135. Otro teorema. — Cuando las fuerzas paralelas se hacen equilibrio, la suma de sus trabajos es enteramente nula para el cambio de sitio del cuerpo ó cuerpos sometidos á su accion.

136. Trabajo de las fuerzas. — Las proyecciones de los elementos del camino recorrido sobre las direcciones de las fuerzas y los términos de la igualdad, es lo que se llama trabajo de estas fuerzas. Tal es la igualdad que encierra el teorema precedente del trabajo de las fuerzas, que no demostramos prácticamente porque rigurosamente hablando queda ya explicado en los ejemplos expuestos en el presente capítulo.

CAPITULO IV

De los centros de gravedad de los cuerpos.

137. Definicion del centro de gravedad. — Ya hemos dicho en otro capítulo que un cuerpo sólido se compone del conjunto de numerosas moléculas reunidas mas ó menos compactamente en posiciones determinadas. Todas estas moléculas son graves y tienden siempre hácia su centro; pero como sus dimensiones son imperceptibles relativamente al radío del globo, debemos considerar el peso de todas estas moléculas como fuerzas paralelas de un mismo sentido, que tienen por consecuencia una resultante igual á la suma de todas ellas, dirigida, como las componentes, hácia el centro de la tierra. Esta resultante es lo que llamamos peso del cuerpo.

138. Centro de gravedad de un sistema de cuerpos. — La nocion del centro de gravedad se extiende naturalmente á un sistema cualquiera de cuerpos ligados ó no los unos con los otros, y en-

tonces es el punto de aplicacion de la resultante de los pesos de todos estos cuerpos. Por lo tanto, la expresada nocion no supone necesariamente la solidez de los cuerpos : se aplica á un sistema cualquiera de puntos materiales, cuyas posiciones, volúmenes y densidades pueden variar, siempre que se les considere en un estado dado en un instante determinado.

Cuando se conocen los pesos y los centros de gravedad de los diversos cuerpos que componen un sistema, se determina el centro de gravedad general aplicando las fórmulas que facilitan el centro de las fuerzas paralelas.

139. Centro de gravedad de los cuerpos, de las superficies y de las líneas homogéneas. — Aquí hablamos solo de los cuerpos homogéneos, cuya materia se considera distribuida uniformemente. En este caso el peso del cuerpo es proporcional á su volúmen, y, sabido esto, pueden establecerse las fórmulas que dan el centro de gravedad, los pesos por los volúmenes. El problema se reduce así á una cuestion geométrica, y el centro de gravedad se llama *centro de gravedad del volúmen*.

Si se considera una superficie semejante á la de una hoja homogénea que tenga por espesor constante el diámetro de una molécula, esta hoja tiene un centro de gravedad, que se denomina *centro de gravedad de la superficie*. Deberá tenerse siempre presente para no padecer equivocacion, que el volúmen de dicha hoja es proporcional á su superficie.

Si se considera una línea cualquiera como un cilindro homogéneo sumamente delgado, compuesto solo de una hilera de moléculas, este cilindro pesado tiene su centro de gravedad llamado *centro de gravedad de la línea*. El volúmen del cilindro es proporcional á su longitud.

140. Casos en que la figura tiene un plano simétrico, un eje ó un centro de figura.—1.º Toda figura que pueda descomponerse en partes que tengan todos sus centros de gravedad sobre un mismo plano ó sobre una misma recta, tiene su centro de gravedad sobre dicho plano ó dicha recta. 2.º Toda figura que tenga un plan simétrico, tiene su centro de gravedad en este plano. Porque dos elementos simétricos cualesquiera que tengan pesos iguales y los centros de gravedad á igual distancia del plano, el centro de gravedad de su sistema está en el plano. Luego tambien se encuentra el centro de gravedad general (caso 1.º). 3.º Toda figura que tiene un eje simétrico tiene su centro de gravedad sobre este eje. Un eje simétrico ó de simetría es la interseccion de dos planos simétricos. 4.º Toda figura que tenga un centro de figura, tiene su centro de gravedad en este *punto*. Porque toda recta que pasa por dicho punto y se termina en la figura, siendo dividida por él en dos partes iguales la hilera de moléculas que contiene, tiene su cen-

tro de gravedad en este punto. Lo mismo sucede, pues, respecto del centro de gravedad general.

142. De lo expuesto en el párrafo precedente resulta que:

El centro de gravedad de una línea está en medio.

El del contorno ó área de un paralelógramo está en el punto de interseccion de las diagonales.

El del área de un polígono regular ó de un círculo está en el centro de la figura.

El del área ó del volúmen de un paralelipípedo está en el punto de encuentro de las diagonales.

El de la superficie ó volúmen de una esfera está en el centro.

El del área ó del volúmen de un cilindro recto ú oblícuo y de bases circulares está en medio de su eje.

141. Determinacion experimental del centro de gravedad. — Supongamos un cuerpo suspendido de una cuerda segun lo demuestra la figura 42, y veremos en seguida que toma cierto equilibrio. La fuerza que le impele para precipitarlo á la tierra es su peso específico, y el punto de aplicacion de esta fuerza, su centro de gravedad.

El cuerpo, si no cae es porque experimenta de parte de la cuerda una traccion dirigida de abajo arriba que hace equilibrio con la primera fuerza, y que por lo tanto debe serle igual, pero en direc-

cion opuesta. Así, suponiendo además que la direccion de la cuerda se prolonga por el interior del

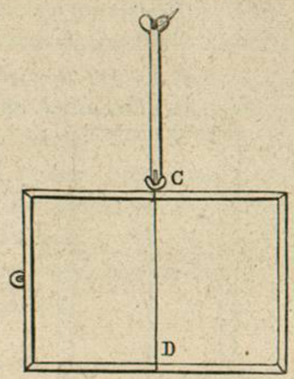

Fig. 42.

cuerpo siguiendo la línea *C D*, esta línea deberá pasar por su centro de gravedad.

Suspendiéndolo en seguida por otro punto, el cuerpo tomará nuevo equilibrio. En esta última posicion, y supuesto que la cuerda se prolonga por el interior del cuerpo siguiendo *A B* (figura 43), esta cuerda pasará por el centro de gravedad *C D*, y si se conservó el trazado de la primera línea *C D* que pasó ya por este punto, se verá que *C D* se encontrará con *A B* en el punto *E*.

Si el precedente medio de encontrar el centro de gravedad parece de difícil aplicacion porque supone tiradas dos líneas por el interior del cuerpo, aduciremos otro ejemplo que nos proporcionará las indicaciones necesarias para hallar el lugar que este punto ocupa en el interior del mismo cuerpo.

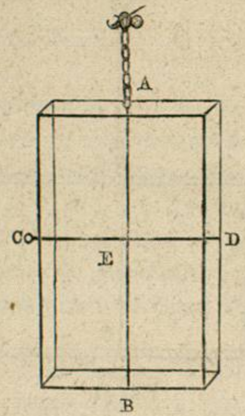

Fig. 43.

Tómese una barra de hierro ó de madera mas delgada de un extremo que del otro partiendo la disminucion insensible de su volúmen desde el principio del primer extremo hasta que el opuesto quede como la mitad del diámetro de aquel; pongámosla en seguida sobre un eje y no la dejemos hasta que haya quedado en equilibrio, y entonces hallaremos que el centro de gravedad de dicha barra está situado en el punto de la misma que se encuentra en contacto con el eje ó punto de apoyo.

143. Centro de gravedad de los volúmenes. — Divídase un prisma cualquiera, cuya base sea b y su altura h por la parte n, prismas iguales con planos equidistantes paralelos á las bases, y se hallará que los centros de gravedad están colocados de la misma manera en estos prismas; y por lo mismo se encuentran todos sobre la misma paralela á los extremos laterales y á igual distancia de la base inferior del prisma correspondiente. Siendo esta distancia x, las distancias de los diversos centros de gravedad á la base del plano inferior del prisma, tomados por plano de los momentos, serán respectivamente:

$$x^1,\ x' + \frac{h}{n},\ x' + \frac{2h}{n}\ \ldots,\ x' + \frac{(n-1h)}{n}.$$

Desde luego el volúmen de cada prisma parcial es $b\,\frac{h}{n}$: el del prisma entero ó total es bh. Luego si la distancia del centro de gravedad buscado en la base es x, la ecuacion de los momentos dará:

$$bhx = b\,\frac{h}{n}\left(x' + x^1 + \frac{h}{n} + x + \frac{2h}{n} + \ldots + x' + \frac{(n-1)\,h}{n}\right),$$

$$x = \frac{1}{n}\left(nx^1 + \frac{h}{n}\,[1 + 2 + \ldots + n-1]\right),$$

$$x = x' + \frac{n\,(n-1)\,h}{2n^2},$$

$$x = x' + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{h}{1}.$$

Si además se supone que n aumenta indefinidamente, x' disminuye indefinidamente, y $x = \frac{h}{2}$. Así, *el centro de gravedad de un prisma cualquiera está en medio de la recta que une los centros de gravedad de sus bases.*

144. Centro de gravedad de una pirámide. — Es fácil de descomponer una pirámide por medio de planos diagonales en tetráedros que tengan una vértice comun y á la misma altura. Si se la hace una seccion paralela á la base y á la distancia de la vértice igual á $\frac{3}{4}$ de la altura, este polígono encierra los centros de gravedad de todos los tetráedros y por consiguiente el de la pirámide. Además, los centros de gravedad de los diversos tetráedros son los diversos ángulos de la seccion, pues la recta que va desde la vértice de un tetráedro hasta el centro de gravedad de su base, pasa por todos los centros de gravedad de las secciones paralelas á dicha base. Por consiguiente, basta para obtener el de las pirámides con aplicar á los centros de gravedad de los triángulos de las secciones de las fuerzas proporcionales á los volúmenes de los tetráedros correspondientes, y de componer las expresadas fuerzas. Estos tetráedros teniendo la misma altura, son proporcionales á sus bases, y por consecuencia á los triángulos de la seccion. Luego, en definitiva, las fuerzas aplicadas deben ser proporcionales á las áreas de estos triángulos. Luego, el centro de gravedad buscado es el mismo del conjunto de dichos triángulos ó del polígono de seccion. Así pues, el centro de gravedad de una pirámide es el de la seccion conducida paralelamente á la base, á una distancia igual á $\frac{3}{4}$ de la altura principiando por la vértice; y por consiguiente está sobre la recta que va desde la vértice al centro de gravedad de la base.

145. Centros de gravedad de un cono y de un cilindro. — Cuanto acabamos de exponer en el precedente párrafo, es independiente del número de lados de la base de la pirámide. El resultado obtenido se aplica, pues, al caso en que este número se aumenta infinitamente ó en que las pirámides se cambian en cono. Luego el centro de gravedad del cono se encuentra sobre la recta que une su vértice al centro de gravedad de la base, y á una distancia igual á la cuarta parte de su longitud principiando á medir por la base.

Se evidenciará igualmente, que el resultado obtenido en el párrafo 143 se extiende tambien al cilindro, y que en su virtud el centro de gravedad de un cilindro está en medio de la recta que une los centros de gravedad de sus bases.

146. Trabajo de la gravedad sobre un cuerpo ó sobre un sistema de cuerpos. — Este trabajo es el mismo que la masa de dichos cuerpos haria si

se hallase concentrada en su centro de gravedad general.

Así, cuando se levanta un cuerpo cualquiera *P* con movimiento uniforme á una altura vertical *h*, se despliega una fuerza *F* constante igual y contraria al cuerpo *P*. Por consiguiente, el trabajo de esta fuerza es igual y contraria al de *P*, y como este último es $-Ph$, el trabajo de la fuerza *F* es $+Ph$. No depende, pues, mas que de la altura vertical recorrida por el cuerpo. Sin embargo, si el motor fuera un hombre ó un caballo, en este caso es necesario tener en cuenta la longitud del camino recorrido horizontalmente, lo cual ocasiona ó una fatiga ó una pérdida de tiempo que no están comprendidas en la precedente evaluacion del trabajo.

CUARTA PARTE

DE LAS MAQUINAS

CAPITULO PRIMERO

Nociones generales de las máquinas.

147. Las máquinas tienen por objeto el transmitir, bajo ciertas condiciones, la accion y el trabajo de las fuerzas que cada una tiene. Por lo general, el trabajo motor es mayor que el trabajo útil, de manera que muchas veces lo que se gana en fuerza se pierde en tiempo ó en camino, y esto aun en las de vapor y electricidad para las vias férreas, navegacion y telégrafos eléctricos, etc.

148. Definicion de las máquinas. — Cuando las fuerzas ejercen su accion unas sobre otras por medio de un cuerpo sólido enteramente libre, no pueden equilibrarse si no llenan las condiciones determinadas por la ciencia. Pero si el cuerpo se halla embarazado en su movimiento por algun