

fracaso de las uniformidades particulares queda explicado por medio de las causas contrariantes.

## CAPÍTULO XXII

### UNIFORMIDADES DE COEXISTENCIA NO DEPENDIENTES DE LA CAUSACIÓN

Diferentes especies de las uniformidades de ocurrencia de los fenómenos. — Coexistencia — sus especies.

Coexistencias independientes de la causación.

Valor de las diversas especies de leyes referentes á coexistencias.

1. — Las uniformidades de ocurrencia de los sucesos son de dos especies: la *uniformidad de sucesión*, comprendida en la ley de causación y en sus consecuencias, y la *uniformidad de coexistencia*. Los sucesos pueden coexistir porque sean efectos de una sola causa, como cuando coexiste para nosotros eclipse de sol y para la luna eclipse de la tierra, ó porque coexisten las causas que los producen.

2. — Pero debe haber una clase de coexistencias que no pueden depender de causación y son las coexistencias entre las últimas propiedades de las cosas, entre aquellas propiedades que son las causas de todos los fenómenos y que no están causadas por ningunos, entre aquellas que, para ser estudiadas, nos obligan á ascender al origen de las cosas: así, varias á lo menos de las uniformidades de coexistencia de los cuerpos simples no son referibles á la causación; varias de esas cualidades indefinidas en número que constituyen cada *especie* de cosas, no son tampoco referibles á la causación: la propiedad gaseosa de ciertos cuerpos puede explicarse por determinada temperatura; pero otras cualidades no se pueden adscribir á causas.

3. — Véase pues que las uniformidades de coexistencia dependen de causas ó bien no dependen de causas (cuando se trata de sustancias elementales y de fuerzas primarias): si dependen de causas, en el caso de que no se haya averiguado cuáles son esas causas, la ley de coexistencia es una ley empírica y sujeta por tanto á limitaciones de extensión; si no dependen de causas,

no se puede estar cierto de que la coexistencia dependa de que se trata de propiedades últimas de las cosas ó de que dependa de leyes de causación no descubiertas (esta incertidumbre existe, por ejemplo, respecto del hecho de que los cuervos sean negros), y por tanto no se puede dar á la uniformidad de causación la seguridad que tendría si se refiriera á cualidades últimas, ni la limitación de seguridad que habría de tocarle si se tratara de una ley empírica.

4. — Las uniformidades de coexistencia establecidas sin referencia alguna á la causación no pueden establecerse como las de causación, por un procedimiento inductivo que aproveche cualquiera de los métodos de experimentación ya indicados; no hay axioma que establezca una relación con las uniformidades de coexistencia, lo mismo que la establece la ley de causación en cuanto á las uniformidades de sucesión.

Bacon se imaginó que, así como podía aplicarse la eliminación para descubrir las causas, así podía aplicarse para descubrir las coexistencias, y afirmó que existe una ley universal de coexistencia de cualidades (que llamó la forma), así como hay una ley universal de causación; pero sus afirmaciones no han sido á este respecto comprobadas, y, en consecuencia, es preciso reconocer que nuestros conocimientos acerca de coexistencias independientes de causaciones, no dependen sino de la muy imperfecta inducción de los antiguos *per enumerationem simplicem ubi non reperitur instantia contradictoria*.

5. — Á veces sucede que un simple cambio en el modo de enunciar verbalmente una cuestión es un paso considerable hacia su solución: esto pasa en el caso presente: nosotros creemos en la certidumbre de una uniformidad de coexistencia, porque es altamente improbable que si hubiera una excepción no la hubiéramos observado, y dicha certidumbre y dicha improbabilidad no son más que dos modos de expresar una sola cosa. Si fuéramos á encontrar un cuervo blanco entre otros negros ó si éstos se volvieran blancos, esto

Cómo se establecen las uniformidades de coexistencia no derivadas de la causación.

Fundamento de la certidumbre de las leyes de coexistencia no basadas en la causación.

comprobaría que la negrura de los cuervos no constituye una uniformidad de coexistencia; si encontráramos aislados de los demás, cuervos blancos, éstos formarían una especie aparte, con su uniformidad especial de coexistencia, la de la blancura.

Leyes de coexistencia que dependen de causas.

6. — En el primer caso de los que acaban de indicarse la circunstancia que varía se presenta como un fenómeno que no puede considerarse como último, y que, por tanto, depende de causas, de modo que, lo que á su respecto pueda establecerse, tiene el carácter de ley empírica.

Coexistencias empíricas que no dependen de la causalidad.

7. — En el caso de que la coexistencia de una cualidad se presente como cualidad última, el hecho de que pueda variar para cosas, en todo lo demás idénticas, indica que tal coexistencia no puede aceptarse también, sino como ley empírica, sólo cierta en los límites de tiempo, lugar y circunstancia en los que las observaciones se han hecho, ó en casos estrictamente adyacentes.

Las leyes de coexistencia más extendibles son las más generales.

8. — Así como las leyes empíricas son más ciertas y más extendibles mientras más generales son de suerte que llegan á confundirse, en certidumbre, con las inducciones rigurosas, porque el hecho de que se sostengan como ciertas de un modo generalísimo implica que ni ha habido ni hay causas que produzcan un cambio sensible en los efectos observados, así pasa con las coexistencias; las más generales son las más universalmente creíbles, pues es altamente improbable que no hubiéramos observado los casos contradictorios; y por tanto, mientras que nos parece posible que haya una especie de cuervos sólo diversos de los conocidos por su color, nos parece muy difícil que haya cuervos que no tengan las cualidades generales de los animales.

Condiciones indispensables para que una propiedad se considere como propiedad última de

9. — Cuando se trata de una propiedad última de una especie, para que se señale como tal propiedad última de toda la especie, es preciso que se haya observado en cada uno de los sub-grupos de dicha especie: aunque es probable que si existe en los subgrupos extremos también estará en los intermedios, no es

seguro: á este respecto casi puede llamarse excepcional en la naturaleza la uniformidad, y, en todo caso, cualquiera uniformidad de coexistencia debe considerarse nada más como una ley empírica, más ó menos general, y por lo mismo más ó menos respetable.

toda una especie.

## CAPÍTULO XXIII

### DE LAS GENERALIZACIONES APROXIMADAS Y DE LA EVIDENCIA PROBABLE

1. — Todas las investigaciones precedentes conducen á proposiciones generales, ya ciertas, ya probables; pero hay también otras proposiciones probables que son simplemente proposiciones generales de este tipo: *la mayor parte de las As son Bs*, y mientras mayor sea el número de As que sean Bs más probable será que una A dada sea B.

Proposiciones que expresan generalizaciones aproximadas.

2. — Estas proposiciones son útiles en la ciencia nada más para encaminar á proposiciones generales; pero casi no se pueden utilizar deductivamente: cierto es que si sabemos que la mayor parte de las As son Bs y que toda A es C, podemos afirmar que la mayor parte de las As son Cs; pero si decimos que la mayor parte de las Bs son Ds y que toda A es B, no podemos concluir nada porque puede suceder que sólo sean As las Bs que no sean Ds. Sin embargo, en la práctica muchas veces sólo podemos proceder guiándonos por estas generalizaciones aproximadas y de aquí su importancia.

Deducciones hechas teniendo por fundamento proposiciones que expresan generalizaciones aproximadas.

3. — Cuando no hay otras generalizaciones tenemos que servirnos de las aproximadas; y éstas á menudo son de tal naturaleza, que podríamos, si quisiéramos, transformarlas en otras más exactas; así, por ejemplo, en vez de decir que la mayor parte de las veces la madera es más ligera que el agua, podemos decir cuáles maderas son y cuáles no son más ligeras que el agua, y si alguna se nos presenta no conocida, podemos observarla y experimentar con ella para saber cómo

Casos en los que puede darse mayor exactitud á las generalizaciones aproximadas.

es : en otras veces sabemos qué circunstancias son las que deben mediar para que A sea B; pero no las especificamos, y tenemos por lo mismo necesidad de indicar proposiciones de generalidad aproximada : esto sucede en la práctica con las afirmaciones relativas á la conducta : sabemos que un hombre de determinada edad, de cierta condición, etc., debe tener cierta conducta; pero nos es imposible señalar, en un caso especial, todas las circunstancias del caso, y esto imposible de hacer proposiciones que sean generales.

Pruebas suficientes de las generalizaciones aproximadas.

4. — ¿Cuál es una prueba suficiente de una generalización aproximada? Es una prueba suficiente para fundar una ley empírica; pero pueden presentarse dos casos : primero, que sepamos, y 2º que no sepamos de qué depende la causa de la generalización aproximada; en éste segundo caso, puede adquirirse la prueba de la aserción no sólo de un modo directo, por la observación, sino de un modo indirecto, por la deducción de los efectos, conocida que sea la presencia de los antecedentes de esos efectos; por ejemplo, se puede averiguar si la mayor parte de los individuos de un país saben leer, siempre que se sepa que la mayor parte de ellos van á escuelas donde efectivamente se enseñe á leer.

Generalizaciones aproximadas cuando pueden conocerse las causas de que dependen.

Cuando podamos conocer las causas de las que depende una generalización aproximada, es conveniente analizarlas con cuidado, pues de ese modo sustituiremos al grado de certeza de dicha generalización otro, mucho más considerable : así, sabemos que la mayoría de los hombres atestiguan de un modo cierto; pero si tratamos de saber si determinada persona atestiguará con verdad, no debemos contentarnos con la más vaga aproximación general, sino que averiguaremos si tiene interés en el asunto, si su carácter lo lleva á decir falsedades, etc.

Precauciones que deben tenerse al argüir sirviéndose de gene-

Veamos ahora qué precauciones deben observarse cuando se arguya de estas incompletas proposiciones universales á casos particulares.

5. — Si se ha encontrado exacta ó casi exacta la pro-

porción de frecuencia de la generalización aproximada, por ejemplo, que de cada 10 veces A sea B nueve veces, en la misma proporción quedará la probabilidad de que A sea B en un caso no observado; pero esto siempre que no varien las condiciones de tiempo, espacio y circunstancias que se tuvieron en cuenta para fundar la generalización, y además siempre que el nuevo caso que se presenta, se presente sin indicaciones de que pertenece á un grupo especial, que puede estar en condiciones determinadas, de suerte que haya que considerarlo como un caso de término medio : así las tablas de mortalidad son útiles en las compañías de seguros, donde se considera á cada individuo como perteneciendo á un término medio; pero no son útiles para fijar la vida de un individuo determinado : en éste habrá que considerar todas las circunstancias especiales.

ralizaciones aproximadas.

6. — Procedamos ahora no ya á la aplicación de una sola sino de varias generalizaciones aproximadas, á casos particulares : puede pasar que éstas se adicionen para dar mayor solidez á la inferencia : por ejemplo : la mayor parte de las As son Bs; la mayor parte de las Cs son Bs. D es á la par A y C, luego es probablemente B : esto pasa cuando dos testigos que no se conocen afirman una sola cosa, ó cuando se dice de alguien que cometió un delito porque se escondió, y estaba ensangrentado, entonces la *cadena de generalizaciones* aproximadas es, según la frase de Bentham, por sí misma *corroborativa de evidencia*; pero puede pasar que dichas generalizaciones formen una *cadena* por sí misma *infirmativa de evidencia*; que no se adicionen, sino que una deduzca la fuerza de la otra : por ejemplo : la mayor parte de las Cs son As, la mayor parte de las As son Bs; pero D es C, luego es probablemente A; luego es probablemente B; como acontece si un testigo, que sólo ha oído hablar del hecho que asevera, afirma un delito, su testimonio tiene menor fuerza; ó si se declara que X cometió un delito porque quemó sus trajes, y se piensa que los quemó porque probablemente estaban ensangrentados.

Aplicación de varias generalizaciones aproximadas á casos particulares.

Cadena de generalizaciones corroborativa de evidencia é *id.* infirmativa de evidencia.

Si dos de cada tres As son Bs y tres de cada cuatro Cs son Bs, de cada doce cosas que sean As todas menos 4 serán Bs; y si esas doce son además de As Cs solo tres de ellas serán Bs pero esas tres, más las ocho que son Bs porque son As, son 11; de modo que de las 12, once serán Bs; en la teoría de las probabilidades, lo mismo se expresaría así: la probabilidad de que A no sea B es  $1/3$ , la de que C no sea B es un  $1/4$ ; en consecuencia la de que algo que es á la par A y C no sea B es un  $1/3$  de  $1/4$  ó lo que es igual  $1/12$ .

Este argumento y este cálculo suponen que las probabilidades de que A sea B y C sea B son independientes entre sí, pues si se incluyeran, ninguna de ellas agregaría á la otra la más leve probabilidad.

Cuando las generalizaciones aproximadas se unan por deducción, el grado de probabilidad disminuye á cada paso: si la mayor parte de las As son Bs y la mayor parte de las Bs son Cs podría suceder que las Bs que son Cs sean precisamente las que no son As; pero, si podemos estar ciertos de que las Bs que son Cs se refieren al término medio de las As, queda una probabilidad de que una A dada sea C; pues, aunque podría suceder que esa A se refiriera á lo que no es ni B ni C, la proposición contraria es igualmente legítima, y por eso hay que decir que la probabilidad final quedará medida por la que nace de una aproximación, abatiendo esa probabilidad en la proporción de la que nace de la otra. Si nueve de cada 10 suecos tienen claro el cabello y ocho de cada 10 habitantes de Stokolmo son suecos, puede suponerse que 8 habitantes de Stokolmo probablemente entre cada 10 serán de cabellos claros, aunque también podría suponerse que todos los suecos de Stokolmo sean de los que no tienen cabellos claros; pero, propiamente, el error en la conclusión, representa el agregado de errores de las premisas: Si de cada 10 As 9 son Bs y de cada 9 Bs 8 son Cs y de cada 8 Cs 7 son Ds, la probabilidad de que una A sea D será un  $7/8$  de  $8/9$  de  $9/10$  de modo que aunque las premisas sean, casi de un modo perfecto,

verdades universales, la conclusión, después de unos cuantos eslabonamientos de generalizaciones aproximadas, es indigna de crédito.

7. — Hay sin embargo dos casos en los que, razonamientos que dependen de generalizaciones aproximadas pueden llevarse tan lejos como plazca, como si fueran compuestos de leyes universales de la naturaleza, á causa de que puedan transformarse tales generalizaciones aproximadas en equivalentes generalizaciones completas.

1º Si las generalizaciones aproximadas son tales que sepamos reconocer los casos que concuerdan y los que no concuerdan con la generalización, entonces podemos establecer aserciones universales que sólo comprendan los casos que concuerdan, y la conclusión estará sometida á tantos requisitos como sean los que limitan dichas aserciones universales unidas: así, esta generalización aproximada: la mayor parte de los que tienen poder irresponsable gobiernan mal, puede transformarse en esta generalización completa: gobiernan mal todos los que tienen poder irresponsable y que carecen de excepcional juicio y de excepcional voluntad, así como de confirmados hábitos de virtud; y de esta aserción podemos sacar consecuencias con seguridad completa: si agregamos otra aserción de la misma especie: la mayor parte de los monarcas absolutos tienen poder irresponsable; y transformamos esa generalización en la siguiente: todos los monarcas absolutos tienen poder irresponsable, á menos de que necesiten la ayuda activa de sus súbditos, sentaremos que la conclusión que se obtenga en cuanto á los monarcas, ligando las dos generalizaciones aproximadas, estará sometida á una doble restricción: Todos los monarcas absolutos emplean mal su poder, á menos de que su posición los obligue á recurrir á la activa ayuda de sus súbditos, ó á menos de que sean personas de excepcional fuerza de voluntad y de excepcional juicio, así como de confirmados hábitos de virtud. Se comprende fácilmente que la cadena de proposiciones,

Casos en los que razonamientos que dependen de generalizaciones aproximadas pueden tener el mayor valor.

progresivamente limitada, puede prolongarse cuanto se quiera.

2º En segundo lugar, las generalizaciones aproximadas pueden tomarse también como generalizaciones completas, cuando los investigadores se refieren á propiedades, no de individuos, sino de multitudes, porque entonces el efecto que se afirma se encuentra ratificado por la gran mayoría de las multitudes: el estadista no tiene en cuenta la fortuna de determinada persona, sino la de la masa; sólo le importa saber lo que hacen, ó lo que se hace á la mayor parte de las personas, y aun cuando se refiera á una especie de personas, como á los reyes, si lo hace sin limitación de tiempo, sus afirmaciones serán ciertas, porque se referirán á una multitud.

## CAPÍTULO XXIV

### LEYES RESTANTES DE LA NATURALEZA

Qué especies de pruebas requieren las diversas clases de proposiciones.

1. — Hemos investigado qué especie de pruebas son aquellas sobre las que reposan las proposiciones que expresan orden en tiempo, en cualquiera de sus dos modos: coexistencia y sucesión: queda por estudiar lo mismo en cuanto á las otras tres clases de proposiciones, las de existencia, las de orden en lugar, y las de semejanza (las de causación quedan incluidas en las de orden en tiempo).

Á qué especie de existencia se refieren la lógica y la metafísica.

La existencia de las cosas en sí mismas, es asunto de la metafísica; la lógica sólo tiene que estudiar la existencia de los fenómenos como capaces de determinar estados de conciencia, ó como siendo ellos mismos estados de conciencia. Cuando hablamos de cosas que no pueden ser percibidas, su existencia sólo es para nosotros la convicción de que las percibiríamos si estuviéramos colocados en ciertas condiciones de tiempo ó de lugar, ó si tuviéramos determinada per-

fección de órganos: creemos que Pekín exista, que Julio César existió, y que estrellas invisibles existen: tales afirmaciones implican que creemos que, en condiciones adecuadas, percibiríamos todo eso. Lo que implican las creencias.

Cuando el fenómeno está en el cuadro de la presente observación, ésta nos asegura su existencia; cuando no está en ese cuadro, la prueba de dicha existencia queda producida por otros fenómenos que, por inducción, sabemos que están conectados, ya por vía de coexistencia ó por vía de sucesión, con el fenómeno dado. Cómo se demuestra la existencia.

Las proposiciones generales de existencia que establecen el hecho desnudo de que algo existe, son generalizaciones suficientemente probadas por un solo caso; cualquiera cosa que ha existido una vez, es capaz de existir otra, la única cuestión estriba en saber en qué condiciones existe. Así, la existencia directamente perceptible, directamente se conoce; la no directamente perceptible, se refiere á las leyes de la inducción.

2. — La semejanza y la desemejanza de los objetos sólo excepcionalmente pueden ser percibidas de un modo directo; por lo común se necesita apelar á un razonamiento y á un término medio: entonces la semejanza toma el nombre de igualdad, y el razonamiento tiene en cuenta aserciones de este género: cosas iguales á una tercera son iguales entre sí. Cómo se demuestran la semejanza y la desemejanza.

Cuando la investigación, como en las matemáticas, consiste sólo en buscar la concordancia ó discordancia (semejanza ó diferencia, igualdad ó desigualdad) de dos cosas, si ésta no se percibe directamente, hay que buscarla con un término de comparación, y la comparación puede hacerse teniendo en cuenta sólo las ideas de las cosas matemáticas porque dichas ideas representan bien las cosas referidas; pero esto no pasa, á pesar de lo que han dicho los escritores de la escuela de Condillac, con toda especie de razonamientos: éstos, en general, tienen en cuenta no semejanzas ó diferencias de ideas, sino sucesiones ó coexistencias

de fenómenos, tales, por ejemplo, como son los cuerpos que caen.

Cuando la semejanza no puede observarse de un modo directo y se apela al razonamiento, éste requiere como siempre generalizaciones aplicables al asunto, leyes de la naturaleza, uniformidades observables en cuanto á dicha semejanza ó en cuanto á la desemejanza.

Pruebas de uniformidades que se refieren y uniformidades que no se refieren á la causación.

3. — De esas uniformidades, las que se refieren á causas especiales son explicadas y demostradas por la presentación de dichas causas: por ejemplo, que el ángulo de incidencia y el de reflexión de un rayo luminoso sean iguales (exactamente semejantes en magnitud); pero las uniformidades de que hablan las matemáticas: axiomas referentes á la igualdad, á la desigualdad y á la proporcionalidad, y los teoremas derivados, no tienen conexión con las leyes de causación: que los cuadrados de los tiempos periódicos de los planetas, sean proporcionales á los cubos de sus distancias respecto del sol, es una uniformidad derivada de las leyes de las fuerzas centrípeta y tangencial; pero que los ángulos opuestos formados por dos rectas que se cortan son iguales, no depende de ninguna causa, y esto es lo que da un carácter especial á las verdades matemáticas.

De qué depende y cómo se demuestra el orden en lugar, de los efectos.

4. — El orden en lugar de los efectos depende de sus causas, el orden en lugar ó colocación de las causas últimas es para cada caso un hecho también último, respecto del que no es trazable ley alguna; pero hay un orden en lugar: el de puntos, líneas ó espacios, que sin tener que ver con la naturaleza de ellos ni con sus causas proporciona en geometría, inferencias.

Cuál es la especie de argumentación que implican en las matemáticas las verdades fundamentales.

Ya hemos visto en el libro II que, en Matemáticas, los axiomas y las definiciones que implican existencia de lo definido son de carácter inductivo, y por tanto resultado de la observación y de la experimentación; es verdad que tal carácter inductivo es el de una inducción *per enumerationem simplicem*; pero dicha enu-

meración es indefinida, y proporciona una seguridad aun mayor, si esto es posible, que la que proporciona la ley de causación.

5. — Parece requerir explicación por qué y cómo de tan corto número de verdades fundamentales en Matemáticas, puede surgir tal multitud de verdades derivadas: en la ciencia del número no se necesitan más, como fundamentales, que las definiciones de los diversos números, y estos dos axiomas: que dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, y que cantidades iguales agregadas á cantidades iguales producen sumas también iguales. Las definiciones de los números constan de dos cosas: la explicación de un nombre y la aserción de un hecho físico perceptible por los sentidos, ya directamente, ya cuando éstos están colocados en circunstancias especiales: ese hecho físico es una propiedad cuyo rasgo característico consiste en el modo de formar aglomeraciones y separarlas en partes: así el hecho físico necesario para distinguir tres consiste en que se unan una y una y una cosas ó una con una aglomeración de dos ó bien en que se quiten de una aglomeración de cuatro una cosa ó de otra de cinco una y una ó bien una aglomeración de dos, etc.; de suerte que cada proposición aritmética, cada afirmación del resultado de una operación igualmente de aritmética es una afirmación de uno de los modos de formación de un número dado, ya por poner juntas ciertas cosas ó agregados de cosas ó por quitar algo.

Los modos de formación de los números son innumerables; pero si elegimos un modo de formación determinado, todo lo demás puede averiguarse deductivamente; y así, en el modo decimal, el procedimiento consiste en agregar unidades hasta formar un grupo de diez que constituyen un rango superior; luego en agregar grupos igualmente de diez hasta formar otro también de diez de esas decenas, y así sucesivamente.

Lo que hace que la Aritmética sea una ciencia deductiva es la indefinida aplicación que en ella tiene la ley

Cómo en las matemáticas todas las verdades derivadas nacen de unas cuantas fundamentales. — Formación de la Aritmética.

de que : las sumas de cantidades iguales son iguales ó lo que es lo mismo : que lo que se hace con las partes puede hacerse con las partes de esas partes : esta verdad inductiva, combinada con las definiciones, también inductivas, de los números, es lo que da la certeza de las operaciones aritméticas :

Razonamiento algebraico.

6. — Las proposiciones de la Aritmética son ciertas en cuanto á cada número particular respecto del cual se establecen ; las del Álgebra son ciertas de todos los números : éstas tienen en cuenta los diversos modos de formación de los números en general y cada modo de formación se llama una función : dichos modos de formación se reducen á éstos : un número puede formarse por suma ( $X + a$ ), por resta ( $X - a$ ), por multiplicación ( $X$  por  $a$  ó  $a \times X$ ), por división ( $\frac{a}{X}$ ), por elevación á una potencia ( $X^n$ ), por extracción de raíz ( $\sqrt[n]{X}$ ), por logaritmo (logaritmo de  $X$ ) y por funciones trigonométricas (seno de  $X$ , etc.) y la indicación de esos diversos modos de formación es lo que se consigue con el lenguaje algebraico ó lo que es lo mismo con la notación algebraica.

En todo problema, numérico ó algebraico, lo que se establece, en definitiva, como solución, es la identidad del resultado de diferentes modos de formación, ó lo que es lo mismo de diferentes funciones. El problema general del cálculo algebraico es éste : dada una función, ¿ que función es ella de alguna otra ? y el problema que aparece en la resolución de una ecuación es el siguiente : « encontrar qué función de una de las suyas propias es el número de que se trata ».

En cuanto al procedimiento aritmético y algebraico sabido es que es por completo deductivo : las premisas introducidas, además de las hipótesis que se aceptan, son los axiomas fundamentales ya especificados<sup>1</sup>.

1. Pueden consultarse sobre este asunto la obra de Comte sobre *Filosofía Positiva*; el *Algebra*, de Peacock; y la *Doctrine of Limits*, de Whewell.

7. — La Geometría es una ciencia en la que, la posibilidad de imaginar las diversas formas de la extensión, y el carácter fácilmente demostrativo de sus afirmaciones, hizo pensar que se encontraba en condiciones privilegiadas respecto de la certeza que produjera ; pero ahora ya sabemos que la realidad objetiva de sus figuras es simple hipótesis.

Razonamiento en la Geometría.

Todo teorema de Geometría puede establecerse en virtud de una generalización inductiva ; pero puede también encontrarse deductivamente tomando como premisas definiciones, los axiomas fundamentales del cálculo y la afirmación (obtenida inductivamente) de que líneas, superficies ó espacios sólidos que pueden aplicarse el uno sobre el otro, de modo que coincidan, son iguales : esta última afirmación no hace más que sugerirnos el medio de colocar las cosas, para que veamos si tienen la exacta similaridad en magnitud que llamamos igualdad geométrica.

Las definiciones geométricas postulan la existencia de lo definido (por ejemplo los círculos) y una propiedad (no se necesita más) de lo mismo definido (por ejemplo, que todos los radios de los referidos círculos son iguales).

8. — ¿ Por qué de tan pocos datos como son los fundamentales en Geometría se derivan tantas verdades ? Porque la Geometría reduce todas sus cuestiones, á cuestiones de cantidad<sup>1</sup> ; y las pruebas de las igualdades que se refieren á las magnitudes prueban á la par todas las otras igualdades referidas á las primeras. Hay en particular algunas leyes excepcionalmente adaptadas, para hacer que una posición ó una magnitud sean marcas de otras, y por tanto puedan volver más deductiva la Geometría : primera : las magnitudes de los espacios cerrados están medidas por las de las

Por qué de un número muy pequeño de datos se derivan tantas verdades en Geometría.

1. La posición y la figura de cualquier objeto, se determinan fijando la posición de un número suficiente de puntos de ese objeto ; y la posición de un punto se determina fijando la magnitud de tres coordenadas rectangulares, esto es, de perpendiculares trazadas desde ese punto á tres ejes dispuestos entre sí de modo que formen ángulos rectos arbitrariamente elegidos.

líneas y ángulos que los limitan; 2ª la longitud de una línea, está medida por el ángulo que ella subtienda y viceversa; y 3ª el ángulo que en un punto inaccesible hacen dos líneas rectas, está medido por los ángulos que ellas diversamente hacen con cualquiera otra línea; por medio de estos tres principios se pueden medir, de un modo indirecto, innumerables magnitudes; y sabido es la utilidad que esto proporciona, como lo patentiza la Trigonometría, en el levantamiento de planos.

Importancia de las Matemáticas. — Su aplicación en las ciencias. — Su interés como disciplina educativa.

9. — La inmensa parte que toman las leyes matemáticas para dar á las ciencias un carácter deductivo, no sorprenderá si se considera que, en toda cuestión de causación es preciso introducir á cada paso consideraciones de extensión y de cantidad: aun en los fenómenos comunes se nota el efecto de la cantidad: de ella depende el color final que adquieren varios colores mezclados.

Sin embargo, las Matemáticas no pueden aplicarse cuando las causas son tan imperfectamente observables que nos es imposible fijar sus leyes numéricas, cuando son tan numerosas y están tan mezcladas que el cálculo no llega á poder computar el efecto del agregado, ó cuando son excesivamente fluctuantes, como en Fisiología ó en Sociología. Aun en la Astronomía, si tenemos que considerar más de dos ó tres influencias esenciales, llega á ser imposible á nuestra débil inteligencia aplicar debidamente las Matemáticas; y en la Física, es preciso tratar, de un modo un poco abstracto, y por lo mismo un poco irreal, los problemas, si se quiere que se aplique á ellos el cálculo con éxito; de suerte que es quimérico aplicar, de manera suficientemente efectiva, las Matemáticas á la Química, en la que se estudian innumerables partes minúsculas de cuerpos, y con mayor razón es quimérico aplicar las Matemáticas á la sociología y á las ciencias sociales.

« El valor de la instrucción matemática, como preparación para más difíciles investigaciones, consiste en la aplicabilidad, no de sus doctrinas, sino de su mé-

todo. » Las Matemáticas serán siempre el tipo más perfecto de método deductivo, y sus aplicaciones á las menos complicadas ramas de la Física, suministran la única escuela en la que se puede aprender el empleo de las leyes de los más sencillos fenómenos, para explicar y predecir las de los más complexos, de suerte que « las Matemáticas son la base indispensable de una real educación científica. »

## CAPÍTULO XXV

## FUNDAMENTOS DE LA INCREDELIDAD

1. — « El resultado del examen de las pruebas no es siempre la creencia, ni aun la suspensión del juicio, es, á veces, la desconfianza; así que es necesario estudiar los fundamentos de la incredulidad. »

Por *incredulidad* entendemos aquí no el estado de espíritu en el cual nos encontramos ignorantes, sino aquel en el que estamos persuadidos de que alguna opinión no es cierta, por más que aparezcan pruebas á su favor.

2. — Sin embargo, tales pruebas aducidas para demostrar lo imposible, lo improbable nunca son pruebas plenas: están fundadas siempre sobre generalizaciones aproximadas. Si las generalizaciones aproximadas que fundan la afirmación de un hecho son menos fuertes que las que fundan su negación, la afirmación es improbable y á su respecto debe haber, provisionalmente, incredulidad; pero si la afirmación está sostenida por generalizaciones aproximadas y la negación por generalizaciones completas, el hecho es imposible y la afirmación del mismo merece incredulidad completa: esto último es lo que funda el dicho de Hume: que nada es creíble si es contrario (como lo son los milagros) á la experiencia, si varía respecto de las leyes de la naturaleza.

La incredulidad.

En qué descansa la incredulidad. — Diversas especies de ella.