tud, emprenden nuevo movimiento, pero en sentido inverso. El de la izquierda baja aceleradamente y abandona su peso adicional sobre el anillo que atraviesa; el de la derecha vuelve á tomar al mismo tiempo el que habia abandonado antes, y el movimiento se disminuye nuevamente para volver á moverse en sentido inverso, y así sucesivamente hasta que se concluya ó interrumpa la operacion.

86. Observacion. — Cuando en su descenso queda el peso adicional abandonado sobre su anillo respectivo, posee la velocidad producida por la accion de la gravedad de su propio peso desde que principió su movimiento. Mas, al mismo tiempo el cuerpo de la izquierda sube con igual velocidad, se ampara del otro peso adicional y le comunica instantáneamente la misma velocidad. Este segundo peso adicional se halla pues lanzado de abajo arriba con la velocidad que el primero habia adquirido cayendo.

Notáse que la altura á que se eleva el segundo, en virtud de la velocidad que le ha comunicado la fuerza impulsiva, es igual á la que tenia el primero cuando bajaba á su centro. Así, luego que el segundo peso, que se encuentra en las mismas condiciones que el otro, habrá descendido de su elevacion, tendrá de ariba abajo la misma velocidad que tenia el otro al principiar su movimiento de abajo á arriba.

CAPITULO III

De los efectos de muchas fuerzas dirigidas sobre un cuerpo aislado.

I. Axioma experimental.

87. Axioma. — La accion de una fuerza sobre un punto material aislado es independiente de la accion simultánea de otra fuerza sobre el mismo cuerpo.

Esta verdad incontestable se deduce ya de cuanto dejamos explicado en la primera parte, y capítulos primero y segundo de la presente, y deberíamos, por lo tanto, omitir este capítulo y dejar, para cuando tratemos de su aplicacion á las máquinas, las teorías que en él abrazamos. Empero, creyendo que su omision dejaria abierta una laguna que dañaria á la perfecta claridad y al método que hemos adoptado, desenvolvemos el precedente axioma, que se mira muchas veces como una consecuencia del consignado en el párrafo 65. Sin embargo, no puede negarse su notable diferencia. Efectivamente, mientras que en el primero solo se trata del movimiento adquirido *anteriormente* por el cuerpo ó punto material, en este, por el contrario, se trata de un movimiento modificado *actualmente* por una fuerza; pues aun cuando en aquel hemos admitido la independencia, no es evidente, con todo, que el efecto de una fuerza que ejerce su accion sobre un cuerpo sea independiente de este último estado en que se encuentra por lo tanto el expresado cuerpo.

Nadie, por cierto, puede negar que hay numerosos casos en que muchas fuerzas ejercen su accion simultánea sobre un mismo punto ó cuerpo. Pues bien; si esto es incontestable, tambien lo es que si cada una obrase separadamente produciria cierto efecto, y el cuerpo, en su virtud, recibiria el movimiento que produjera cada impulsion aislada. Es verdad que el movimiento real no se evidencia, como tampoco los de estos movimientos simples; empero, se admite como principio experimental, que cada una de las fuerzas imprime al cuerpo una aceleracion independiente, esto es, que su efecto es el mismo que si obrase sola, segun expresa el axioma que explicamos.

II. Proporcion de las fuerzas constantes y de las aceleraciones.

88. Teorema. — Dos fuerzas constantes aplicadas sucesivamente á un mismo punto material, ya

saliendo del estado de quietud, ó ya estando animado de una velocidad inicial de la misma direccion que la fuerza, son entre sí como las aceleraciones que producen.

En comprobacion, supongamos dos fuerzas constantes F y F' y las aceleraciones que producen γ, γ' y que entre dichas fuerzas existe la medida comun φ, de manera que nos den:

$$F=n\varphi,\ F'=n'\varphi,\ \text{y por lo tanto}\ \frac{F}{F'}=\frac{n}{n'}$$

Supongamos además, en virtud del precedente axioma, que ψ es la aceleracion producida por la fuerza φ; así, aplicando al cuerpo n fuerzas φ en el mismo sentido, producirán n aceleraciones independientes, siendo cada una de ellas igual á ψ, y la aceleracion total $n\psi$. Por consiguiente, la fuerza $n'\varphi=F$ producirá la aceleracion $n'\psi$; todo lo cual dará por resultado

$$\gamma=n\psi,\ \gamma'=n'\psi,\ \text{y de aquí}\ \frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{n}{n'}.$$

Concluyendo, por fin, de las igualdades $\frac{F}{F'}=\frac{n}{n'}$ y $\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{n}{n'}$ esta tercera fórmula

$$\frac{F}{F'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$$

Razonamiento que subsistirá siempre por mas pequeña que sea la medida comun φ. Por consecuencia, esta tercera fórmula debe considerarse como la general de todas las operaciones de esta clase.

De lo que precede se deducen las dos proposiciones siguientes.

89. PROPOSICION. — El cuociente que mide una fuerza constante aplicada á un punto material, dividido por el que mide la aceleracion que le imprime, es un número constante é igual al cuociente del peso de este cuerpo ó punto material dividido por g.

Esto sucede cuando se da el caso en que una de las fuerzas es el peso mismo del cuerpo. En su virtud, supongamos dicho peso p, y g la aceleracion correspondiente, y resultará al tenor del anterior teorema

$$\frac{F}{p}=\frac{\gamma}{g}, \text{ ó } \frac{F}{\gamma}=\frac{p}{g}.$$

90. SEGUNDA PROPOSICION. — *La relacion del peso del punto material ó del cuerpo con la aceleracion correspondiente, es un número constante para todos los lugares de la tierra.*

91. DEMOSTRACION. — Si se transporta el mismo cuerpo á otro lugar cualquiera del globo en que el peso es p' y la aceleracion g', nos dará por lo tanto la siguiente fórmula:

$$\frac{p}{g}=\frac{p'}{g'}.$$

CAPITULO IV

De la masa de los cuerpos.

I. Demostracion de la masa.

92. MASA. — Demostrando la proposicion del párrafo 90 se ha dicho que la relacion $\frac{p}{g}$ es constante para un mismo punto material, cualesquiera que sean los lugares donde se haga la observacion. Pues bien, esta relacion es lo que se llama masa de un punto material. La masa es una cualidad inherente á un punto material, la cual, designándola con m, nos dará segun el párrafo 89

$$F=m\gamma, \quad p=mg,$$

pudiendo decirse de aquí, que el cuociente del peso de un cuerpo por el número g es lo que se llama la masa de este mismo cuerpo, y que la fuerza capaz de dar cierta aceleracion á un cuerpo, ejerciendo su accion sobre él durante un segundo ó un tiempo dado, es igual al producto de la masa del cuerpo por la velocidad que debe comunicarle.

De ahí resulta que cuanto mas grande es la masa de un cuerpo, tanto mayor debe ser la fuerza que deberá comunicarle una velocidad dada, y pequeña la velocidad que le comunicará esta fuerza dada.

Tambien puede notarse que la significacion de la palabra *masa*, en mecánica, es la misma que la que se le da comunmente, pues se dice que un cuerpo es mas ó menos masivo segun que su mole es mas ó menos grande, como se verá en el transcurso de este capítulo.

93. Masa de un cuerpo. — Dos puntos materiales tienen la *misma masa*, cuando las fuerzas que los solicitan son proporcionales al movimiento que imprimen. De modo que si se reunen estos dos puntos con el pensamiento se obtiene una *masa doble*. Ahora, pues, será fácil el concebir que dos masas pueden tener entre sí ciertas relaciones dadas, como efectivamente la tienen.

Así, la *masa* de un cuerpo es la suma de las masas de los puntos materiales que la componen, y designando los pesos de estos con $p\ p'\ p''$..., la *masa* M del cuerpo será

$$M=\frac{p}{g}+\frac{p'}{g}+\frac{p''}{g}...=\frac{p+p'+p''+...}{g}$$

ó bien designando con P el *peso* del cuerpo, tendremos

$$M=\frac{P}{g},\text{ resultando así }P=Mg.$$

Hé ahí como la *masa* del cuerpo se obtiene, esto es, dividiendo la cantidad que designa su peso, evaluado á kilógramos por la letra $g=9^m\ 8088$.

94. Observacion. — Empero, como g es constante en un mismo lugar, se ve por la fórmula precedente que en estos casos la masa de los cuerpos son proporcionales al peso de los mismos. Por lo tanto, la nocion de la masa está unida á la cantidad de la materia que un cuerpo contiene.

Mas, como la masa de un cuerpo no varía cuando se transporta de un lugar á otro, se notará *que los pesos de este cuerpo en diversos lugares son proporcionales á las aceleraciones correspondientes*.

Tomado el kilógramo por unidad de la fuerza, la masa en su virtud será $M=\frac{1}{9^m,8088}=0,102$, y por consecuencia su peso en otro lugar donde la velocidad es g será en kilógramos $0^m,\ 102\ g'$.

La masa de un cuerpo es una magnitud *sui generis* que no puede compararse con otra alguna, porque es el *cuociente de una fuerza por una aceleracion*; aquella evaluada en kilógramos y esta en metros.

La densidad de un cuerpo homogéneo es la masa comprendida en la unidad de su volúmen. Pues bien, designando la densidad con ρ y el volúmen con V se obtendrá

$$M=V\rho,\text{ y por lo tanto }P=V\rho g.$$

II. Relacion entre las fuerzas, las masas y las aceleraciones.

95. La aceleracion general $F=m\gamma$ demuestra que:

Las fuerzas constantes son proporcionales á las velocidades que imprimen á una misma masa ó á las masas á que imprimen la misma aceleracion.

Y como ya tenemos $m=\frac{p}{g}$, resulta luego:

$$F=\frac{p}{g}\gamma.$$

Esta relacion determina la fuerza necesaria que ha de imprimir á un cuerpo cuyo peso está ya conocido, una aceleracion dada, ó, por el contrario, la aceleracion que la imprime una fuerza dada.

96. Relacion entre las fuerzas variables, las masas y las aceleraciones. — La relacion $F=m\gamma$ resulta de la definicion dada á la masa en el párrafo 92, cuando la fuerza F es constante y el movimiento rectilíneo. Pero se aplica á las fuerzas variables y á un movimiento cualquiera, circunstancia que es necesario establecer como regla general, porque es una de las mas importantes de la mecánica. Al efecto supongamos los dos casos siguientes:

1.° *Cuando la fuerza F es variable y el movimiento rectilíneo.* Supongamos que γ es la aceleracion en la época t; sábese que ambas siguen la misma recta que recorre el cuerpo. Durante un pequeño intérvalo de tiempo, que comprenderá el instante imaginado, la aceleracion varía de una manera continua. Así suponiendo que A y A_1 son su mayor y menor valor, se obtendrá

$$A<\gamma<A_1,$$

y por lo mismo, $mA<m\gamma<mA$.

Por consiguiente, comprendida la fuerza F entre las fuerzas constantes mA y mA_1, resulta que F y el producto $m\gamma$ se hallan comprendidos en los mismos límites; pero estos límites serán iguales si se reduce el instante de tiempo al instante matemático supuesto y calculado, por cuya razon nos dará la proporcion establecida:

$$F=m\gamma.$$

Se obtendria el mismo resultado, considerando la fuerza F constante durante un tiempo infinitamente pequeño.

2.° *Cuando la fuerza F es una fuerza cualquiera* y *el movimiento curvilíneo.*

El movimiento del cuerpo en una época cualquiera t, durante un tiempo infinitamente pequeño, puede considerarse como resultado de un movimiento debido á la velocidad adquirida, y del movimiento producido por la accion de la fuerza F

7.

durante dicho tiempo. De aquí se deduce que la velocidad del movimiento es el resultado de las velocidades de estos movimientos compuestos. Además, el movimiento debido á la velocidad adquirida siendo enteramente uniforme su aceleracion será nula. Luego siendo esto así, la aceleracion resultante no es otra que la de γ debida á la fuerza F. Pero esta fuerza puede ser considerada como uniforme durante el elemento de tiempo imaginado, y por consiguiente igual á $m\gamma$, y dirigida en el mismo sentido que γ.

Así, debe establecerse por principio general que, en todo movimiento rectilíneo ó curvilíneo, la fuerza es igual al producto de la masa por la velocidad y dirigida en sentido de esta misma velocidad.

III. De la fuerza de inercia.

La fuerza de inercia se demuestra perfectamente con el principio de igualdad de la accion y de la reaccion antes establecida. En efecto, supongamos un cuerpo sometido á la accion de una fuerza constante por medio de un resorte cuya masa sea insignificante. Este resorte que, segun lo demuestra la experiencia, se estira de una manera invariable, se halla solicitado por dos fuerzas iguales y contrarias. La aplicada al extremo del resorte, es la fuerza que produce la aceleracion ; la otra, aplicada al extremo unido al cuerpo, es la reaccion del

cuerpo. Por consecuencia, en este ejemplo la accion es igual y contraria á la reaccion. Este principio puede aplicarse á un caso en el que la fuerza sea variable, por cuanto una fuerza variable puede ser considerada como constante durante un tiempo infinitamente pequeño.

97. Fuerza de inercia. — Ahora bien; esta reaccion del cuerpo se llama *fuerza de inercia*. Para comprender perfectamente el sentido de esta expresion, es necesario observar que cuando queremos poner un cuerpo en movimiento, experimentamos cierta resistencia que nos revela la inercia de la materia. Esta reaccion la llamamos *fuerza de inercia*. Pero se ha extendido naturalmente esta nocion á los casos en que la accion se ejerce sobre el cuerpo sin agente visible, porque una experiencia acreditada ha hecho ver siempre que los fenómenos observados guardan la mas perfecta conformidad con los cálculos fundados sobre esta hipótesis. No de otro modo, pues la atraccion del sol sobre la tierra se halla acompañada de otra atraccion igual y contraria de la tierra sobre el sol. La primera es la accion que se ejerce sobre la tierra, y la segunda la reaccion ó fuerza de inercia de la tierra.

De lo expuesto se concibe que la fuerza de inercia es igual y directamente opuesta á la fuerza motriz F, que su expresion será $-m\gamma$; y que descomponiendo la fuerza F en fuerzas dirigidas siguiendo ejes fijos ó en fuerzas tangencial y normal, se podrá descomponer así mismo la fuerza de inercia, pues el proceder á la operacion son enteramente los mismos; pero para verificarlo debe tenerse presente que sus componentes serán siempre iguales y opuestas á los de la fuerza F.

Para evaluar á kilógramos la fuerza de inercia, basta, si no se quiere adoptar otra fórmula que la reemplace, con sustituir la masa m del móvil por $\frac{p}{g}$ lo cual dará $-p\frac{\gamma}{g}$. El peso p y el número g, siendo perfectamente conocidos, la fórmula nos facilitará la cantidad de la fuerza tan luego como se reemplace la velocidad γ por su propio valor.

Los efectos de las fuerzas de inercia los iremos tocando y reconociendo en las diversas aplicaciones que haremos en el curso de este MANUAL.

CAPITULO V

De la introduccion de la masa en las ecuaciones del movimiento producido por una fuerza constante.

98. NUEVA FORMA DE ECUACIONES DEL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO. — La fuerza es *constante* siempre que conserva en todos y en cada uno de los instantes del movimiento la misma intensidad y direccion. Comunmente se da este nombre á las fuerzas cuya direccion solamente varía, mientras que su intensidad permanece invariable siempre.

Pues bien; supongamos ahora que un punto material de la masa m está sometido á la accion de la gravedad ó á la de una fuerza constante cualquiera F que le imprime un movimiento rectilíneo uniformemente variado. Las ecuaciones de este movimiento serán:

$$v-v_0=\gamma t,\ x-x_0 t+\frac{1}{2}\gamma t^2,\ F=m\gamma.$$

Luego se saca de la última $\gamma=\frac{F}{m}$, y sustituyendo este valor á los otros dos, antes enunciados, tendremos:

$$v - v_0 = \frac{F}{m} t, \quad x - x_0 = -v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

En estas ecuaciones, F debe tener el valor de γ empleado para designar la variacion de la velocidad en un segundo.

99. Teorema. — *Cantidad del movimiento, impulsion*. Téngase presente para comprender las precedentes ecuaciones, que v_0 representa la velocidad inicial, esto es, la del cuerpo al orígen del tiempo, v la velocidad al fin del tiempo t, y por fin γ la variacion del movimiento en un segundo, segun queda indicado.

De la ecuacion $v - v_0 = \frac{F}{m} t$, puede sacarse la cantidad del movimiento

$$mv - mv_0 = Ft.$$

De manera que el producto mv de la masa del móvil por su velocidad en la t se denomina *cantidad* de movimiento. El producto Ft de la fuerza por el tiempo durante el cual ha ejercido su accion se llama frecuentemente *impulsion* de la fuerza durante dicho tiempo. De suerte que la fórmula

$$mv - mv_0 = Ft,$$

demostrará de una manera evidente que cuando una fuerza constante obra durante un tiempo t sobre un punto material en quietud ó animado por

la accion de una velocidad inicial de la misma direccion que la fuerza, la variacion de la cantidad del movimiento es igual por la importancia y por el signo á la impulsion de la fuerza durante este tiempo.

Para mayor inteligencia de lo expuesto, supongamos aun otro punto de masa m' solicitado por otra fuerza F' durante el mismo tiempo t' y entonces tendremos

$$m'v' - m'v_0' = F't$$

concluyendo $\frac{mv - mv_0}{mv' - mv_0'} = \frac{F}{F'}$

De este modo, las cantidades adquiridas del movimiento durante el mismo tiempo por dos puntos materiales diferentes son proporcionales á las fuerzas constantes que han podido producirlas.

Si en la fórmula establecida anteriormente para demostrar la *cantidad del movimiento* se supone $v = o$, se tendrá por resultado

$$mv_0 = -Ft.$$

Así, la cantidad de un movimiento poseido por un punto material es igual, tanto en la magnitud como en el signo, á la impulsion que ha recibido desde el momento en que principió su movimiento.

Además, si en la fórmula $mv - mv_0 = Ft$ se pone $v = o$, se tendrá:

$$mv_0 = -Ft.$$

En este caso la cantidad del movimiento poseido por un punto material es igual y de signo contrario á la impulsion necesaria para volverlo al estado de quietud.

100. Fuerza viva, trabajo. — Para encontrar la *fuerza viva* y el *trabajo*, es necesario que eliminemos ahora t de entre las ecuaciones

$$v-v_o=\frac{F}{m}t;\ x-x_0=v_ot+\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2,$$

y para realizarlo con sencillez y precision, elevemos los dos miembros de esta primera ecuacion á cuadrado, despues de haber hecho pasar v_o en el segundo; en seguida multipliquemos los dos miembros de la segunda ecuacion $x-x_0$, etc., por $2\frac{F}{m}$ y resultará :

$$v^2=v_o^2+2v_ot\frac{F}{m}+\frac{F^2}{m^2}t^2$$

$$2\frac{F}{m}(x-x_o)=2v_ot\frac{F}{m}+\frac{F^2}{m^2}t^2$$

y por consiguiente $v^2=v_o^2+2\frac{F}{m}(x-x_o)$,

y por lo tanto la fórmula ó ecuacion

$$\frac{mv}{2}-\frac{mv_o^2}{2}=F(x-x_o).$$

Así, pues, el producto mv^2 de la masa de un punto material ó de un cuerpo por el cuadrado de su velocidad en la época t, ha recibido el nombre de *fuerza viva*, y el producto $F(x-x_o)$ de la fuerza

por el espacio que le ha hecho recorrer se llama *trabajo* de esta fuerza.

De la fórmula antecedente se desprende, que luego que una fuerza constante ejerce su accion durante cierto tiempo sobre un punto material estando este en quietud ó animado de una velocidad inicial de la misma direccion que la fuerza, la media variacion de la fuerza viva es igual por la magnitud y por el signo al *trabajo* de la fuerza durante el mismo tiempo.

Por consiguiente, si se opera sucesivamente en la fórmula $v_o=o$, $v=o$ se obtendrá :

$$\frac{mv^2}{2}=F(x-x_o)\quad\frac{mv_o^2}{2}=-F(x-x_o);$$

y por lo tanto, la media fuerza viva poseida por un punto material es igual, así en la magnitud como en el signo, al *trabajo* que ha recibido desde que principió el movimiento : es así mismo igual y de signo contrario al *trabajo* necesario para reducirlo al estado de quietud.

Debe observarse que la palabra fuerza, en el precedente caso ó teorema, no tiene exactamente la significacion ordinaria. Antes la habíamos empleado para indicar un esfuerzo, una presion ó tirantez expresada por kilógramos. Ahora, por el contrario, el nombre de *fuerza viva* lo hemos aplicado al producto complexo de una fuerza por un espacio recorrido. Por lo tanto, no puede uno menos de lamentar que se haya adoptado esta palabra para representar nociones tan distintas.

Por otra parte, no es la cantidad entera mv^2 sino la mitad, la que entra en la enunciacion de los teoremas mas importantes de la mecánica, y por la misma razon es bastante desagradable de no tener mas que una palabra para representar el doble de una cantidad que se encuentra á cada instante. Mas valiera dar este nombre á la expresion $\frac{mv^2}{2}$; pero renunciamos á pesar nuestro á este deseo por conformarnos con el uso establecido generalmente.

101. Aplicacion de las reglas precedentes. — Apliquemos las reglas que anteceden á los siguientes casos:

1.° Si un ternero cuyo peso es p, cae sobre una estaca terminada en punta de la altura h, su velocidad al fin de la caida será v, operando para obtener este resultado en la fórmula que antecede

$$\frac{mv^2}{2} = F\,(x-x_0),$$

nos dará $ph = \frac{mv^2}{2}$:

Es así que $p=mg$,
luego $v^2=2gh$.

2.° Una bala del peso p sale del fusil con la velocidad dada v: admitiendo que la fuerza que la ha lanzado ha permanecido constante desde que se puso en movimiento, las ecuaciones

$$mv = Ft;\ \frac{mv^2}{2} = F\,(x-x_0)$$

se convertirán en

$$\frac{p}{g}\,v = Ft,\ \frac{pv^2}{2g} = Fx,$$

y nos dan la intensidad de la fuerza cuando se conoce ora el tiempo de la accion, ora la longitud del cañon.

Para los fusiles de municion ordinarios se tiene comunmente, $v=500^{m}$ $p=0^{k}0258$ y la longitud del cañon $x=1^{m},10$, resultando $F=299^{k}$.

CAPITULO VI

De la composicion y descomposicion de las fuerzas.

102. Resultante de muchas fuerzas. — Un cuerpo material puede estar sometido simultáneamente á la accion de muchas fuerzas diferentes en magnitud y en direccion; pero no obstante, el cuerpo no toma ni puede tomar mas que un movimiento único y determinado. Este movimiento puede producirse aplicando, en su misma direccion, una fuerza proporcionada al punto material; y haciéndolo así se evidenciará *que todas estas fuerzas diferentes pueden reemplazarse por una sola.*

Una fuerza que produzca el mismo efecto que producen otras muchas, se llama *resultante*; y las fuerzas dadas, los *componentes.*

Por consiguiente, *las fuerzas* (cualquiera que sea su número) *aplicadas á un mismo punto material, tienen siempre una resultante.*

Fácilmente se concibe esta verdad. Supongamos que diez hombres arrastran un cuerpo, y que la fuerza de estos diez hombres puede reemplazarse por la de un solo caballo. Pues bien; la accion de la fuerza del caballo que sustituye las de los diez hombres, es la *resultante* en el presente ejemplo, y las de estos, *componente*.

Finalmente, la composicion de las fuerzas tiene por objeto el determinar la *resultante* cuando se conocen las *componentes*.

De lo expuesto se deduce el principio fundamental siguiente, que nos servirá para hacer un paralelógramo de las fuerzas.

103. Teorema. — *Dos fuerzas aplicadas á un mismo punto material y representadas, en magnitud y direccion, por dos líneas rectas trazadas desde este dicho punto, tienen una resultante única representada en magnitud y direccion por la de las diagonales del paralelógramo formado sobre las rectas que salen del expresado punto.*

Para demostrarlo, consideremos desde luego dos fuerzas constantes F, F_1 (figura 33) que obran si-

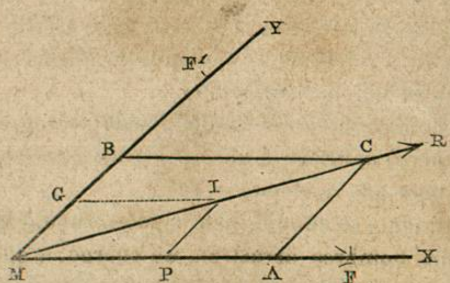

Fig. 33.

multáneamente sobre el punto M quieto en las direcciones MX, MY, y representadas en magnitud por las líneas rectas MA, MB, formemos el paralelógramo $MACB$. Supongamos ahora γ é γ_1 las velocidades constantes que imprimirian separadamente al cuerpo. En virtud de la primera, el punto material recorreria sobre MX, en el tiempo t, un espacio $MP=\frac{1}{2}\gamma t^2$; en virtud de la segunda, recorreria sobre MY, en el mismo tiempo, un espacio $MG=PI=\frac{1}{2}\gamma_1 t^2$.

Como se ve, existe una independencia mutua entre los efectos simultáneos de las dos fuerzas segun el principio establecido en el precedente capítulo. Así, las ecuaciones del movimiento serán

$$X=\frac{1}{2}\gamma t^2,\ Y=\frac{1}{2}\gamma_1 t^2,$$

y la de la trayectoria que se obtiene eliminando t

$$Y=\frac{\gamma_1}{\gamma}X.$$

Como esta ecuacion es del primer grado, el movimiento es rectilíneo.

Luego, puesto que se obtiene

$$\frac{Y}{X}=\frac{\gamma_1}{\gamma}=\frac{F_1}{F}=\frac{AC}{MA}$$

se evidencia que, reuniendo MI, los triángulos MPI, MAC son semejantes, y que el punto I está sobre MC. Luego el movimiento está dirigido siguiendo la diagonal AC.

Además $\frac{MI}{MP}=\frac{MC}{MA}$, ó $MI=\frac{MC}{MA}\cdot MP$,

$$MI=\frac{1}{2}\gamma\cdot\frac{MC}{MA}t^2.$$

En su vista, el movimiento es uniformemente acelerado, y la fuerza que lo produce constante.

Finalmente, la velocidad de este movimiento es $\gamma\frac{MC}{MA}$, y designándolo por Γ, se tiene la ecuacion

$$\frac{\Gamma}{\gamma}=\frac{MC}{MA}.$$

Así, MA es la fuerza que produce la velocidad γ; luego la que produce la velocidad Γ está representada por MC.

Obsérvese que si las dos fuerzas F, F_1 son variables en magnitud y en direccion, pòr eso no es menos cierto que, en un momento dado, cada una de ellas tiene un valor y una direccion perfectamente determinados, y que sus *variaciones ulteriores* no podrian tener influencia alguna en su *actual* composicion. Por lo tanto, bajo de este punto de vista pueden considerarse como variables; de este modo el principio establecido quedará demostrado en todas sus partes.

Sin embargo, no puede afirmarse que el movimiento es uniformemente acelerado ni que tiene lugar siguiendo la diagonal del paralelógramo.

Si el cuerpo tuviera una velocidad inicial, esta no ejerceria ninguna influencia sobre el efecto de las fuerzas. Por consiguiente, el principio establecido subsiste aun en este caso.

104. Descomposicion de una fuerza en dos. — Ahora descompondremos *una en dos fuerzas*. Resulta, pues, de lo que acabamos de demostrar, que se puede descomponer una fuerza, R, (figura 33) en otras dos que tengan direcciones dadas MX y MY. Podrá además descomponerse en otras dos con una magnitud MA y una direccion dadas MX. En fin, podrá darse la magnitud y la direccion de las dos componentes con la magnitud y la direccion de las resultantes. Al efecto, bastará formar para cada caso el triángulo MAC con las circunstancias necesarias para ejecutar la operacion cual se requiere.

Debe tenerse presente además, que dos fuerzas, cualesquiera que sean, se componen como dos movimientos, ó como dos velocidades, ó como dos aceleraciones; y en su virtud, lo mismo puede hacerse respecto de un número de mas ó menos fuerzas aplicadas simultáneamente á un punto material. Así, y sin que sea necesario repetir las razones aducidas anteriormente en prueba de esta verdad, se comprenderá que las reglas del paralelipípedo ó del polígono de las velocidades ó aceleraciones y sus recíprocas, subsisten con relacion á las fuerzas, como lo veremos en el siguiente paralelipípedo.

105. Paralelipípedo de las fuerzas. — *Tres fuerzas aplicadas á un mismo cuerpo ó punto material, y representadas, en magnitud y direccion, por la diagonal del paralelipípedo construido sobre las tres rectas precedentes.*

De aquí resulta la descomposicion de una fuerza en otras tres.

106. Polígono de las fuerzas. — No es menos evidente el principio relativo *al polígono de las fuerzas. Si muchas fuerzas son aplicadas á un mismo punto material y que se construye una línea poligonal saliendo de este punto, cuyos lados consecutivos representen estas fuerzas en magnitud y direccion, la recta que forma el polígono representa su resultante en magnitud y direccion.*

Por consiguiente, *si todas las fuerzas son dirigidas sobre una misma recta, la resultante es la suma algébrica de las mismas.*

107. Relaciones analíticas. — Ahora, pues, podemos establecer, con la aplicacion de lo expuesto, las relaciones analíticas que existen *entre las fuerzas y sus resultados.* Las fórmulas que evidencian estas relaciones entre las velocidades ó aceleraciones componentes y la resultante, subsisten igualmente respecto de las fuerzas. Bajo de este supuesto, designando las fuerzas con F, F', F'', etc.,

y la resultante con R, obtendremos este caso de dos fuerzas

$$\frac{F}{\text{sen}\,(F', R)} = \frac{F'}{\text{sen}\,(F, R)} = \frac{R}{\text{sen}\,(F, F)},$$
$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2\,F, F' \cos\,(F, F');$$

caso particular de dos fuerzas rectangulares :

$$F = R \cos\,(F, R),\ F' = R \cos\,(F'\ R),$$
$$R^2 = F^2 + F'^2;$$

caso de tres fuerzas rectángulares

$$F = R \cos\,(F, R),\ F' = R \cos\,(F', R),\ F'' = R \cos\,(F'', R),$$
$$R^2 = F^2 + F'^2 + F''^2.$$

Resulta, de lo que precede, que cada fuerza es la proyeccion de la resultante sobre la direccion de la fuerza.

Caso de un número cualquiera de fuerzas : a, b, c, a', b', c',... A, B, C, designan los ángulos de las fuerzas F, F',... R, con tres ejes rectangulares fijos pasando por el punto de aplicacion nos dará :

$$R \cos\ A = \Sigma F\ (\cos\ a),\ R\ \cos\ B = (\Sigma F\ \cos b),$$
$$R\ \cos C = \Sigma\ F\ \cos c.$$
$$R^2 = (\Sigma F \cos a)^2 + (\Sigma F \cos b^2 + \Sigma F \cos c.$$

Caso particular donde todas las fuerzas están en un mismo plano : si designamos este con XY resultará :

$$R \cos\ A = \Sigma\ F\ \cos a,\ R\,\text{sen}\ A = \Sigma\ F\ \text{sen}\ a,$$
$$R^2 = (\Sigma\ F\ \cos a)^2 + (\Sigma\ F\ \text{sen}\ a)^2.$$

108. — Demostrado ya las relaciones analíticas entre las fuerzas y sus resultantes, terminaremos este capítulo con las *componentes, tangencial y normal de la fuerza en un movimiento cualquiera*, primero y en seguida respecto de las de la *fuerza de inercia.*

Ya dejamos establecido en otro capítulo que la aceleracion, en un movimiento cualquiera, designada con γ se descompone en dos aceleraciones; la una es tangencial é igual al $lim.\ \frac{v_1-v}{\Delta t}$, y la otra normal é igual á $\frac{v^2}{\rho}$. Y supuesto que las fuerzas se componen como las aceleraciones, resulta que la fuerza $m\gamma$, segun dijimos cuando tratamos de las relaciones de las fuerzas, masas y aceleraciones, tiene por componente tangencial $m\ lim.\ \frac{v_1-v}{\Delta t}$, y por componente centripeta $\frac{mv^2}{\rho}$.

109. — Tambien expusimos hablando de la relacion que existe entre las fuerzas variables, masas y aceleraciones, que la fuerza de inercia es igual y opuesta á la fuerza motriz: aquella, pues, tiene por componente tangencial $m.\ lim.\ \frac{v^1-v}{\Delta t}$, y por componente normal $\frac{mv^2}{\rho}$. Esta última, dirigida por el lado opuesto al centro, se llama *fuerza centrífuga.*

110. Teorema. — Finalmente, puesto que comunmente se componen y descomponen las fuerzas como las velocidades y aceleraciones, resultará,

que si la velocidad v de un móvil, de masa m, tiene por componentes paralelas á tres ejes v_x, v_y, v^z, y si la aceleracion γ tiene por componentes γ_x, γ_y, γ_z, la fuerza $F=m\gamma$, que solicita al móvil, tendrá por componentes $m\gamma_x$, $m\gamma_y$, $m\gamma_z$. Así, *la proyeccion del punto material sobre un eje se mueve como si estuviera animado, á cada instante, de una velocidad igual á la proyeccion de la velocidad, y solicitado por una fuerza igual á la proyeccion de la fuerza sobre el mismo eje.* Tal es el teorema que deberá tenerse presente en todos los casos en que se quiera proceder á la composicion y descomposicion de las fuerzas, etc.
