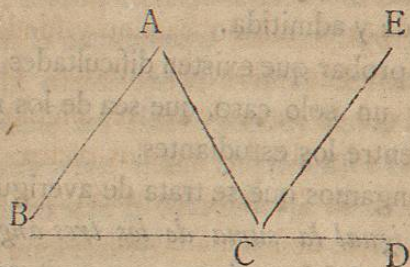


mula y como la suma á que es igual está formada por dos ángulos rectos, resulta: "Que la suma de los tres ángulos de un triángulo, es igual á dos ángulos rectos."

Analizaremos el caso:



En el triángulo $A B C$ prolonguemos *rectamente* el lado $B C$ y por el punto C tiremos una *paralela* al lado $B A$. Quedan pues formados en el punto C tomado sobre la recta $B D$ tres ángulos $B C A$, $A C E$, $E C D$, cuya suma es igual á dos rectos, porque están contruidos en todo un lado de una línea recta, partiendo de un solo punto. Hecho esto, solo falta demostrar que la suma de los ángulos del triángulo es igual á la suma de los ángulos cuyo vértice está en C , para que quede resuelto y probado el problema propuesto.

El ángulo $B C A$ es comun al triángulo y al sistema de ángulos en C .

El ángulo $A B C$ es igual al $E C D$ por *cor-*

respondientes, lo que puede probarse valiéndose de la superposicion y apoyándose en la primera formula: "Cosas que coinciden son iguales."

El ángulo $B A C$ es igual al $A C E$ porque son *alternos internos*, cuya igualdad puede probarse por el mismo camino y fundándose en la misma generalizacion anterior. De donde se infiere que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.

Como se vé, ha sido necesaria cierta sagacidad de parte de los matemáticos para descubrir un artificio que hiciera posible y aún fácil la prueba de que el caso presente está contenido en una verdad general, ya demostrada y admitida. Y este ejemplo servirá tambien para hacer entrever, el inmenso campo que está abierto á los investigadores matemáticos, que solo con los axiomas (tanto el verdaderamente fundamental—*cosas iguales á una misma cosa son iguales entre sí*—como tambien las demas inducciones generales, que á pesar de ser reductibles, llevan el nombre de axiomas) y los postulados de las definiciones construyen la magestuosa ciencia matemática. Y aunque es cierto que en este admirable mecanismo deductivo, los axiomas desempeñan el papel de mayores y las definiciones de menores, por sen-

cillos que sean aquellos y exactas éstas, se ha menester no obstante, hábito y sagacidad intelectual, para que dada una mayor se encuentre una menor enteramente adaptada y viceversa, lo cual por sencillo que parezca es en realidad muy difícil; se necesita un esfuerzo mental grande para relacionar varios silogismos, para establecer una verdadera cadena de razonamientos. Y por este motivo la Matemática es una ciencia deductiva.

Afortunadamente para nosotros, los lectores de este libro que traten de obtener de él algun provecho, ya estarán convenientemente preparados con el cultivo prévio de todas las partes de la Matemática. Habrán visto verdaderas deducciones ya en las investigaciones numéricas, en las relaciones de los símbolos (Cálculo), ya en los diversos problemas de la extension (Geométrica) ó ya en las importantísimas cuestiones del movimiento (Mecánico).—Y en lo estudiado hasta aquí observarán la sistematización de principios abstractos emanados de la ciencia correspondiente, principios que son la verdadera luz que nos hace descubrir lo que es realmente la Matemática, y norma nuestra conducta intelectual en este sentido, es decir, forman para nosotros un verdadero patrimonio mental, nos suministran una parte del *método*

§ 61. Como se acaba de ver existen las ciencias deductivas; y el ejemplo (la Matemática) por cuyo medio lo hemos hecho patente indica también la razón de su existencia y su grande utilidad. En efecto, en la Matemática, la Astronomía, la Acústica y demás ciencias deductivas, muchas veces se sustituye à un procedimiento de pura observacion una operación de cálculo, es decir, una deducción; lo cual si no es siempre una ventaja, si es en todas circunstancias una economía. Una gran parte de las investigaciones científicas está constituida por trabajos deductivos, por esfuerzos hechos en vista de descubrir el lazo que une un caso particular à una inducción ya establecida.

Todo lo cual constituye una superioridad real de las ciencias deductivas, respecto de las que no lo son; y por eso los esfuerzos continuos deben encaminarse à convertir éstas en aquellas.

Las ciencias que no son deductivas, llevan, en virtud de su carácter, el nombre de Experimentales. Y todas las ciencias naturales han sido primitivamente experimentales.

Basa arrojar una mirada retrospectiva al principio de su organización, para convencerse de la realidad de su carácter y razón pa

ello. —La observacion y la experiencia, en determinado sentido, han servido para establecer inducciones aisladas y mientras éstas permanezcan sin un vínculo que establezca su dependencia, la ciencia á que pertenecen es puramente experimental; y solo el progreso de la induccion y el descubrimiento de eslabones entre ellas, para poder ir de unos fenómenos á otros por medio de la deduccion, es el verdadero adelanto de la ciencia.

Así pues, la Induccion y la Deduccion marchan juntas significando el progreso de las ciencias, como lo prueban los ejemplos citados, en tanto que otras ciencias, como la Química, es un signo de atrazo, el que solo puedan llamarse Experimentales.

Demostracion y Axiomas.

§ 62. Dada una proposicion, el mejor elogio que puede hacerse de élla, bajo el punto de vista de la prueba, es decir, que es demostrable, ó lo que es lo mismo, formular su *demostracion*. En cuyo caso todas las personas están de acuerdo en considerar á la proposicion como de una certeza indiscutible, como de la mayor fuerza probante. Y si se examina, no la propo-

sicion probada, sino este medio de prueba denominado *demostracion*, fácilmente se convencerá uno, que dicho procedimiento es solo la *deduccion*. Así es que dá lo mismo decir que una proposicion está demostrada, ó expresar que es deducida.

Demostrar que los ángulos en la base de un triángulo isósceles, son iguales, es precisamente *deducir* dicha asercion de los axiomas geométricos.

Las ciencias, como la Matemática, que están organizadas en mucha parte de este modo son denominadas Ciencias exactas; y se cree generalmente que la certidumbre adquirida por este medio, es la mayor que la razon puede alcanzar, y muy comunmente se llama evidencia demostrativa.

Pues bien, consistiendo la demostracion en suma, en la deduccion, claro es que en el último análisis su verdad depende de la Induccion (que es á lo que se reduce toda deduccion). Lo cual quedará enteramente corroborado si llegamos á probar que los axiomas, base de la deduccion, son inductivos.

En este sentido ya es fácil darse cuenta del valor que tiene la palabra necesidad en la Geometría.

Quando se dice que las conclusiones de la

Geometría son verdades *necesarias*, debe entenderse que la proposición á que se llega se deduce rectamente de las proposiciones que le sirven de premisas, y que su entera ó próxima exactitud depende de la completa ó parcial verdad de los supuestos de que se deriva.—(1)

Ahora bien, fácil es comprender que el hecho postulado en las definiciones de la Geometría no es exactamente como lo suponemos en la definición; bien sabido es que en la práctica jamás se encuentra un círculo con *todos sus radios perfectamente iguales* (como lo quiere la definición); y al derivar proposición de una precisión muy grande, se dice que son *necesarias* únicamente en el sentido, de que se deducen lógicamente de las proposiciones primitivas; pero bien entendido, que se acercarán á la verdad tanto como los principios de que se derivan.

En consecuencia, las definiciones de la Geometría postulan un hecho objetivo, pero la forma en que lo presentan se diferencia un poco de lo real y se acerca mucho á la perfección.

(1) Otro sentido de la palabra *necesidad*, se advierte siempre que se usa en el sentido de "producción segura." Así se dice comunmente: "En México, el agua á los 92,3 de temperatura, hervirá *necesariamente*." "Lo que equivale á decir que con seguridad se verificará el fenómeno. (En este caso no hay intuición, la experiencia es la que dá seguridad completa á nuestra afirmación.)

Esta importantísima propiedad de la ciencia que constituye solo un artificio lógico, útil y trascendental, ha sido falsamente apreciado de dos modos diversos. Unos creen que las Definiciones corresponden exactamente á hechos reales del mundo exterior y por lo mismo las conclusiones son tan necesarias como exactas.

Para desvanecer esta gratuita é infundada suposición, basta recurrir á la experiencia personal y observar que en el mundo exterior no existe una sola línea, como la definición la indica, pues todas además de longitud tienen latitud y espesor.

Lo mismo que se dice de la línea, puede probarse de las demás figuras; y por lo tanto, esta explicación es inadmisibile, porque es notoriamente errónea.

Los otros, convencidos plenamente de que el mundo exterior no presenta las figuras geométricas, tal como las indican las Definiciones han dicho que los puntos, las líneas, etc. indicadas en dichas Definiciones, no tienen existencia objetiva, sino subjetiva; que nuestro Espíritu forma, por su propia actividad, esas figuras, y que en tal concepto, la evidencia de la Geometría es puramente mental y que nada tiene que hacer con el mundo objetivo.

Esta doctrina es tan errónea como la ante

rior, aunque mas pretenciosa. El primer fenómeno falso que asevera, es asentar que el Espíritu tiene idea de las figuras, tal como son descritas por las Definiciones. Esto es psicológicamente falso; el Espíritu solo tiene idea de las figuras tal como la percepción se las hace descubrir en el mundo exterior; y no es ciertamente como las manifiestan las Definiciones. No teniendo el Espíritu semejantes ideas, claro es que no ha podido constituir las por su propia actividad.

Resumiendo diremos: que cuando hablamos de una *línea recta*, no es porque exista en el mundo exterior como la Definición lo indica, ni porque nuestro Espíritu haya formado semejante concepto; sino porque teniendo la facultad intelectual llamada *abstracción* y conviniéndonos para la elaboración científica simplificar, nos fijamos *exclusivamente* en la longitud y suprimimos por abstracción la latitud y el espesor. (No que estas cualidades no existan en las líneas reales, sino porque nos conviene para nuestras miras teóricas ó prácticas no tenerlas en cuenta, y siéndonos posible, lo efectuamos.)

§ 63. Según hemos caracterizado las ciencias deductivas, se apoyan en determinado número de principios fundamentales, denomina-

dos comunmente *Axiomas*, bien diferentes de las Definiciones, pues en ellas no hay mezcla de suposición, son proposiciones reales y no se derivan de ningún otro principio de la misma ciencia.

Los *Axiomas* realmente fundamentales de la matemática son:

Primero. Cosas iguales á una tercera son iguales entre si;

Segundo. Las sumas de cantidades iguales son iguales.

Con estos Axiomas, sus corolarios y las Definiciones se puede directamente constituir la importante y grandiosa ciencia Matemática.

Por esta ligera exposición, se comprenderá la importancia capital que tienen los Axiomas, puesto que ellos forman el primer peldaño, el fundamento verdadero, de la valiosa escala de todos los razonamientos.

En tal concepto, debemos averiguar con toda precisión y exactitud ¿en qué reposa su evidencia y qué fundamento tenemos para creer firmemente en ellos?

Unos han contestado estas preguntas, diciendo: que los Axiomas son verdades intuitivas. Otros aseguran que son verdades experimentales.

Analizaremos ambos modos de juzgar tan

interesante cuestion y nos decidiremos en consecuencia.

§ 64. Los que creen que los Axiomas son verdades *intuitivas*, aseguran que su verdad la percibe á priori el Espíritu, y esto desde el momento en que comprende la significacion de la asercion, sin necesitar nunca del auxilio experimental.

Dos razones fundamentales aducen para corroborar su modo de decidir esta importante cuestion.

(Para que sea mas clara ésta exposicion, elijiremos un axioma, y con motivo de él analizaremos ámbas doctrinas.)

Sea el axioma: *Dos líneas rectas no pueden encerrar un espacio.*

Dicen: si bajo el punto de vista del conocimiento, comparamos este axioma con una proposicion, de origen experimental, como esta: *Una piedra arrojada á la superficie del agua desciende;* se notará inmediatamente que hay una diferencia esencial. Para dar nuestra aquiescencia al Axioma, no necesitamos experiencia efectiva, nos basta pensar en él é inmediatamente reconocemos su verdad. No sucede lo mismo en el caso de la piedra, porque si ántes de la experiencia, pensamos en el

agua y en la piedra, no somos conducidos necesariamente á la conclusion.

El otro argumento, que se cree tiene una fuerza incontrovertible, consiste en esto:

Dado un axioma, lo concebimos, no solo como verdadero, sino como siempre y necesariamente verdadero. En tanto que las proposiciones experimentales, jamas tienen este carácter. Los axiomas son proposiciones cuya negacion es falsa, inconcebible.

«Tres mas dos, son cinco.» Y realmente no podemos concebir que sea de otro modo. En tanto que aunque hayamos visto siempre que el agua es trasparente, podemos imaginarla color de rosa ó amarilla.

No solo concebimos muy bien que sea de este color, sino que su transparencia, miles de veces comprobada, no nos indica que debe ser necesariamente así en todos los casos.

§ 65. Formulados los argumentos presentados por los partidarios de la doctrina del origen intuitivo de los axiomas, los juzgaremos á la luz de la ciencia, y si logramos refutarlos completamente habremos abogado por la otra doctrina y establecido racionalmente el caracter inductivo de los axiomas.

Respecto del primer argumento, (axioma de las líneas y proposicion de la piedra) á prime-

ra vista convincente, puesto que establece una línea profunda de demarcacion entre los axiomas y las verdades adquiridas por la observacion, contestaremos que los ejemplos tal como se presentan no son comparables, en consecuencia la conclusion no es fundada y no puede probar lo que sus autores se propusieron.

En el ejemplo del axioma se dan todos los elementos para que la representacion subjetiva equivalga totalmente á la experiencia objetiva, es decir, se dan forma y direccion, las partes indispensables para que la representacion mental sustituya con toda exactitud la observacion de las líneas en el mundo exterior.

Por otra parte, la experiencia ha enseñado que una de las propiedades características de las formas geométricas, consiste en que pueden ser figuradas en la imaginacion con tanta claridad y precision como las formas realizadas en el exterior.

Así pues, cuando nos imaginamos alguna figura, y de esta sola inspeccion partimos para una conclusion general, lo hacemos, porque tenemos la seguridad plena de que esta figura imaginaria es exactamente semejante á la figura real y que la conclusion es tan segura en aquel caso como lo seria en éste. Por consi-

guiente, la fuerza del razonamiento, en el fondo, proviene de la observacion, es pues de origen inductivo.

Por otra parte el caso de la piedra es mas complejo, y no tiene la propiedad característica de las formas geométricas; en el ejemplo del axioma se dan forma y direccion circunstancias que hacen, que la representacion subjetiva sea enteramente semejante á la presentacion objetiva; pero en este caso solo se dá agua y piedra; mas si se diera, ademas de esto, la nocion del peso específico, la ley de densidades y el del agua y de la piedra, es posible que se llegara á formular el hecho final del fenómeno y por lo tanto la manera de producirse.

Así pues, ademas de no haber variedad en los ejemplos aducidos, hemos podido descubrir que en el último análisis ambos tienen por fundamento el testimonio de la experiencia.

§ 66. El segundo argumento puede formularse de este modo:

Todas las proposiciones pueden ser agrupadas en dos grandes porciones:

Primera. *Axiomas.*

Segunda. *Proposiciones* adquiridas por la *experiencia.*

Dada una asercion, si su contraria es posible y la podemos concebir, la verdad de que se trata

es dada por la observacion; si no solo no es posible, sino que es *inconcebible* la verdad es un Axioma, en cuyo caso tiene una evidencia superabundante, lo cual indica que creencia tan irresistible no le es dable proporcionarla á la experiencia y en consecuencia prueba que los Axiomas son de origen intuitivo.

Por ejemplo. —Conocemos por la observacion que los insectos tienen seis patas, (apenas habrá otra proposicion que la experiencia corrobore con mayor número de casos) y no obstante, sería enteramente posible y podemos con toda facilidad concebir, que tuvieran cuatro ú ocho. En tanto que á este Axioma. Dos líneas rectas no pueden encerrar un espacio, no solo le damos nuestra aquiescencia, y en el mayor grado posible, sino que no podemos concebir su contraria.

Por fuerte que parezca tan compacta argumentacion, haremos ver en seguida su completa falta de prueba y al mismo tiempo, demostraremos cuál es el punto de partida de semejante doctrina y su error fundamental.

Las leyes del Espíritu y la relacion de este con el mundo exterior nos dan la posibilidad de descubrir en dõnde está el error de la doctrina que analizamos.

Es un hecho cierto y fácil de comprobar, que

nuestra aptitud ó incapacidad para concebir las cosas es un fenómeno que nada tiene que ver con las cosas mismas. Puede ser ó no posible la realizacion de éstos, y sin embargo en ambos casos no tener nosotros capacidad para concebirlos. —Lo cual indica que el hecho de poder concebir ò nó, es independiente del mundo exterior; y sí depende exclusivamente de las leyes del Espíritu, del hábito del pensamiento. Y dicho hábito depende en gran parte del modo como hayamos observado los fenómenos, ya siempre unidos, ya constantemente separados. Así por ejemplo, si hemos visto ò pensado dos cosas juntas y esto ha pasado ó con mucha frecuencia ó nos ha afectado profundamente, se forma en nuestro Espíritu (en virtud de las leyes de asociacion (§ 15 Psic) union tan indisoluble respecto de ambos fenómenos, que llega á ser enteramente imposible concebir dichas cosas separadamente.

Y este fenómeno, aunque comun á todos los hombres, porque depende de las leyes fundamentales del Espíritu, es mas frecuente en las personas de poca cultura, porque las personas convenientemente educadas debido á su actividad mental, han tenido ocasion ya de efectuar separaciones, ya de sintetizar, cosa que les falta del todo á los ignorantes.

Así, pues, el hecho de que podamos concebir las contrarias de unas proposiciones y no de otras, no quiere decir que las hayamos adquirido por caminos distintos, sino que nuestro Espíritu, siempre el mismo, ha estado colocado en puntos de vista diversos al apreciar unas verdades y al considerar las otras. En efecto, si podemos concebir la contraria de la proposición relativa al *agua*, es precisamente porque la observación nos ha mostrado otros cuerpos en el estado líquido de color amarillo, ó rosado; y aun cuando no háyamos visto el agua de este color, las muchas analogías entre ella y los otros líquidos facilita extraordinariamente y hace posible la concepción. Pero no sucede lo mismo en el caso del axioma, la observación no muestra, en ninguna forma, un modelo que facilite la concepción contraria; sino al revés, encontramos repetidísimos en la naturaleza infinidad de casos que comprueban el axioma. Por lo mismo dos géneros de fenómenos imposibilitan, irrevocablemente la concepción; por una parte, la ausencia completa de casos análogos á la concepción contraria, y por otra la incesante repetición de casos que confirman la generalización, llamada axioma. En la misma imposibilidad, que respecto al axioma, nos encontramos cuando intentamos

determinar el límite del espacio ó hallarle fin al tiempo.

Y para corroborar nuestro modo de zanjar tan importante cuestión añadiremos: que esta explicación terminante á que nos conduce lógicamente el análisis psicológico, tiene plena confirmación en la historia de la humanidad.

Dos hechos diversos, pero que concurren á un mismo fin, nos enseñan los recuerdos del pasado: sea el primero, que muchas nociones que no han podido ser concebidas por una generación, lo han sido, y con perceptible facilidad por la generación siguiente (entré otros citaré la teoría de Newton); y sea el segundo, que nociones que al principio no podían admitirse y que para establecerlas ha sido necesario mucho trabajo y experiencias laboriosísimas, después de plenamente conquistadas la creencia en ellas es de tal manera grande, que no es posible concebir su contraria [señalaré como ejemplo, la teoría química de las proporciones definidas.]

Después de esto, es notorio que hay suficientes razones para juzgar idéntico el origen de las dos clases de verdades; pero si aún se insistiera en creer distinto el origen de nuestra creencia en los Axiomas, debemos recordar solo una cosa: en Lógica el que lleva la afirmativa