particularidad se observó en el satélite de Neptuno, descubierto mucho después.

Aplazaremos para la lección próxima la cuestión relativa al grado variable de certidumbre que pertenece á la inducción en los distintos ramos del conocimiento.

El estudiante aprovechado podrá consultar fructuosamente las obras siguientes: El Aldrich, edición de Mansel, Apéndice, notas G y H. *Las lecturas sobre lógica* de Hamilton, lectura XVII, y apéndice VII, *sobre la inducción y el ejemplo*, vol. II, pág. 358. El *sistema de lógica* de Stuart Mill, libro III, cap. 2, *Sobre las inducciones llamadas así impropiamente.*

LECCIÓN XXVI.

INDUCCIÓN MATEMÁTICA Y GEOMÉTRICA, EJEMPLO Y ANALOGÍA.

Ahora ya es indispensable considerar las razones en que se funda la inducción imperfecta. En la inducción perfecta no se tropieza con ninguna dificultad, porque se han enumerado ya en las premisas todos los casos posibles comprendidos en la conclusión general, de modo que en realidad la información que se da en la conclusión, ha sido dada ya en las premisas. Desde este punto de vista, el silogismo inductivo concuerda perfectamente con los principios generales del razonamiento deductivo, que exigen que la información contenida en la conclusión se demuestre únicamente por medio de los datos ó premisas, y que simplemente debemos desarrollar ó transformar en una enunciación explícita lo que está implícitamente contenido en las premisas.

Parece que en la **inducción imperfecta** el procedimiento es enteramente distinto, pues los casos que la inducción nos da á conocer pueden ser incomparablemente más numerosos que aquellos de los que la inducción se deriva. Consideremos en primera línea el **razonamiento geométrico,** que tiene

con el inductivo una gran semejanza. Para probar que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales entre sí, se toma un triángulo particular como ejemplo, en la proposición quinta del primer libro del Euclides, y se supone que el triángulo tiene dos lados iguales. En seguida se demuestra perentoriamente que si los lados son realmente iguales, los ángulos opuestos á esos lados también serán iguales. Mas Euclides nada nos dice con respecto á los demás triángulos isósceles; presenta á uno de ellos como acabado modelo de la especie, y nos pide que creamos que lo que es verdad de este modelo lo es igualmente de todos los triángulos isósceles, ya sea que tengan los lados tan pequeños que sólo con el microscopio sean visibles, ó tan grandes que lleguen hasta la estrella fija más lejana. Puede haber evidentemente un número infinitamente grande de triángulos isósceles cuando se considera la longitud de los lados iguales, y cada uno de éstos se puede variar infinitamente aumentando ó disminuyendo los ángulos comprendidos, de manera que el número de triángulos isósceles posible es infinitamente infinito; y con todo, se pide que creamos de este incomprensible número de objetos lo que se ha probado solamente considerando determinado triángulo. Parece que esta es una inducción imperfecta en grado sumo, y á pesar de eso, todo el mundo concede que el conocimiento que da es realmente cierto. Sabemos con todo el grado de certidumbre que puede tener el conocimiento, que si tiramos dos rectas desde la tierra á dos estrellas igualmente distantes de ese planeta, formarán ángulos iguales con la recta que une las dos estrellas, y sin embargo, no podremos intentar nunca la experiencia.

La generalidad de este razonamiento geométrico depende evidentemente de que sabemos con plena certeza que todos los triángulos isósceles se semejan entre sí exactamente. La proposición demostrada no se aplica de hecho á ningún triángulo, á no ser que concuerde con el modelo en todas las cualidades esenciales á la prueba. La longitud absoluta de uno cualquiera de los lados, ó la magnitud absoluta de uno cualquiera de sus ángulos, no son puntos de los que la prueba dependa, son puramente circunstancias accidentales; estamos, pues, en perfecta libertad de aplicar á todos los casos nuevos de triángulos isósceles lo que sabemos de un solo caso. Todo el vasto edificio de verdades ciertas, tanto geométricas como algebraicas, descansa sobre fundamentos parecidos. Se demostró, por ejemplo, en otro lugar, que si a y b son dos cantidades, y que si se multiplica su suma por su diferencia, se obtiene la diferencia de los cuadrados de a y b. Siempre que se intente comprobar esta proposición se verá que se verifica plenamente. Así, si $a = 10$ y $b = 7$, el producto de la suma por la diferencia es $17 \times 3 = 51$; los cuadrados de las cantidades consideradas son $10 \times 10 = 100$ y $7 \times 7 = 49$; y la diferencia de estos cuadrados es también 51. Mas por muchas que sean las verificaciones, no añadimos ni un ápice á la certidumbre de la proposión considerada; porque cuando se demostró algebraicamente, no había ninguna condición que restringiese el resultado á números particulares, y por consiguiente a y b pueden ser números cualesquiera. Esta generalidad del razonamiento algebraico, que permite que una propiedad se demuestre á un tiempo de una variedad infinita de números, es una de las ventajas capitales del álgebra sobre la aritmética. Hay también en álgebra un procedimiento llamado **inducción matemática** ó **inducción demostrativa**, que muestra de un modo muy conspicuo los poderes del razonamiento. El siguiente problema es un buen ejemplo de lo dicho últimamente: Si tomamos los dos primeros números impares consecutivos 1 y 3 y los sumamos, la suma es 4 ó 2×2; si tomamos los tres primeros números impares consecutivos y los sumamos, la suma $1+3+5$ es igual á 9 ó á 3×3; si tomamos los cuatro primeros y los sumamos, la suma $1+3+5+7$ es igual á 16 ó á 4×4; en general, si tomamos de la serie $1+3+5+7+\ldots\ldots$ determinado número de términos, la suma será igual al cuadrado del número de

términos. Todo el que sepa una poca de álgebra puede probar que esta ley notable es universalmente cierta, de la manera siguiente: Sea n el número de términos y supóngase que la ley es cierta cuando se consideren n términos; se tendrá por el supuesto:

$$1+3+7+\ldots\ldots+(2n-1)=n^2$$

Añádase $2n+1$ á los dos miembros de esta ecuación; se tendrá entonces:

$$1+3+7+\ldots\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1.$$

Mas la última cantidad es exactamente igual á $(n+1)^2$; así es qne si la ley es cierta para n términos, lo será también para $n+1$. Estamos autorizados para concluir de cada caso aislado de la ley al siguiente; mas se ha ya demostrado que la ley es cierta en los casos primeramente considerados; de consiguiente será cierta en todos. Solamente desplegando un trabajo inconcebible se podría, ejecutando efectivamente la operación, encontrar que es igual la suma del primer billón de números impares, y no obstante, simbólicamente ó por medio del razonamiento general, sabemos con certeza que esa suma es igual á un billón elevado al cuadrado, ni más ni menos. Este procedimiento de la inducción matemática no es exactamente el mismo que el de la inducción geométrica, porque cada caso depende del último, mas la prueba descansa sobre una base experimental igualmente estrecha, y crea conocimientos que tienen en ambos casos la misma certeza y generalidad.

Tales verdades matemáticas dependen de la observación de unos cuantos casos, mas la certeza la adquieren por la percepción que tenemos de la exacta similaridad de un caso con otro; así es que creemos, sin la menor vacilación, que lo que es cierto de uno de esos casos lo es del otro. Es muy instructivo oponer á estos casos otros en los que el campo de la observación es parecido, mas no los mismos los lazos de similaridad. Se creyó en otro tiempo que si se multiplicaba un número entero por sí mismo y se añadía al producto el número considerado y en seguida 41, el resultado sería un número primo, es decir, un número que no es divisible por ningún otro número entero diferente de la unidad; en otros términos, empleando los símbolos del álgebra, se creyó que

$$x^2+x+41=\text{número primo}.$$

Esto se creía únicamente por razones derivadas de la experiencia; y ciertamente la relación considerada se verifica para muchos valores de x. Así, pues, si se hace á x igual á los números de la primera de las líneas que á continuación ponemos, la expresión x^2+x+41 será respectivamente igual á los números de la segunda línea, que son todos primos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	151

Sin embargo, no se puede aducir razón ninguna que legitime la regla, y en conformidad se encuentra que no siempre se verifica esa regla, sino que falla cuando x es igual á 40. Entonces se tiene

$$40\times40+40+41=1{,}681;$$

mas este número es claramente igual á

$$40\,(40+1)+41=41\times41,$$

y no es pues un número primo.

En la rama de las matemáticas que trata de las propiedades peculiares de los números y de sus varias especies, se han aseverado como ciertas, y sin más garantía que la observación, otras proposiciones. Así, Fermat creía que $2^{2^x}+1$ es siempre un número primo, mas no pudo aducir nunca razones para probar su aserto. Se verifica en realidad hasta que el resultado alcanza la enorme cifra 4294967297, que se encontró

que era divisible por 641; de manera que quedó infirmada la generalidad de la regla.

Encontramos, pues, que en algunos casos un solo ejemplo prueba una regla cierta y general, mientras que en otros, un número muy grande de ejemplos es completamente insuficiente para hacer nacer la certidumbre; todo depende de la percepción que se tiene de la similaridad ó identidad entre un caso y otro distinto. No podemos descubrir entre los números primos ninguna similaridad que nos autorice á concluir, que porque uno de esos números está representado por cierta fórmula, otro también lo estará; mas esa similaridad sí la encontramos entre las sumas de números impares ó entre triángulos isósceles.

Las mismas consideraciones se aplican, punto por punto, á la inducción en las ciencias físicas. Cuando un químico analiza unos cuantos granos de agua y encuentra que contienen exactamente 8 partes de oxígeno y 1 de hidrógeno por 9 de agua, cree tener razones de sobra para asegurar que eso mismo será cierto de toda agua pura, cualquiera que sea su origen y cualquiera que sea la parte del globo de donde provenga. Mas si analiza un fragmento de granito ó agua de mar procedente de determinada localidad, no tiene absolutamente seguridad de que se parezcan exactamente al fragmento de granito ó al agua de mar procedente de otra localidad; en consecuencia, no se aventura á afirmar de toda clase de granitos ó de agua de mar, lo que en casos aislados ha encontrado verdadero. Experimentos practicados en diferentes regiones demuestran que la composición del granito es muy variable, pero que, debido á la mezcla incesante de corrientes, la composición del agua de mar es casi uniforme. En estos casos, sólo por la experiencia podemos saber en qué circunstancias podemos seguramente afirmar de un caso nuevo lo establecido en otro. Empero, tenemos razones para suponer que los compuestos químicos tienen una composición naturalmente fija é invariable, conforme á la ley de Dalton sobre proporciones definidas. Ninguna razón *à priori* basada en las leyes del pensamiento nos podía enseñar esa verdad; la conocemos únicamente por medio de repetidos experimentos. Mas una vez que se ha probado que es verdadera, considerando determinadas substancias, no es menester repetir el ensayo con todas ellas, porque tenemos razones fundadas para creer que es una ley natural, que expresa los puntos de semejanza de todas las substancias químicas. Para conocer la composición de las diferentes porciones de determinado compuesto definido, basta, pues, un análisis exacto de una sola porción.

Sin embargo, debe observarse cuidadosamente que **en las ciencias físicas todas las inducciones son probables solamente,** ó que si son ciertas, solamente poseen la certidumbre hipotética. ¿Puedo creer con plena certeza que el agua contiene en nueve partes una sola de hidrógeno? La plena certeza la tengo solamente cuando se realizan dos condiciones:

1. Que esa fué ciertamente la composición de la porción ensayada.
2. Que todas las demás substancias que se llaman agua se asemejan exactamente á la porción analizada.

Mas aun cuando la primera condición sea indudablemente cierta, no puedo estar cierto de la segunda. Pues ¿cómo sé lo que es agua si no es por el hecho de que es un líquido transparente, congelable, vaporizable, dotado de un gran calor específico, y de muchas otras propiedades distintas? Mas ¿pudo tener la certeza absoluta de que todo líquido que posea estas propiedades es agua? La certeza la tengo prácticamente, mas no en el terreno de la teoría. Pueden haber sido creadas dos substancias tan parecidas entre sí, que todavía no se haya descubierto la diferencia; estaríamos, pues, extraviados constantemente si afirmásemos de una de ellas lo que sólo se ha encontrado cierto para la otra. Es excesivamente improbable que esto pueda acontecer con substancias que po-

sean, como el agua, cualidades bien distintas; mas dista tanto de ser imposible ó improbable en otros casos, que con frecuencia se ha hecho ya la confusión. Muchos de los nuevos elementos, descubiertos en los últimos años, fueron confundidos precedentemente con otros elementos. Por mucho tiempo se confundieron entre sí y con el potasio, el cesio y el rubidio, hasta que Bunsen y Kirchhoff lograron distinguirlos con la ayuda del espectroscopio. Es seguro que lo que se supuso en multitud de análisis que era potasio, estaba, en realidad, compuesto de diferentes substancias, pues se sabe ahora que esos metales están distribuídos extensamente, aunque en pequeñas cantidades. El selenio se ha confundido probablemente con el azufre, y existen ciertos metales que se han distinguido únicamente en tiempos recientes, como son el rodio, el rutenio, el iridio, el osmio, el berilio, el itrio, el erbio, el cerio, el lantano, el didimio, el cadmio y el indio. Los progresos de la ciencia sin duda demostrarán que muchas de nuestras identificaciones son erróneas, y las dificultades suscitadas por esas identificaciones quedarán en último análisis explicadas.

Consideremos todavía un caso de inducción muy diferente. ¿Estamos ciertos de que el sol saldrá mañana como ha salido durante muchos millares de años, y probablemente durante algunos centenares de millones de años? La certeza la tenemos solamente cuando se realice esta condición ó hipótesis: que el sistema planetario siga mañana como ha seguido durante tanto tiempo. Pueden existir muchas causas que en un momento cualquiera frustren todos nuestros cálculos; se cree que nuestro sol es una estrella variable, y por lo que sabemos de esas estrellas pudiera suceder que de repente hiciera explosión el sol ó se incendiase, como se ha observado que ha sucedido con otras estrellas, y entonces nos convertiríamos en un vapor luminoso y sutil. No es absolutamente imposible que haya ya ocurrido alguna colisión en el sistema planetario y que hayan resultado de esa colisión los pequeños planetas ó asteroides. Aun cuando no exista ningún gran meteoro, cometa ú otro cuerpo celeste capaz de hacer por colisión á la tierra pedazos, con todo, es probable que el sol se mueve en el espacio á razón de 300 millas por minuto, y si alguna otra estrella animada de una velocidad parecida nos encontrara, las consecuencias, por lo terribles, excederían á toda ponderación. Sin embargo, es altamente improbable que este acontecimiento se presentara, aun en el curso de un millón de años.

El lector verá ahora que ninguna inducción imperfecta puede dar un conocimiento cierto; toda inferencia procede bajo el supuesto que los nuevos casos se asemejarán exactamente á los antiguos en todas las circunstancias materiales; mas en los fenómenos naturales esto es puramente hipotético, y constantemente podemos incurrir en el error. En la inducción matemática, la certidumbre nace de que los casos son por su propia naturaleza hipotéticos, ó se hacen de tal modo, que exactamente correspondan á las condiciones. No podemos afirmar que algún triángulo de los que en la naturaleza existen, tenga dos lados iguales ó dos ángulos iguales, y aun es imposible en la práctica que dos líneas ó dos ángulos sean absolutamente iguales. No obstante, es cierto que si los lados son iguales los ángulos son iguales. Aun en el silogismo la certeza de la conclusión descansa en una hipótesis: la certeza de las premisas. La certeza de toda inferencia es, pues, relativa é hipotética. Es probable que de hecho todo razonamiento se reduzca á un tipo único: que lo que es verdad de una cosa lo es también de otra, siempre que haya entre ellas una exacta semejanza en todas las circunstancias materiales.

El lector entenderá ahora con facilidad la naturaleza del **razonamiento por analogía.** Estrictamente hablando, la analogía no es una identidad de una cosa con otra, sino una identidad de relaciones. En el caso de los números, 7 no es idéntico con 10, ni 14 con 20; pero la relación de 7 á 10 es idéntica á la relación de 14 á 20, de modo que hay entre

esos números una analogía. Multiplicar dos por dos no es la misma cosa que construir un cuadrado sobre un segmento de recta igual á dos unidades; mas existe esta analogía: que hay exactamente tantas unidades de área en el cuadrado considerado como hay unidades en el producto de dos por dos. Esta analogía es tan evidente, que sin temor afirmamos, sin necesidad de comprobar el aserto, que una milla cuadrada tiene 1760×1760 yardas cuadradas. Sin embargo, en el lenguaje común, la analogía ha llegado á significar una semejanza tal entre las cosas, que nos autorice á afirmar de una de ellas lo que sabemos de la otra.

Así, el planeta Marte posee una atmósfera con nubes y neblina, muy parecida á la de la Tierra; tiene mares que se distinguen de la tierra firme por medio de un color verdoso, y tiene también regiones polares cubiertas de nieve. El color rojo del planeta parece que se debe á la atmósfera, como á la atmósfera terrestre se debe el color rojo de las salidas y puestas del sol. Existen tantas semejanzas entre la superficie de Marte y la de la Tierra, que inmediatamente se infiere que ese planeta debe estar habitado como lo está el nuestro. Sin embargo, todo lo que se puede en realidad afirmar es, que si las circunstancias son realmente semejantes y se han creado en Marte gérmenes de vida semejantes á los de la Tierra, deberá haber habitantes en Marte. El hecho de que muchas de las circunstancias son semejantes, aunmenta la probabilidad de la conclusión. Mas entre la Tierra y el Sol la analogía es de un carácter muy vago; decimos en verdad que la atmósfera del Sol está llena de nubes y sujeta á tempestades; mas estas nubes están probablemente á una temperatura superior á la de nuestros hornos más calientes; si producen lluvia, ésta se debe parecer á un aguacero de fierro en fusión; y las manchas solares son perturbaciones tan tremebundas y considerables que la Tierra con media docena de planetas podrían ser tragados rápidamente por una sola mancha.[1] Es, pues,

1 Lockyer, *Lecciones elementales de Astronomía*, § 108.

evidente que hay entre la Tierra y el Sol poca analogía, ó más bien dicho, ninguna, y de consiguiente, con dificultad podremos concebir lo que sucede en un sol ó estrella.

El argumento por analogía se puede definir diciendo que es la inferencia inductiva de un caso á otro semejante. Puede reducirse, como lo dice Mr. Mill, á la siguiente fórmula: "Dos cosas se asemejan desde uno ó varios puntos de vista; determinada proposición es cierta de una de ellas; de consiguiente lo es de la otra." Este es sin duda el tipo de todo razonamiento, y la certeza del procedimiento depende completamente del grado de semejanza ó identidad entre ambos casos. En geometría, los casos son por hipótesis idénticos en todos los puntos materiales, y la duda no es nunca inherente á la inferencia; en las ciencias físicas la identidad es una cuestión de probabilidad, y la conclusión es probable en igual grado. Debe añadirse que Mr. Mill considera que la inducción matemática y la geométrica no deben designarse propiamente con ese nombre, y se funda para justificar esta conclusión en razones cuya fuerza probante se escapa á mi inteligencia; pero el lector hallará formulada la opinión de Mill en el 2º capítulo del tercer libro de su *Sistema de Lógica.*

El uso constante de los **ejemplos** es una de las formas de la argumentación analógica ó inductiva. La mejor manera de dar á conocer la naturaleza de una clase de cosas es presentar una de estas cosas y señalar las propiedades que pertenecen á la clase, distinguiéndolas de las peculiares á la cosa misma. En todas estas lecciones, como en toda obra de lógica, se ponen incesantemente ejemplos de proposiciones, de oraciones compuestas ó complexas, de silogismos, etc., y se ruega al lector que aplique á los casos semejantes lo que observe en los ejemplos dados. Se supone que el lector escoge de tal modo los ejemplos, que se pongan verdaderamente de manifiesto las propiedades en cuestión.

Mientras que todas las inferencias, tanto inductivas como analógicas, están fundadas en los mismos principios, existen

grandes diferencias entre las fuentes de probabilidad. En la **analogía** se tienen dos casos que poseen un gran número de propiedades semejantes, é inferimos que alguna de las propiedades adicionales de uno de ellos también se encuentra en el otro. El alto grado de probabilidad sirve de compensación á lo reducido de la base experimental. En el procedimiento que se trata comunmente bajo el nombre de **inducción**, las cosas se asemejan entre sí ordinariamente sólo en dos ó tres propiedades, y es necesario tener mayor número de ejemplos para tener la seguridad de que lo que es cierto de una de estas cosas es cierto probablemente de todas las cosas semejantes. En suma, mientras menor es la intensión de la semejanza, tanto mayor tiene que ser la extensión de nuestras investigaciones.

Pasamos á exponer en las siguientes lecciones los procedimientos de inducción ordinarios.

Véanse: el *Sistema de lógica* de Mr. Mill, libro III, cap. XX, *Sobre la analogía*, y el Aldrich, ed. de Mansel, App. nota H, *Sobre el ejemplo y la analogía.*

LECCION XXVII.

LA OBSERVACIÓN Y LA EXPERIMENTACIÓN.

Se puede con seguridad decir que todo conocimiento está fundado en último análisis en la experiencia, expresión que no es sino un nombre general para los varios sentimientos estampados en el espíritu en un período cualquiera de su existencia. La mente nunca crea completamente nuevos conocimientos independientemente de la experiencia; y todo lo que pueden hacer los poderes raciocinantes, se reduce á precisar el pleno significado de los hechos que están ya en nuestra posesión. En las pasadas centurias se ha sostenido por personas de gran capacidad, que la mente podía, en virtud de su pro-