el espacio por los diversos valores dados á t.

Finalmente, para hacer esta operacion debe procederse desde luego, como queda indicado, observando el espacio que recorre el punto material, ó el cuerpo durante su trayectoria en un segundo, en seguida el que recorre en el segundo inmediato, incesantemente en el tercer segundo, y así sucesivamente hasta el fin de movimiento.

PRIMERA PARTE

DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO CONSIDERADO INDEPENDIENTEMENTE DE SUS CAUSAS, SEGUN LAS REGLAS GEOMÉTRICAS.

CAPITULO PRIMERO

Del movimiento uniforme y de sus propiedades.

10. Movimiento uniforme, velocidad. — Uniformidad, es la igualdad y semejanza de una cosa consigo misma ó con otra; de aquí resulta que el movimiento de un punto material sobre una recta ó curva se dice *uniforme*, cuando este punto recorre *espacios iguales en tiempos iguales*, cualesquiera que sean los intérvalos de tiempo y espacios comparados.

Por consecuencia, los espacios recorridos son proporcionales á los tiempos empleados para recorrerlos.

Por lo tanto debe uno fijar la atencion á la condicion de que los espacios recorridos durante espacios de tiempo iguales sucesivos sean iguales entre sí, *cualesquiera que sean*, los intérvalos de tiempo; de manera que si se notaba que los espacios recorridos, durante segundos sucesivos, son iguales entre sí, pero que en la primera mitad del segundo habia marchado mas que en la segunda mitad, entonces el movimiento no es uniforme. Así, la manecilla de un reloj que señala los segundos recorre divisiones iguales en segundos sucesivos; pero despues de haber recorrido rápidamente una de las divisiones de la esfera, se para un instante, en seguida recorre la segunda division, se vuelve á parar y así sucesivamente, de suerte que el movimiento no es uniforme.

11. Velocidad. — La velocidad del movimiento uniforme es *el espacio constante recorrido por el móvil durante cada unidad de tiempo*. Por consiguiente, la velocidad es tanto mas grande cuanto mayor es la unidad de tiempo, y el número que la mide es tanto mayor cuanto menor es la unidad de la longitud.

12. Ecuacion del movimiento. — El movimiento uniforme de un punto sobre una línea indefinida XY puede representarse por una ecuacion de primer grado entre el espacio y el tiempo. Supongamos O el orígen de los espacios y M_0 M las posiciones del móvil en el instante inicial y en la epoca t; supongamos $OM_0 = e_0$ y $OM = e$, y desig-

nemos por último con v la velocidad del movimiento, y se verá inmediatamente que el espacio

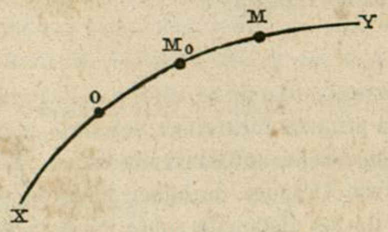

Fig. 1.

$e - e_0$ ha sido recorrido ó se recorre en el tiempo t. Así, conforme la definicion dada tendremos

$$\frac{e-e_0}{v} = \frac{t}{1}, \text{ por lo tanto } e - e_0 = vt, \; e = e_0 + vt.$$

He ahí la ecuacion del movimiento uniforme, la cual nos facilitará á cada instante dado la posicion del móvil en su trayectoria.

13. Propiedades del movimiento uniforme. — La precedente ecuacion demuestra inmediatamente que en toda especie de movimiento uniforme, el espacio recorrido durante un tiempo t con una velocidad v, se obtiene multiplicando la velocidad por el tiempo, la velocidad dividiendo el espacio recorrido por el tiempo gastado en recorrerlo, y el tiempo dividiendo el espacio por la velocidad.

14. SIMPLIFICACION DE LA FÓRMULA. — Si se toma por orígen de los espacios el punto M_o donde se encuentra el móvil al orígen del tiempo, la fórmula quedará reducida á

$$e = vt.$$

15. GENERALIDAD DE LA FÓRMULA. — Para generalizar la primera fórmula es necesario atribuir á las cantidades que entran en ella valores positivos y negativos. Despues de haber fijado el sentido positivo de las distancias sobre la curva, se dará á e_o el signo $+$ ó $-$, segun que la distancia del orígen al punto M_o será contada en este sentido ó en el contrario : del mismo modo la velocidad v será positiva ó negativa segun que haga marchar al móvil en el primero ó segundo sentido, á medida que el tiempo transcurre. Entonces se verá fácilmente que el valor y el signo de e resultarán de estos movimientos en todos y en cada uno de los casos dados.

16. HOMOGENEIDAD DE LA FÓRMULA. — No es inútil el observar aquí que la precedente ecuacion es homogénea, esto es, que subsiste como todas las fórmulas de la mecánica, cualesquiera que sean las unidades de longitud y de tiempo. Efectivamente, $e - e_o$ es una longitud cuyo valor numérico depende únicamente de la unidad de longitud; pero v depende además de la unidad de tiempo. Si desde luego se toma una unidad de longitud m

veces mas grande, sin cambiar la unidad de tiempo, $e - e_o$ y v serán reemplazados por $\frac{e-e_o}{m}$ y $\frac{v}{m}$, y la fórmula subsistirá entre los nuevos números. Si en seguida se toma una unidad de tiempo n veces mas grande, la velocidad deberá ser representada por nv y el tiempo por $\frac{t}{n}$; su producto será, pues, $nv + \frac{t}{n}$, ó vt como antes. En este caso la fórmula subsistirá tambien.

CAPITULO II

Del movimiento variado de los cuerpos y puntos materiales, y de sus diversas aceleraciones.

17. Definicion. — Cuando el movimiento de un punto no es uniforme ni compuesto de movimientos uniformes que tienen duraciones finitas, el movimiento se llama *variado*.

El movimiento de un cuerpo que cae, y el de los caminos de hierro, son variados. En esta especie de movimientos, la rapidez cambia á cada momento. Si se concibe que en un instante dado conserva la misma velocidad, entonces el movimiento se hace uniforme, y la velocidad de este movimiento será lo que se llama velocidad de movimiento variado en el instante considerado. Luego que los coches que arrastra una locomotiva se acercan al punto de llegada, el movimiento se disminuye progresivamente, en términos que si era antes de 15 metros por segundo, sucesivamente será de 14, 13..... y 1 hasta anularse por completo cuando los coches se hayan parado. Si en un instante dado se supone que la velocidad es de 6 metros por segundo, esto no quiere decir que la locomotiva hace seis metros por segundo; da á entender solamente que si conservara la rapidez del movimiento que tenia en el instante observado, el convoy recorreria 6 metros en un segundo.

18. Ecuacion del movimiento variado. — El movimiento variado de un punto sobre su trayectoria queda determinado completamente cuando para cada instante se conoce la relacion que existe entre la distancia variable e de este punto al orígen de los espacios y el tiempo correspondiente t transcurrido desde un instante inicial hasta el momento considerado. Al efecto, supondremos que esta relacion se traduce analíticamente por una ecuacion dada:

$$e = f(t)$$

que será la ecuacion del movimiento.

19. Definicion de la velocidad y de su direccion. — No puede decirse que la velocidad de un movimiento variado, en un momento dado, es, como en el movimiento uniforme, el espacio que recorre el móvil durante la unidad de tiempo y dicho instante. De lo contrario, se haria depender esta velocidad de las variaciones ulteriores del movimiento, cosa que no puede admitirse de modo

alguno. Hé aquí las consideraciones que nos han servido para dar la precedente definicion.

Supongamos M la posicion del móvil sobre su trayectoria (fig. 2) en la época t; $MM' = \Delta e$ el espa-

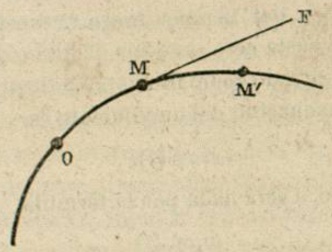

Fig. 2.

cio que recorre en un tiempo dado; Δt puede imaginarse este tiempo bastante pequeño para que el punto material se aleje constantemente del punto M durante dicho intérvalo. Si el espacio Δe habia sido descrito por un movimiento uniforme, $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ seria entonces la velocidad del movimiento. Esta demostracion representa la velocidad media con la cual el arco MM' ha sido recorrido ó la velocidad constante que hubiera sido necesario dar al móvil para hacerle recorrer con movimiento uniforme el arco MM' en el tiempo Δt disminuido indefinidamente: Δe disminuye á su vez sin límites; por consiguiente, la relacion $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ varía sin cesar porque representa la velocidad media, y converje hácia un límite determinado que llamamos la *velocidad* del móvil ó del punto M.

Así, la velocidad de este, en un punto dado de su trayectoria, es el límite de la relacion del aumento del espacio y del tiempo, luego que este último disminuye hasta cero, es decir, la derivada del espacio considerado como funcion del tiempo. Ahora bien, si la ecuacion del movimiento es

$$e = f\ (t),$$

la velocidad v será dada por la fórmula

$$v = f\ (t)$$

El cálculo de las derivadas proporcionará la expresion analítica de la velocidad, todas las veces que la ecuacion del movimiento será conocida.

La direccion de la velocidad es la de la tangente MF al punto M.

Debe tenerse presente que se obtiene la misma definicion considerando un intérvalo Δt bastante corto para que el movimiento durante este tiempo pueda mirarse como uniforme; porque entonces se tendrá $\Delta e = v\Delta t$, de donde se saca $v = \frac{\Delta e}{\Delta t}$. En este sentido, pues, es cuando se dice que la *velocidad del movimiento variado en un instante dado, es el cociente de la division del espacio infinitamente pequeño por el tiempo infinitamente pequeño consumido en describirlo.*

Puede decirse tambien que la *velocidad del cuerpo seria la del movimiento uniforme que sucederia al movimiento variado, si, en el instante en que se le considera, cesara repentinamente de aumentar ó disminuir el movimiento.*

Estos principios pueden demostrarse prácticamente con el auxilio de las reglas que nos suministra la geometría analítica, las cuales nos facilitan los medios de representar el movimiento variado y su velocidad. Al efecto podrán hacerse las construcciones ó representaciones gráficas que los indiquen y comprueben. Y con el fin de evitar todo cálculo para transformar las longitudes medidas, es necesario suponer que se han representado por la misma longitud las unidades del tiempo y del espacio.

20. Casos en que la ecuacion del movimiento no está dada. — Sucede frecuentemente que la relacion entre los espacios y los tiempos son dados por los supuestos experimentales en vez de serlo por una ecuacion. Esto puede verse en ciertas máquinas de indicaciones continuas que por sí mismas describen mecánicamente la *curva de los espacios.* En este caso el trazado de la tangente á la curva hace conocer en cada punto la velocidad del movimiento en todos y en cada uno de los instantes considerados.

En otros, los datos se reducen á una *tabla* que encierra cierto número de valores correspondientes á e y t. Estos valores dan el mismo número de puntos de la curva ignorada por los espacios. Si estos puntos están cerca unos de otros, se podrán construir aproximativamente esta curva y sus tangentes. Se puede tambien, aplicando los métodos ordinarios de interpelacion, determinar la ecuacion de una curva algébrica que pasa por los puntos dados, y que los sustituye á la curva de los espacios. Además, calculando la derivada de la ordenada de la curva obtenida por este medio, se logrará así tambien el valor aproximado de la velocidad.

Empero, cualesquiera que sean los datos que sirvan á construir la curva, la discusion de la ordenada y de su tangente es propia y suficiente para dar á conocer todas las circunstancias del movimiento. Así, sin entrar, pues, en los detalles que necesitara esta cuestion y limitándonos solamente á llamar la atencion de nuestros lectores, diremos, sin embargo, que el movimiento es *directo*, ó tiene lugar el sentido en los espacios positivos, cuando el valor de la ordenada aumenta algébricamente, y que es *retrógrado* en sentido contrario. En el movimiento directo, la velocidad irá aumentando si la curva vuelve su convexidad hácia la region inferior del plano, y, disminuyendo si la convexidad se vuelve hácia la region superior, pues el resultado es inverso en el movimiento retrógrado.

CAPITULO III

Del movimiento uniformemente variado, y de su velocidad y ecuacion.

20. Definido en el capítulo primero el movimiento uniforme, y tratado en el segundo del movimiento variado, hablaremos en este de las propiedades del movimiento uniformemente variado; pero antes diremos qué se entiende por este movimiento.

21. Definicion. — El movimiento de un cuerpo, ó de un punto material sobre una línea recta ó curva es uniformemente variado, *cuando aumenta ó disminuye la velocidad de cantidades proporcionales á los tiempos gastados para recorrerlas*. Así, será uniformemente *acelerado* cuando la velocidad aumenta; y por el contrario, uniformemente *retardado* cuando la velocidad disminuye en las mismas proporciones.

22. Velocidad y ecuacion de este movimiento.

— Para comprenderlo mejor, designaremos con v_o la velocidad inicial, ó la del móvil al principio del tiempo, y con v la velocidad del mismo al fin del tiempo t. Supongamos tambien para mayor precision, que γ es la variacion de la velocidad durante un segundo. Pues bien, en este caso la variacion en el tiempo t será γt. Luego siendo el movimiento acelerado, nos dará por resultado

$$v_o - v = \gamma t \text{ ó } v = v_o + \gamma t.$$

Estas dos fórmulas se reducen á esta sola,

$$v = v_o + \gamma t,$$

conviniendo en dar á γ el signo $+$ en el primer caso y el signo — en el segundo.

23. Observacion. — En el precedente párrafo hemos supuesto que v_o y v son velocidades positivas; pero la fórmula que antecede es siempre la propia del movimiento uniformemente variado; así, este será acelerado cuando v_o é γ lleven el mismo signo, llevando signos contrarios, y entonces el movimiento será retardado hasta que no se obtenga $v_o + \gamma t = o$, de donde resulta $t = \frac{v_o}{\gamma}$. Por lo tanto, desde este momento el movimiento será acelerado porque cambia de sentido.

24. Aceleracion. — La cantidad constante γ, que mide la variacion de la velocidad durante la unidad de tiempo, se llama *aceleracion*; esta es una

longitud, como v_o y v, que depende igualmente de dos unidades. Los diversos movimientos uniformemente variados se distinguen entre sí por la importancia y grandeza del movimiento recíproco de cada uno, y por el signo de la aceleracion.

Sin embargo, puede deducirse de la fórmula $v = v_o + \gamma t$ la expresion del espacio recorrido en este movimiento. Porque siendo la velocidad la derivada del espacio, segun queda dicho, basta con subir á la funcion del tiempo de que deriva $v_o + \gamma t$, lo cual nos dará la fórmula

$$e = e_o + v_o t + \frac{1}{2} \Delta t^2;$$

e_o es la constante que facilita las operaciones de esta naturaleza : aquí representa la distancia del cuerpo al orígen de los espacios, en el momento en que $t = o$.

Por consecuencia, en todo movimiento uniformemente variado, el espacio recorrido es una funcion del segundo grado del tiempo gastado para recorrerla.

Esta nueva ecuacion ó fórmula, como encierra tres constantes e_o, v_o, γ, facilita asímismo el conocimiento de las tres posiciones del móvil sobre su trayectoria, condicion que es, por cierto, muy necesaria é indispensable para determinar su movimiento.

Finalmente, deberá notarse que si el camino recorrido es una funcion del segundo grado del tiempo, el movimiento es uniformemente variado; pues si resulta

$$e = a + bt + ct^2,$$

se obtendrá la velocidad, tomando la derivada

$$v = b + 2ct,$$

fórmula que expresa que la velocidad varía en proporcion al tiempo.

Estas fórmulas son homogéneas. Desde luego se concibe con facilidad que son independientes de la unidad de longitud; pues si se toma una unidad n veces mas grande, los números v_0, v, γ, e_0, e, deberán ser reemplazados $\frac{v_0}{n}$, $\frac{v}{n}$, $\frac{\gamma}{n}$, $\frac{e_0}{n}$, $\frac{e}{n}$, y las fórmulas subsistirán siempre con estos nuevos números.

Mas para probar que no dependen de la unidad del tiempo, es necesario notar que si se toma una unidad n veces mas grande, se verá, primero, que el tiempo es representado por el número n veces mas pequeño $\frac{t}{n}$; segundo, una velocidad que, siendo la relacion $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ de un espacio á un tiempo su denominador se convierte en n veces mas pequeño, y por lo tanto, las velocidades v_0, v deben reemplazarse con nv_0, nv; y tercero, cuando la aceleracion γ, que es la velocidad adquirida en un segundo, ó para comprenderlo mejor, la relacion de la velocidad adquirida en t segundos durante el

tiempo t empleado para adquirirla, su numerador deberá multiplicarse por n puesto que es una velocidad, y su denominador dividirse por n visto que la unidad del tiempo es n veces mas grande. Ultimamente, su valor primitivo debe multiplicarse por n^2, esto es, reemplazarse por $n^2\gamma$. Así, haciendo estos cambios en las fórmulas $v = v_0 + \gamma t$ y $e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, quedarán

$$nv = nv^0 + n^2\gamma\frac{t}{n}, \text{ ó } v = v_0 + \gamma t.$$

$$e = e_0 + nv_0\frac{t}{n} + \frac{1}{2}n^2\gamma\frac{t^2}{n^2} \text{ ó } e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Luego como se evidencia, por lo demostrado, las precedentes fórmulas no dependen de las unidades del tiempo expresadas por la relacion n.

25. Simplificacion de fórmulas.— Las fórmulas $v = v_0 + \gamma t$ y $e = {}_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$ que representan el movimiento uniformemente variado pueden simplificarse. Contando el tiempo desde el momento en que la velocidad es nula, la fórmula citada $v = v_0 + \gamma t$ quedará reducida á

$$v = \gamma t;$$

y si además se cuentan los espacios partiendo del punto en que entonces se halla el móvil, la fórmula $e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, se reducirá á

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

De este modo se verá que las velocidades son proporcionales á los tiempos transcurridos y los espacios andados á los cuadrados de estos mismos tiempos.

26. Curva de las velocidades. — Puede igualmente construirse la curva por las velocidades, ó, lo que es lo mismo, la línea representada por la ecuacion

$$v = v_0 + \gamma t,$$

tomando el tiempo por las separaciones y las velocidades por las ordenadas. Esta línea es una recta inclinada sobre el eje de los tiempos. Su coeficiente de inclinacion es el valor de la aceleracion; corta el eje de las velocidades en el punto que da la velocidad inicial y el eje de los tiempos en el punto que marca el momento en que la velocidad es nula, y en que el movimiento cambia de sentido.

27. Valor de la aceleracion en la caida de los cuerpos. — El movimiento de un cuerpo pesado que cae en el vacío es uniformemente acelerado, segun lo demuestra la experiencia. La aceleracion γ es la misma para todos los cuerpos, *en el mismo lugar*. Represéntase generalmente por la letra g, primera de la palabra gravedad. Se ha evaluado así :

$$g = 9^m,8088.$$

Por consiguiente, un cuerpo pesado partiendo

sin velocidad inicial adquiere una velocidad de $9^m,8088$ en el primer segundo de su caida en el vacío; luego recorre en este segundo la mitad de dicho espacio, esto es, $4^m,9044$.

28. Ecuacion de este movimiento. — Si se designa con v la velocidad adquirida al fin del tiempo t, y por h la altura de donde cae el cuerpo durante este tiempo, las ecuaciones del movimiento son

$$v = gt \qquad h = \frac{1}{2} gt^2$$

y eliminando t $\qquad v = \sqrt{2gh}.$

Por consiguiente, v es la velocidad de la altura h.

Mas si el móvil está animado de una velocidad inicial v_0, las ecuaciones son :

$$v = v_0 + gt, \quad h = v_0 + \frac{1}{2} gt^2,$$

y eliminando t, $\quad v^2 = v_0^2 = 2gh.$

Como aplicacion de estás fórmulas resolveremos los siguientes problemas :

1.° Un cuerpo cayendo por lo largo de la vertical OX (fig. 3), ha recorrido la longitud dada $A\,B = h$ en un tiempo dado θ. Ahora se preguntará : ¿de qué punto ha partido sin velocidad inicial ?

Fig. 3.

Supongamos Θ el punto de salida : pongamos en seguida $\Theta\,A = x$, y designemos con t el tiempo

2.

desconocido durante el cual el cuerpo ha caido del punto Θ al punto Δ, y resultará

$$x = \frac{1}{2} g t^2, \qquad x + h = \frac{1}{2} g (t + \theta)^2$$

De ahí se saca por medio de la sustraccion

$$h = \frac{1}{2} g (2t\theta + \theta^2) = gt\theta + \frac{g\theta^2}{2};$$

y por consecuencia $t = \frac{(2h - g\theta)^2}{2g\theta}$.

Sustituyendo el valor t en la expresion de x, se obtendrá $x = \frac{(2h - g\theta)^2}{8g\theta^2}$

Mas, para que el problema sea posible es necesario que t sea positivo, y al efecto se exige que se tenga $h > \frac{g\theta^2}{2}$, como condicion evidente *á priori.*

2.° caso. Dos cuerpos pesados C_0, C_1 caen el uno de Δ y el otro de B con velocidades iniciales dadas V_0, V_1; el primero parte θ segundos antes que el otro; la distancia ΔB es dada igual á h: ¿en qué punto y en qué momento se encontrarán? (Fig. 3.)

Sea, pues, R el puesto del encuentro, x la distancia BR, y t el tiempo que transcurre durante la caida de C_1. Las ecuaciones son :

$$h + = v_0 (\theta + t) + \frac{1}{2} g (\theta + t)^2,$$

$$x = v_1 t' + \frac{1}{2} g t^2.$$

La sustraccion da :

$$h = v_0\theta + (v_0 - v_1)\, t + \frac{1}{2} g (\theta^2 + 2\theta t),$$

de donde resulta $t = \frac{h - v_0\theta - \frac{1}{2} g\theta^2}{v_0 - v_1 + g\theta}$

Sustituyendo este valor de t en la expresion de x, se encontrará la distancia que se busca. Será muy útil el discutir las fórmulas, y por medio de ellas concluir las condiciones de la posibilidad del problema.

El siguiente problema podrá proponerse aun, pero su resolucion la dejamos al arbitrio del lector :

Dos cuerpos pesados parten del mismo punto Θ en épocas diferentes dadas, sin velocidades iniciales. ¿En qué momento serán separados el uno del otro por una distancia dada, y qué caminos habrán recorrido en su caida?