordinarios, se las adopta una rueda dentada que se encaja con los dientes de otra mucho mas pequeña, la cual transmite á su árbol un movimiento tan rápido como se necesite.

231. Los estrechos límites de este MANUAL no nos permite hablar de las ruedas llamadas de *Poncelet*, de las que se usan en las corrientes indefinidas, ni de las denominadas de cucharas, cuvos y de reaccion, ni de las numerosas máquinas hidráulicas que tanto enriquecen la industria. En su virtud, remitimos á nuestros lectores al famoso *Curso elemental de Mecánica de Mr. Ch. Delaunay*, cuarta edicion.

IV. Empleo del aire como motor.

232. No es de ahora ni de una localidad especial el uso inmemorial que se hace del aire atmosférico para motor de ciertas máquinas, y, por cierto, si este terrible y feliz elemento funcionara ó soplara constantemente con regularidad, no hay duda que podrian obtenerse resultados mas im-

17

portantes. Empero, no está en la mano del hombre el sujetar á este variable coloso.

Bien conocidos son los mecanismos adoptados para utilizar su accion. Los molinos de viento y los buques de vela nos dan una idea muy exacta y sencilla para que tengamos necesidad de entrar en sus menores detalles.

Así es que cerraremos este artículo diciendo que toda la dificultad consiste en la disposicion en que deben colocarse las astas del molino y las velas de las embarcaciones para que puedan recibir conveniente y útilmente la accion del viento. Ambas se extienden y pliegan mas ó menos presentándolas directa ú oblicuamente al impulso del elemento, segun que este sea mas ó menos impetuoso.

233. El aire se emplea tambien para poner en movimiento las pompas destinadas á elevar el agua. Empero, esta máquina siendo muy parecida á la de los molinos de viento renunciamos tambien á detallarla.

V. Del vapor como motor.

234. Formacion del vapor. — Cuando un vaso (cualquiera que sea su forma y la materia de que se componga), estando perfectamente cerrado contiene cierta cantidad de agua de modo que no lo

llene, esta agua se convierte en vapor. A medida que se forma, se acumula en la parte vacía de dicho vaso y aumenta su elasticidad; mas esta fuerza elástica no puede exceder su *tension máxima*, límite extremo, que depende exclusivamente de la temperatura del agua, y esta tension suprema crece en proporcion de los grados que aquella vaya aumentando. Sin embargo, alcanzado su *máximum* de intensidad ya no se produce nuevo vapor, y en este caso todo el espacio del vaso ó caldera que el vapor ocupa se llama *saturado*.

Cuando la temperatura se halla muy elevada, la evaporizacion del agua se efectúa con rapidez, visto que entonces la tension máxima del vapor es igual á la presion atmosférica. En este momento su fuerza es tal que vence y arroja el aire para abrirse paso y salir fuera, en vez de que antes tenia necesidad de infiltrarse gradualmente por los intersticios existentes entre sus moléculas.

Mas, para que el vapor adquiera *su tension máxima* es necesario que el agua esté en el estado de ebullicion, y comunmente hierve en toda su fuerza siempre que la tension del vapor excede la presion atmosférica que el líquido experimenta en la superficie, ora sea aquella compuesta de gaz y de vapor combinados, ora sea exclusivamente de gas ó de vapor.

235. Ley de Mariotte. — La fuerza de un gas

se aumenta cuando se comprime su superficie, en virtud de que las presiones que ejerce sobre las diversas partes de las paredes del vaso que lo contiene, aumentan á medida que disminuye su volúmen. Este célebre físico, estudiando los cambios correspondientes á la presion y al volúmen, ha encontrado la siguiente ley que debemos tener presente en la cuestion que nos ocupa; á saber:

Que la fuerza elástica de una masa de gas, cuya temperatura se conserva siempre á la misma altura, varía en razon inversa de su volúmen. Esta condicion es muy esencial para que pueda echarse en olvido, pues la experiencia enseña que cuando se disminuye bruscamente el volúmen de una masa gaseosa, su temperatura se eleva, y que, por el contrario, se disminuye esta cuando se dilata aquella. Por consiguiente, para que las fuerzas elásticas que adquiere sucesivamente una masa gaseosa, cuyo volúmen quiere variarse, satisfagan á la ley de Mariotte, es absolutamente necesario que estas fuerzas elásticas no se midan hasta que el gas haya tenido suficiente tiempo para recobrar la temperatura que tenia en un principio, esto es, al ponerse en equilibrio de temperatura con los cuerpos que le rodean.

236. Así, cuando cierta cantidad de vapor de agua se halla encerrado en un vaso sin agua, y que su tension es inferior al *máximum* correspondiente á su temperatura, entonces este vapor adquiere las propiedades y produce los efectos del gas: de manera que variando su volúmen, varía al mismo tiempo su fuerza elástica, segun lo establecido en la ley de Mariotte que acabamos de explicar; pero esto, bajo el supuesto de que la fuerza elástica quede suficientemente débil para no saturar el espacio en que el vapor se halla contenido.

237. Ejemplo. — Supongamos, pues, para mayor inteligencia de lo que precede, que se disminuye el volúmen del vapor en términos que su fuerza elástica quede igual á la tension máxima correspondiente á su temperatura, en este caso, si se continúa comprimiéndola, es evidente que la fuerza elástica no podrá aumentar de modo alguno, permaneciendo siempre igual á su *máximum* de intensidad, y por consiguiente una porcion de vapor se condensará volviendo al estado de líquido.

Si acto continuo se engrandece el espacio de manera que el vapor pueda dilatarse mas, la cantidad de agua producida por la precedente condensacion volverá al estado de vapor, adquiriendo ó manteniendo la fuerza elástica igual á la tension máxima, mientras que no se absuelva todo el líquido. Empero, tan luego como el agua toda se haya transformado en vapor, el aumento del espacio que se le habia dado arrastrará una disminucion proporcional á dicho espacio en la fuerza elástica del vapor que volverá á tomar, en su virtud, las propiedades de gas.

230. Condensacion del gas. — Una masa de vapor puesta en comunicacion con un espacio, cuya temperatura corresponde á una tension máxima inferior á la suya, se condensará parcialmente hasta que el vapor restante satisfaga las condiciones antes expresadas; pues cuando los espacios en que el vapor se halla contenido son de diversa temperatura, su fuerza elástica, como fácilmente se concibe, no puede ser mayor que la tension máxima que corresponde á la temperatura mas baja de los diversos puntos de dicho espacio.

239. Tension máxima del vapor de agua en sus diversas temperaturas. — El célebre Arago, el distinguido Dulong, y posteriormente Mr. Regnault, han enriquecido la ciencia con infinitas experiencias que demuestran la tension máxima del vapor de agua, y en su virtud legádonos una tabla indicando las que producen las temperaturas diversas que puedan imaginarse, pues principiaron por la de cero hasta la de 230° aumentando 10 grados á cada una, como puede verse por la tabla siguiente :

TEMPERATURA.	TENSION DEL VAPOR.	TEMPERATURA.	TENSION DEL VAPOR.	TEMPERATURA.	TENSION DEL VAPOR.
	m		m		m
0°	0,0046	80°	0.3546	160°	4,6316
10°	0,0092	90°	0,5254	170°	5.7617
20°	0,0174	100°	0,7600	180°	6,5464
30°	0,0315	110°	1,0754	190°	9,4427
40°	0,0549	120°	1,4913	200°	11,6890
50°	0,0920	130°	2,0303	210°	14.3248
60°	0,1488	140°	2,7176	220°	17,3904
70°	0,2331	150°	3,5812	230°	20,9254

Segun se ve, las tensiones se expresan por la elevacion de las columnas de mercurio con que se equilibran, y que el agua se halla en el estado de ebullicion, cuando está en la temperatura de 100° bajo de una presion medida por una columna de mercurio de $0^m,76$ de altura.

Obsérvase asimismo que la tension máxima del vapor en la precitada temperatura se mide por una columna de mercurio de $0^m,76$, y que dicha tension crece proporcionalmente á la elevacion de su temperatura respectiva.

VI. Presion atmosférica y definicion de dicha atmósfera.

240. Presion atmosférica.—Ya en 1643 el ilustre físico Torricelli evaluó numéricamente esta presion. Así, si se considera el trabajo que se ope-

ra en el interior del mercurio contenido en su vaso, veremos que las presiones son las mismas en todos los puntos de un mismo plano horizontal ya sea en el interior, ya en el exterior del tubo. Lo mismo sucede respecto del plano horizontal formado por la superficie libre del mercurio en dicho vaso. Por consiguiente, aun allí la presion ejercida en uno de sus puntos por la atmósfera es idéntica á la que se ejerce á igual nivel en el interior del tubo por la columna de mercurio situada sobre el expresado nivel. Por esta razon, pues, la presion que la atmósfera hace en un centímetro cuadrado de la superficie libre del mercurio en el vaso es igual al peso de un cilindro de mercurio cuya base sea un centímetro cuadrado y su altura de 76. El volúmen de este cilindro es, pues, de 76 centímetros cubos, y como la medida de un centímetro cubo pesa 13 gramos, 6, resulta que la presion ejercida por la atmósfera sobre un centímetro cuadrado es de 1033 gramos.

241. Observacion. — La presion atmosférica es variable; empero, cuando el punto donde tiene lugar la experiencia no se halla mas alto que el nivel del mar, la altura de la columna de mercurio jamas se diferencia mucho de $0^m,76$. Por consecuencia, esta altura de $0^m,76$ se toma generalmente como presion normal, y en su virtud sirve de regla para comparar y verificar las variaciones de todas las demas.

242. Definicion de la atmósfera en el presente caso. — Siempre que un gas cualquiera ejerce contra las paredes del vaso que lo contiene una presion igual á la que ejerciera una columna de mercurio de $0^m,76$ de altura, entonces se dice que esta presion es de *una* atmósfera.

Como se desprende, la palabra *atmósfera* designa una presion que se toma por término de comparacion, constituyendo así una unidad particular con cuyo auxilio pueden evaluarse á guarismos dichas presiones.

243. Presion de una atmósfera. — La presion de una atmósfera, como queda dicho, es de 1 kilógramo 0 33 por centímetro cuadrado. Así, si la presion equivale á tres, cinco ó mas atmósferas, será equivalente á la que hiciera una columna de mercurio de tres, cinco ó mas veces de altura de $0^m,76$.

Con lo expuesto podrá comprenderse el cálculo atmosférico que representa la tabla siguiente debida igualmente á Mr. Regnault.

TENSION DEL VAPOR.	TEMPERATURA.	TENSION DEL VAPOR.	TEMPERATURA.
atm.	°	atm.	°
1	100,0	15	198,8
2	120,6	16	201,9
3	133,9	17	204,9
4	144,0	18	207,7
5	152,2	19	210,4
6	159,2	20	213,0
7	165,3	21	215,5
8	170,8	22	217,9
9	175,8	23	220,3
10	180,3	24	222,5
11	184,5	25	224,7
12	188,4	26	226,6
13	192,1	27	228,9
14	195,5	28	230,9

244. CALOR LATENTE DE LA EVAPORIZACION. — La conversion del agua en vapor necesita un fuego sostenido á fin de que la temperatura no varíe. Este calor mantenido constantemente es, pues, lo que los físicos llaman *calor latente de la evaporizacion*. Si no fuera así, el vapor se condensaria volviendo á su anterior estado de líquido, y de aquí la necesidad de conservar inalterable la misma temperatura. De lo contrario, la tension máxima del vapor, no correspondiendo á la temperatura que tenia en su principio, iria debilitándose en proporcion del descenso de esta, ó en razon de la frialdad que el líquido experimenta á medida que se realiza la evaporizacion.

Ya queda dicho que cuando el agua se somete á una temperatura de 100 grados entrará en ebullicion comunicando libremente con la atmósfera; y que cesará con rapidez si disminuye la temperatura. Por consecuencia, es indispensable, volvemos á repetir, el mantener el calor necesario á la cantidad de agua y del vapor que se debe conservar, pues este crece ó disminuye segun el fuego ó el calor que se ponga á aquella.

245. CANTIDAD DE CALOR NECESARIA A UNA MASA DETERMINADA DE AGUA. — Es de la mas alta importancia el conocer el calor que necesita una masa dada de agua para pasar al estado de vapor y mantenerse en él. De manera alguna podríamos suministrar este conocimiento si no recurriésemos otra vez á las experiencias del distinguido físico Mr. Regnault sobre las propiedades del agua. Al efecto, insertaremos la siguiente tabla; empero, parécenos oportuno consignar antes, para mayor inteligencia del lector, que la segunda columna demuestra la suma de calor precisa para convertir en vapor un kilógramo de agua, de manera que el espacio que lo contiene quede perfectamente saturado, sin experimentar variacion alguna antes ni despues de la evaporizacion, como lo expresa la primera columna. La tercera designa el calor que necesita para efectuar la conversion de dicha cantidad de líquido en vapor saturado.

Segun se advierte, la temperatura del agua comienza en 0, y la unidad del calor se toma por la suma necesaria para elevar la temperatura de un kilógramo de agua de 0° á 1°.

TEMPERATURA DEL VAPOR SATURADO.	CALOR LATENTE.	CALOR TOTAL.	TEMPERATURA DEL VAPOR SATURADO.	CALOR LATENTE.	CALOR TOTAL.
0°	606.5	606,5	120°	522,3	643,1
20°	592,6	612,6	140°	508,0	649,2
40°	578,7	618,8	160°	493,6	655,3
60°	564,7	624,8	180°	479,0	661,4
80°	550,6	30,9	200°	464,3	667,5
100°	536,5	37,0	220°	449,4	673,6

Estudiando con reflexion cuanto queda expuesto respecto de los cuatro principales motores, y aplicando con exactitud los principios demostrados en el presente MANUAL, cualquiera podrá no solo conocer sino tambien dirigir las funciones aun de las máquinas mas complicadas.

FIN.

INDICE

mienza en 0, y la unidad del calor se toma por la suma necesaria para elevar la temperatura de un kilógramo de agua de 0° á 1°.

TEMPERATURA DEL VAPOR SATURADO.	CALOR LATENTE.	CALOR TOTAL.	TEMPERATURA DEL VAPOR SATURADO.	CALOR LATENTE.	CALOR TOTAL.
0°	606,5	606,5	120°	522,3	643,1
20°	592,6	612,6	140°	508,0	649,2
40°	578,7	618,8	160°	493,6	655,3
60°	564,7	624,8	180°	479,0	661,4
80°	550,6	30,9	200°	464,3	667,5
100°	536,5	37,0	220°	449,4	673,6

Estudiando con reflexion cuanto queda expuesto respecto de los cuatro principales motores, y aplicando con exactitud los principios demostrados en el presente MANUAL, cualquiera podrá no solo conocer sino tambien dirigir las funciones aun de las máquinas mas complicadas.

FIN.

INDICE

SEGUNDA PARTE.

TERCERA PARTE.

CUARTA PARTE.