GUEVARA

DE

PHILOSOPHIA

INSTITUTIONUM
ELEMENTARIUM
PHILOSOPHIÆ

AD USUM STUDIOSÆ JUVENTUTIS

AB ANDREA DE GUEVARA
ET BASOAZABAL,
GUANAXUATENSI PRESBYTERO.

TOMUS PRIMUS,

COMPLECTENS

HISTORIAM PHILOSOPHIÆ EL ELEMENTA MATHESEOS.

...ntum, *præter alios remotioris*
...*embroekius, Purchottus, Wol-*
...*Genovesius, Hauserus, Fortu-*
...*sis, Monteirus, Vernejus, Hor-*
...*s, Corsinus, Jacquier, Tamag-*
...*ergerus, Torrius, aliique benè*
...*numerantur in sapientibus, et*
...

MATRITI
EX TYPOGRAPHIA REGIA.
1833

PRÆFATIO.

Priusquam *hujus opusculi rationem, atque ordinem, ut plerumque solent auctores, prænuntiem, operæ pretium credidi ad publicum sapientum tribunal me sistere, ut excusationem præmittam, quod eruditis hisce temporibus consilium susceperim scribendi philosophiam. Accusabor enim, et quod actum egerim, ac frustra tempus consumpserim, cum philosophici libri magna jam copia conscripti sint, perque orbem universum disseminati, et quod temerè putaverim aliquid esse me, quum audeam crambem recoquere, quam sibi sumpserunt argumentum, præter alios remotioris ætatis, Mussembroekius, Purchottus, Wolfius, Sagner, Genovesius, Hauserus, Fortunatus Brixiensis, Monteirus, Vernejus, Horvathus, Makus, Corsinus, Jacquier, Tamagna, Para, Bergerus, Torrius, aliique benè multi, qui jure numerantur in sapientibus, et quorum nomina sunt in philosophiæ scriptoribus illustrissima. Quid ergo irrepere tentem in hos viros tantæ magnitudinis? Quid doctrinarum afferam, quod illi non exhauserint? Quid* superbè pollicear, traditurum me philosophicas disciplinas aut elegantiori stilo, aut clariori ordine, majore perspicuitate, quàm tot tantosque ante me facisse nemo non audiit? Equidem fateor, hæc animo sæpe, ac seriò quum tacitus agitaverim, arreptum calamum semel, et iterum deposuisse, ac penè à proposito defecisse; nimirum meo timentem nomini, quod Sibilis posset excipi, aut certè fastidio.

Ceterum ita deficientem, languentem, ac territum duo me semper confirmarunt, atque impulerunt, ut institutum laborem non desinerem. Et primum quidem, quia maximoperè desidero patriæ juventuti, quaqua possum ratione, tam longè ab ea positus, inservire. Nec in iis votis prospiciendi bono juvenum, quos mihi dederat natura cives, defuere laudando exempla, quæ sequerer: Horvathus enim, et Makus in Germanorum, Monteirus, et Vernejus in Lusitanorum suorum eruditionem potissimum jaculati sunt, cum scripta sua philosophica divulgarunt. Et certè spero, Mexicanos adolescentes, quum intellexerint, philosophicas lucubrationes elaborasse Mexicanum hominem, qui hoc sanè studio non sibi nomen quæsivit, non gloriam, non quodvis aliud in humanis emolumentum, sed eorum tantummo-

dò bonum respexit; spero, inquam, ingenuos illos, et optima natos indole, ad amorem philosophiæ facilè exsuscitandos. Et hæc mihi proposita meta satis videtur à temeritatis nota excusare scribentem philosophica; quamquam idem fuerit plurium, et quidem sapientissimorum, argumentum: quemadmodum nemo dixerit, modestissimum Monteirum, ejusque similis, ab sua temperantia defecisse, quoniam doctrinas, ab innumeris philosophiæ Doctoribus agitatas, ipsi rursus agitarunt. Alterum autem vehementius me commovit, ut totis conatibus perficerem, quod opus inceperam; nimirum ut omninò corruat, et funditus eradicetur præjudicata opinio, quæ quondam apud nonnullos in maximam litterarum perniciem invaluerat, quod scilicet recentior philosophia sensim inducit in irreligiosam licentiam, ejusque propterea cultores objiciunt se voluntario periculo, religioni catholicæ terga vertendi. Summa quidem cum voluptate intellexi, quotidie magis in meis civibus hunc paucorum errorem everti, et profligari. Quod siquis adhuc remaneat, cui tenaciter insederit hæc nihil consona rationi opinio, animadvertat, quæso, in hac urbe amplissima, cui præsidet Christi Vicarius, Ecclesiæ caput, publicè coli, et in *scholis omnibus doceri recentiorem hanc philosophiam; in eademque religionis Catholicæ magnifica sede institutiones istas philosophicas typis esse mandatas. Plures profectò ex recentioribus philosophis in errores digeneris inciderunt; sed inciderant pariter plures ante philosophiæ instaurationem: nec est, cur doctrinis de re physica tribuantur crimina, quæ cordis corrupti sunt.*

Quod autem est de ratione, ac distributione operis, quatuor dumtaxat constabit voluminibus; quæ nec erunt aut assiduis auctorum appellationibus, aut annotationibus referta, nec in magnam molem excrescentia; sed studiosorum usibus omninò commoda. Quin et cordi mihi fuit rem totam ita temperare, ut triennii spatio, quod philosophiæ dari solet, ea quatuor volumina sedulus Magister facilè discipulis explicet, atque enucleet. Primum hoc historiam philosophiæ brevissimo narrat compendio, indè verò matheseos elementa complectitur, quorum notionem ceteris philosophiæ partibus, certè phisicæ, præmittendum existimamus: alterum in dialectica ac metaphysica totum erit: tertium generalia physicæ rudimenta, quibus propterea nomen est physicæ generalis, dilucidabit: quartum denique de peculiaribus aget naturæ phænomenis, quæ certis jam definita sunt legibus, ac physica particularis in scholis apellantur. In hæc autem adeò varia tractando argumenta, totis fui conatibus, ut, qui juvenis ea condidicerit, planam sibi, et constratam reperiat viam ad majoris momenti scientias, et munera; vel ad altaria postmodum, vel ad forum, vel ad togam, vel ad militiam, vel ad mercaturam vocetur. In dialecticis quidem, et metaphysicis non planè jejuno, ac presso sunt stilo, qui penitus amœnitatem excludat; sed tamen ad scholasticorum more vix paulum recedo, tum patriæ serviens consuetudini, tum etiam ne desit locus tam privatis, quam publicis concertationibus, quæ mentem adolescentium exacuunt, eorumdemque profectui quam utilissimæ sunt, ut longo nobis experimento notum est. In physicis autem, ut alia prorsus est, atque oppidò jucundior natura rerum, quæ tractantur; de scholæ severitate liberius puto remittendum. Elocutionem adhibeo, non eam planè barbaram, incultam, atque horridam, quam usurpabant olim, qui se dicebant Aristotelicos; neque tamen latini sermonis puritati tam religiosè adhæreo, ut ea credam respuenda verba, quæ longo jam usu sapientes *in quæstionibus philosophicis consecrarunt. Primam autumo scribentis esse gloriam in limpida perspicuitate; quam ita sequi animus est, ut velim potius inuri nota minus venustè scribendi, quam quod videar me quærere, nec indolem juventutis intelligere.*

In hac etiam præfatione ad philosophica scripta præterire non licet, quod perperam nonnulli crediderunt, recentiorem philosophiam ætatis teneræ captui parum convenire, atque experimento jam esse comprobatum majorem ab ea veteri, quam ab instaurata philosophia profectum juvenes derivasse. Non est hujus loci cum præjudicatis opinionibus colluctari; sed brevi liceat enodare difficultatem. Hodierni philosophi stilum amant cultiorem, et venustè concinnum, qui et mirificè delectat animos, et scientiarum imagines amabiliori specie repræsentat: quare si ad eosdem auditor venerit, qui Magistrorum linguam non intelligat, nemini profectò mirum esse debet, si vel parum, vel omninò nihil proficiat. Quid scitè velis pulsare lyram, nisi musicas notas, quæ sunt artis lingua, condidiceris? Quid opus fabrile aggrediaris perficere, nisi prius fabrorum voces, et prima opificii rudimenta intellexeris? At nescio quo malo consilio in regionibus, ubi Magistri latinè tradunt, venire solent ad philosophiam juvenes, quin prius in grammaticis perficiantur. Et hinc malum est gravissimum, quod nonnulli ad philosophiæ studiunt evehuntur, quibus nisi converteris in patrium sermonem latinos Magistri codices, perindè illos, atque Aristotelis græcos intelligant. Nimirum quidam sunt, qui paterno præcepti amore, filium penè infantem in scientiarum palæstram immittunt, et exacto triennio, vix balbutientem in grammaticis ad philosophicum lycæum immaturè deferunt, festinatione nimis propera volentes, lauro puerum coronari, quæ non convenit, nisi ætate firmioribus. Et fortassè arbitrantur filium suum, anticipatis litterarum luminibus, brevi fore familiæ gloriam et columen: sed vereantur potius, ne tenellas adhuc, nec satis robustas mentis fibras, tam gravent ejusmodi anticipatione, tam onerent, tam enervent, ut ad debitam fortitudinem opportuno postea tempore non possint ultra componi. Newton quidem duodecimo ætatis anno, quod ajebat Lockius, nondum prima grammaticæ attingerat rudimenta: et tamen eo pervenit, ut philossophos, quotquot ad ejus ætatem fuerant, vel superaverit, vel saltem clarisimos omnium exæ-

quaverit. Quod si ad litterarum sudorem ante maturum tempus accessisset, fortassè difficultatibus, quæ sæpissimè parantur pueris, obrutus concidisset; nec tam robustum habuissent Cartesiani vortices eversorem.

Unum superest, ut præmoneam, qua de causa notiones algebraicas in hoc primo institutionum volumine intersuerim. In diversas enim hodierni philosophi scinduntur opiniones de tradenda juventuti geometria: maxima profecto illorum pars auditoribus consuevit proponere, ferè quidquid ea scientia complectitur: alii verò totis propugnant conatibus, adolescentium ætatem satis quidem esse ad utilissima quædam ejusdem rudimenta, quæ labore modico demostrantur; minimè autem ad eam mentis intentionem, sublimioremque volatum, quem algebricæ, ac trigonometricæ notiones expostulant. In his postremis video Monteirum, et Vernejum, quornm primus ait, plurium annorum experimento in eam sententiam venisse; alter diversè judicantes acerrimè insimulat, eorumque opinionem pedantismum calculi *appellare non dubitat. Et utique fateor, parum abfuisse, quin recentioribus his clarissimis litem adjudicarem; quoniam et ego vidi juvenes nonnullos, quorum fuerat institutio meæ curæ commissa, maximoperè adlaborantes, ac desudantes in elementis algebricis, tamquam in re captui non pervia, tametsi alioquin essent ingenio satis claro, et aperto. Ceterum quum animadverterem hominum ingenia diversis ornata dotibus ab supremo rerum artifice, nec admodum pauca reperi, quæ à primis ætatis initiis idonea videntur ad calculum; consultius mihi visum est, tam his, quam aliis prospicere, totiusque geometriæ scribere compendium, his tantummodò prætermissis, quæ summum possent negotium facessere. Præceptoris erit, qui administrat adolescentium ingenia, singulorum vires perpendere, partemque cuilibet suam ad prudentiæ leges dispensare; ne vel alter concidat sub onere sibi gravissimo, vel alteri desit, quod habere oportuisset. Siquis tamen præceptor in faciliorem puerorum eruditionem satius arbitretur, hæc prorsus omittere, nihil idcircò timeat ad physicæ tractatus accedere; quos ita componere conatus sunt, ut prodesse possint tam algebram nescienti, quam desideranti. Utinam omnia cadant in Mexicanæ, ac studiosæ pubis utilitatem!*

Sin autem quis requirit, quæ causa nos impulerit ut hæc litteris mandaremus, nihil est quod expedire tam facilè possimus. Nam quum otio langueremus... primum ipsius reipublicæ causa philosophiam nostris hominibus explicandam putavi, magni existimans interesse ad decus et ad laudem civitatis.... Hortata est etiam, ut me ad hæc conferrem, animi ægritudo... cujus si majorem aliquam levationem reperire potuissem, non ad hanc potissimum confugissem. Ea verò ipsa nulla ratione melius frui potui, quam si me non modò ad legendos libros, sed etiam ad totam philosophiam pertractandam dedissem.

Cicero de Nat. Deor. Lib. 1, cap. 4.

DE PHILOSOPHIÆ
VICISSITUDINIBUS
BREVIS NARRATIO.

Profectò non aliud sub cœlo est, quo certiùs, et solidiùs confirmetur, ad grandia, et sublimia natum esse hominem, quam nobilissimum desiderium, quo trahitur, impellitur, agitatur, et urgetur ad scientiam. Nullo non fuerunt tempore illustres ingenio viri, qui laudabiliter conantes, ac nulla penè intercapedine desudantes, gloria litterarum excellerent; qui per invia, per prærupta, per tenebras, una duce mentis dexteritate, ad rerum intelligentiam adreperent, qui sapientiæ vestigiis insistentes, et maria tranarent, et in diversas orbis partes discurrerent, et longo vitæ spatio peregrinarent; qui denique quidquid potest mortalis infirmitas, totum adhiberent, ut ab silente, ac penè obluctante natura, secreta id generis extorquerent. Hi certè sunt homines, quorum opera dixeris humani generis gloriam, et ornamentum adolevisse, qui planè noverunt se homines esse, nec eatenus natos, ut fruges consumerent, ut inanibus oblectamentis consenescerent; sed ut principem sui partem inquisitione pulcherrimæ veritatis excolerent. Utinam id satis caperent adolescentes quidam, Sin autem quis requirit, quæ causa nos impulerit ut hæc litteris mandaremus, nihil est quod expedire tam facilè possimus. Nam quum otio langueremus... primum ipsius reipublicæ causa philosophiam nostris hominibus explicandam putavi, magni existimans interesse ad decus et ad laudem civitatis.... Hortata est etiam, ut me ad hæc conferrem, animi ægritudo... cujus si majorem aliquam levationem reperire potuissem, non ad hanc potissimum confugissem. Ea verò ipsa nulla ratione melius frui potui, quam si me non modò ad legendos libros, sed etiam ad totam philosophiam pertractandam dedissem.

Cicero de Nat. Deor. Lib. 1, cap. 4.

DE PHILOSOPHIÆ

VICISSITUDINIBUS

BREVIS NARRATIO.

Profectò non aliud sub cœlo est, quo certiùs, et solidiùs confirmetur, ad grandia, et sublimia natum esse hominem, quam nobilissimum desiderium, quo trahitur, impellitur, agitatur, et urgetur ad scientiam. Nullo non fuerunt tempore illustres ingenio viri, qui laudabiliter conantes, ac nulla penè intercapedine desudantes, gloria litterarum excellerent; qui per invia, per prærupta, per tenebras, una duce mentis dexteritate, ad rerum intelligentiam adreperent, qui sapientiæ vestigiis insistentes, et maria tranarent, et in diversas orbis partes discurrerent, et longo vitæ spatio peregrinarent; qui denique quidquid potest mortalis infirmitas, totum adhiberent, ut ab silente, ac penè obluctante natura, secreta id generis extorquerent. Hi certè sunt homines, quorum opera dixeris humani generis gloriam, et ornamentum adolevisse, qui planè noverunt se homines esse, nec eatenus natos, ut fruges consumerent, ut inanibus oblectamentis consenescerent; sed ut principem sui partem inquisitione pulcherrimæ veritatis excolerent. Utinam id satis caperent adolescentes quidam, qui tanto publicæ rei detrimento, tantoque humanitatis dedecore sese voluptatibus dedunt, nullo termino definentes otio, diù, noctuque, privatim, et publicè oscitantes et socordia increbili torpescentes! Utinam intelligerent, vix dignos esse hominum societate, qui, quum facilè possem, discere tamen contemnunt, quo potissimum differant ab aliis animantibus rationis expertibus, nec umquum experiri conantur, qua sint mentis magnitudine comparati! Nimirum colluctatur in homine sciendi aviditas, quam habet ingenitam à natura, cum voluptatum illecebris; et sæpè delusi falsa rerum specie, in pejora spontè prolabimur.

Neque verò tantus esse locus errori posset, si seriò et accuratè perpenderemus, quàm suaviter, quàm tranquillè, quàm jucundè vitam agunt, qui litterarum studiis immerguntur. Equidem nihil tàm vellem, quàm vos, adolescentes Mexicani, quos in hac à patrio solo distantia sæpissimè repeto memoria, quos ex animo nunc alloquor, et quorum præsertim bonum cordi mihi est, quam vos, inquam, deponere præjudicatam opinionem, quæ perperàm invaluit: quod videlicet philosophici sudores valetudini noceant, vitam brevient, morosumque reddant hominem, in humana consuetudine difficilem, pertinacem aliorum contemptorem, vanè intumescentem. Quod afflictæ valetudinis, et vitæ brevioris est, Tullius, Lucianus, et post multa sæcula Feijovius, longam contexuere clarissimorum virorum seriem, qui quum nihil interruptè in litteris ætatem po-

suissent suam, ad octogesimum annnm, ad nonagesimum, ad centesimum etiam, eoque amplius robustis viribus pervenerunt. Et plures adjicere possemus recentioris ætatis, quorum alios audivimus, alios vidimus, in his laboribus longissimè vixisse, quin nullo possit asseri fundamento, quod ipsis litterarum defatigatio jacturam valetudinis importaverit. Quod autem attinet ad vitia, quæ litteratis tamquam peculiaria maligni calumniatores objiciunt, animadvertite, adolescentes, non hæc litterarum, sed miseræ mortalitatis esse vitia. Quodnam, quæso, est vitæ genus, quodnam à Numine donum, quodnam à natura beneficium, quodnam ab amicis obsequium, quo, quum volueritis, abuti facilè non possitis? In id vestros intendite conatus, ut, quam mentem ab supremo rerum Opifice liberaliter accepistis, pro viribus perficiatis: ut veritatis indagatione thesaurum vobis nobilissimum comparetis, ut scientiarum viam, initio quidem ingratam, et spinosam, ingredientes, ad temperantem modestiam animum componatis; omninò ut prudenter, humanè, sobriè sapiatis: et polliceri non dubito, vos olim summam suavitatem in eruditis lucubrationibus gustaturos, vos ad sapientiæ fastigium concensuros, vos patriæ decus, et ornamentum futuros.

Sed ad propositum veniamus de historico philosophiæ compendio. Rectè quidem philosophiam appellavit Tullius vitæ ducem, virtutis indagatricem, vitiorum expultricem, quæ peperit urbes, quæ dissipatos homines in societatem vitæ convocavit, quæ ipsos inter se primò domicilis, deinde conjugiis, tum litterarum et vocum communione junxit, legum inventrix, magistra morum, et disciplinæ: rectè, inquam, quum ab amore sapientiæ, hominumque conatibus, ut ipsam acquirant, innumera bona humanæ societati nata sint. Neque mirum alicui debet esse, quod in hac obtinenda laude tot jam sæcula desudaverint præstantissima ingenia, quin convenire potuerint in unitate doctrinæ: sunt enim humanæ mentes ad diversam armoniam temperatæ, prout diversa sunt organa, quibus intelligunt: et quemadmodum, pulsata chorda, ceteræ consonant, quæ sint ad eundem intentæ numerum, ita vibrata humani cerebri fibra, similis vibratio respondet in aliorum cerebrorum fibris, quas rerum omnium artifex ad eundem temperavit concentum. Et hinc repetenda videtur illa plurium inter se consensio in eodem opinandi modo, et ab aliis omnimoda dissensio. Loquimur autem de iis ingeniis, quæ serio veritatem inquirunt, nec ultrò sese obcæcant, et voluntaria caligine involvunt: nam si errorem, in quem semel prolapsus es, totis tenere viribus obstinaveris; aut si partium favore subscripseris doctrinæ, quantumvis absurdam manifestissimè videas, longè admodum semper eris à vera philosophia, nec unquam in sapientibus numeraberis.

Sapientiæ quidem amor ab exordio fuit mundi, et primum philosophum dixeris primum hominem, qui justus prodiit è Creatoris

manu nec propterea circumvolutus mentis tenebris, quibus ab originis peccato deturpati sunt posteri: nescivit ille infantiam, vixque natus adultam sensit rationem. Libenter supersedemus ab inutili quæstione: quò pervenerit Adami philosophia? quas habuerit notiones de physico rerum ordine? quò processerit in logicis, metaphysicis, ethicis et politicis? Id enimverò certum est, quod confestim ab ortu constitutus est universi terrarum orbis Princeps, et Dominus; nec dignum esse supremi Auctoris providentia videtur, hominem, cui primas in creatione liberaliter detulit, et à qua sui generis notitiam derivaret posteritas, vel non excellere mentis acie, vel eam incultam desidiosè relinquere. Solet quidem Deus imbecilles administratores immitere, ut in criminosum populum animadvertat: sed non fuerant ante Adamum homines, qui peccarent. Ille certè tam animantia, quam plantas, et cetera suæ potestati subjecta, nomine quodque appellavit suo: in quo quidem munere tam sapientem, et naturæ peritum se probavit, ut in Cratylo suo fidenter asseruerit Plato, prima rerum nomina mirabiliter exprimere ipsarum rerum virtutes, nec appellari tam proprie res potuisse, nisi appellantis mentem regeret divina sapientia. Non audemus cum iis convenire, qui tantum extollunt primi hominis philosophiam ut planè judicent, ad similem postea pervenisse neminem; sed ab eo certò notiones acceperunt hæreditate posteri, quas multiplicatis postea sudoribus propagarunt; et sin minus omnes, utique plures philophiæ ramos jam ante diluvium perfecerant. Hæc autem doctrinarum studia non omninò perisse dicenda sunt in hac aquarum inundatione, qua totus ferè orbis interiit; sed qui supernatantis arcæ beneficio Noemum, ejusque filios à communi naufragio liberavit, in iis humani generis reliquiis conservari voluit, magnam saltem ex parte, acquisitam ante hæc tempora philosophiam.

Noemus igitur, qui sex tota sæcula vixerat ante fatalem illam criminosi hominis ruinam; ultra tercentos adhuc annos in orbe instaurato, et aquis repurgato vivens, facilè perpetuavit lumina de supremo rerum Domino, de prima humanæ gentis origine, de cœlorum, terrarumque fabrica, et plura id generis, quæ vel ad physicum ordinem, vel ad rationis usum, et perfectionem, vel ad artium industriam spectantia, tum ab aliis didicerat, tum suis ipse observationibus adinvenerat. Sedem sibi commorationis elegit Chaldaicas regiones, ubi ejus filii, nepotesque rapidissimè propagati sunt, in immensum crescentes populum; et post absurdos conatus extollendi turrim ad sydera, linguarum confusione puniti sunt, ac per diversas orbis partes disseminati. Atque ita quidem per universas ferè terras detulerunt pretiosissimum notionum thesaurum, quas à Noemo derivaverant. Sed non ubilibet æquè profundas egit philosophia radices, quinimò labente tempore, tam adolevit ignorantia, ut, si Chaldæam exceperis non alibi remanere visa sint, nisi deformia commenta, quasi vestigia

quidem veritatis ab antiqua Noemi doctrina, quam hominum somnia turpissimè adulteraverant. Quidquid alii decertaverint de sapientiæ primatu in notionibus, num Ægyptiorum Sacerdotes, num Persarum Magi, num Indorum Gymnosophistæ, num Gallorum Druides, primi philosophiam tradiderint; nos quidem libenter subscribimus Tullio dicenti: *Suntque Chaldæi antiquissimum Doctorum genus.* Et quidem Berosus asserit, Chaldæum quemdam remotissimis vivisse temporibus, à quo prima fuerunt Astronomiæ lumina. Flavius autem Josephus affirmatè propugnat, Chaldæum hunc fuisse Abrahamum, qui et suis peregrinationibus per Phœnices, Ægyptiosque, primus ad eas regiones intulit arithmeticam, et astronomicam scientiam. In hac sententia conveniunt Eupolemus, Eusebius, et Augustinus, qui duodevicessimo libro de Civitate Dei palam inficiatur, coli ab Ægyptiis philosophiam ante Abrahamum cœpisse. Scientias verò, quarum donum habuit Ægyptus ab hoc Hebricæ gentis Parente, post annos plures instauravit, et mirificè propagavit ejusdem pronepos Josephus, quo tempore in Ægyptiis prima post Regem fuit potestate: à quo sanè beneficio Ministro traditam iis gentibus geometricam doctrinam, in laudato Flavio comperimus. Ægyptiis postea litteris eruditus fuit Moses, non quidem inanibus illis, quæ dæmonum invocatione, infandisque incantationibus constabat; sed quas ab hebraicis Magistris quum primum audiissent, institutis ipsi defatigationibus perfecerunt. Hunc enimverò Dei populi Ducem oppidò excelluisse mentis claritudine, miramque habuisse tum naturæ cognitionem, tum scribendi elegantiam, et sublimè cogitandi facultatem, extra omnem dubitationis aleam erit Divinos legenti libros, qui ab ejus calamo sunt.

Per eadem ferè tempora vixisse creditur Jobbus, cujus nomine inscriptum legimus Codicem in Divinis annumeratum. Contendunt quidem eruditi, quonam ille prodierit auctore, num Mose, num Jobbo ipso, num fortè alio, cujus nomen injuria temporum interierit. Sed pro re nostra parum refert, auctorem non noscere; quum in eo libro, et plura certè signa sint remotissimæ antiquitatis, et poesim perspicuè legamus, non quidem ligatam numeris, in qua tamen elucet profunda morum philosophia, erudita mundanæ fabricæ cognitio, mira stili sublimitas, robustissima gravitas, pulcherrima imaginum efficacia, eaque dicendi vis, ac nobilitas, quibus Homeri, et Virgilii nomina tam clara fuere posteritati. Floruerunt postmodum in Hebræis Doctores, qui Mosi successerunt, ajusque philosophiam perpetuarunt: in iis autem excelluere David, et Salomon; David quidem à famosis carminibus, in quibus ea supereminet verborum, et sententiarum vis, ac majestas tam certa, et profunda cordis humani scientia, mundanæque machinæ tam sublimis cognitio, ut nationes omnes communi suffragio dixerint, ab auctore sapientissimo hæc fuise poemata. Salomoni autem facilè primum conceditur nomen in illustrissimis toto orbe

philosophis, qui nimirum et Proverbia, et Ecclessiastem, et Cantica Canticorum, uberrimos mirificæ doctrinæ fontes, conscripsit; et alia plura sapientiæ monumenta reliquerat posteris, quorum magna pars incendio periit Ezechiæ Regis ætate, in quibus de plantis omnibus, de terræ bestiis, de cœli volucribus, de reptantibus, de piscibus, quorum omnium novit naturam, et propietates, disseruisse intelligimus.

De celebrioribus quidem philosophis, qui floruerunt ad Ægyptios, ad Phœnices, ad Persas, ad Indos, ad Atlanticos, ad Thraces, ad Gallos, immensam operam posuere critici, ut opiniones conciliarent tàm de Mundi ætate, qua vixerunt, quàm de doctrinis, quas singuli tradiderunt. Utique liquidum videtur, ab antiquissimis temporibus veneratione prosecutos philosophiam Ægyptios, qui ex philosophorum numero Sacerdotes, Regem et Sacerdotibus eligebant. Ita pervenit ad Ægyptium regnum, quod et summoperè decoravit, Crismegistus ille, in Sacerdotum collegio summus, clarissimus in philosophis. Et nemo certè denegavit Ægyptiis hanc gloriam, quod ad eosdem contenderint Solon, Thales, Pythagoras, Democritus, Plato, idque generis præclarissima ingenia, ut in famosiori tunc temporis fonte bibentes, doctrinarum thesaurum attingerent. Laudantur ab Lucano Phænices, quod litteras primi excogitaverint; et à Plinio, quod navigandi artem invenerint, quæ si minus comprobant Phœnicum philosophiam, ad eos profectò, quemadmodum ad Ægyptios, ibant Græci scientiarum, et artium avidissimi, ut in earumdem perficerentur notionibus. De Persiæ Magorum sapientia, deque ipsorum principe Zoroastro narrantur innumera; sed quæ non modicis intermixta fabulis, libenter prætermittimus; quamquam planè fatendum sit, philosophiam coluisse Persas, ad quos etiam exteri hac de causa peregrinabantur. Indorum Gymnosophistæ magnum sapientiæ nomen sibi compararunt, quos et Pythagoras, et Democritus et Anaxarchus, et alii prima dignitate philosophi, audiere discipuli. Triginta septem annos consumebant Gymnosophistæ in placida solitudine, ac litterarum otio, nec ante confectum hoc privati recessus, et studiorum curriculum, ad docendi munus evehebantur. Cum laude memorat Augustinus Atlanticos, quibus fuit nomen ab Atlante Mauritaniæ Rege, quem ferunt oppido famosum tàm ab assidua cœlorum contemplatione, quàm ab sphæræ illius inventione, qua siderum motus describuntur. Et Virgilius, et Plinius eumdem extollunt ab astronomicis cognitionibus. A Zamolxi, et Orphæo Thracibus jactabat Thracia philosophorum suorum antiquitatem, et sapientiæ culturam. Gallorum Druides, quorum opera cives illi ad mentis, et religionis disciplinas erudiebantur, apertè commemorant Aristoteles, Cæsar, Strabo, Tullius, et Ammianus Marcelinus, eorumque prædicatur doctrina, et excellentia tàm in scientiis profanis, quàm in religiosa et morali.

Sed hactenus dictum est de remotissimorum

temporum philosophia; quam idcirco rapidissima festinatione percurrimus, quia, si divinos libros exceperis, per pauca supersunt earum ætatum monumenta quibus inniti possit historicus libero ab erroribus calamo. Antiquissima est Græcia, cujus philosophi sapientiam suam innumeris profusam libris posteritati reliquerunt. Græcia profectò novum philosophiæ splendorem attulit, ut ferè dici possit philosophorum seminarium; non enim, ut ad eam ætatem alibi, dumtaxat unus, alterve fuere, qui diversis prespersi religionibus, lentos fecerint, quamquam felices, conatus; et suorum scriptorum auxilio, bonoque ingenii nomine philosophiam extulerint, et communicaverint quidem non mediocria lumina, sed instar fulguris rapida, et brevi peritura. Singulare videtur à cœlo habuisse Græcia privilegium, ut longa seculorum serie generaret, aleret, conformaretque ingentem sapientum copiam, quam fermè dixeris philosophorum nationem, qui totis essent viribus in veritatis inquisitione, qui majorum notiones indefessis laboribus adaugerent, qui sapientiam comparaturi nihil dubitarent, et tranquillum otium et paterna bona, et charos cives, et dulcissimam patriam deserere, qui profundè cogitando, arcana rimando, naturam contemplando, eventus eventibus, conferendo, contemptis rebus ceteris, incanescerent. Antiquitate primum in his doctissimis Græcis Thaletem appellamus, qui mirabili donatus ingenii facilitate, summaque flagrans cupidine ad scientiarum fastigium perveniendi, nihil gravatus est ad Cretenses, Phœnices, Ægyptiosque inter arripere, ubi consummatos audivit astronomiæ, geometriæ, aliarumque partium philosophiæ Doctores; ac parvo tempore discipulus cum fœnore Magistris reddidit, quod bonum acceperat; ipsosque docuit rationem excelsas Ægypti pyramides ad certissimum calculum dimetiendi. Bona tandem Græcorum fortuna Thales in patriam restitutus est, ubi summis ardoribus deditus naturæ studio, in tranquilla solitudine conclusus, nec omninò patens nisi volentibus ab eo derivare philosophica lumina, Mileti primus instituit scholam publico civium emolumento; quam Jonicam, et omnium antiquissimam nuncupant eruditi. Vita functus est Thales nonagesimo secundo ætatis anno, et post eum nulla jam intercapedine, floruere in Græcis famoso nomine philosophi; atque institutam scholam Anaximander, Anaximenes, Anaxagoras, Archelaus, Socrates, aliique summi viri administrarunt.

Socrates autem, qui Mileto Athenas ab Anaxagora translatam scholam ad honoris culmen perduxit, et patriæ nomen illustrissimum reddidit; docendi rationem non modicè immutavit, et quod ajebat Tullius, *primus philosophiam devocavit è cælo et in urbibus collocavit, et in domos etiam introduxit, et coegit de vita, et moribus, rebusque bonis, et males quærere.* Ille quidem arte cælandi admodum excelluit, ac Diogenis Laertii ætate manebant athenis Gratiarum statuæ, quas inculpserat Socrates. Excelluit pariter eloquentiæ robore, quam tantoderè formidarunt Athenarum tyranni, ut interdictum ei fuerit, ne rhetoricam Ateniensibus traderet. Excelluit demum, quod in Platone sepè legimus, tàm geometricis, quàm astronomicis, aliisque sublimibus doctrinis, in quas ea ætate sapientes animum intendebant. Sed mirifica natus gravitate, atque hominum cognitione supereminens, potissimos exeruit conatus, non tám ut mentem, quàm ut animum cives excolerent. Morum itaque scientiam et præceptis et exemplis traddere præcipuum fuit Socratis ad plures annos magisterium. Iniquorum judicium sententiam morti traditus, intrepido conspexit ore fatalem horam, et vitam posuit ætatis anno septuagesimo.

Post hunc insignem Doctorem innumeros vidit Græcia summæ celebritatis philosophos, quorum plures, ut humana inter se discrepant ingenia, in varias ivere sententias, et scholas diversi nominis condidere, *quam tamen*, ut ait Tullius, *omnes se philosophi Socraticos, et dici vellem, et esse arbitrarentur.* Ne verò in immensum abeat hoc historicum compendium, liceat hic raptim memorare scholas, Cyrenaicam, Megaricam, Eliacam, et Eretricam, quæ tametsi Aristippum, Euclidem, Phædonem, et Menedemum, præclaræ mentis auctores habuerint, parvo tamen in honore fuerunt posteritati. Longè celebriùs comparaverunt sibi nomen academici, qui Platonem, Socrati charissimum in primis discipulum, ejusque sapientiæ propiorem, audierunt Magistrum. Ingenio quidem ille facili, profundo, robusto, et ad grandia conformato natus, ita eminere cœpit à teneris dicendi genere, ut eum ab eloquentia suavissima dulcedine apim atticam appellaverint, et Socrates ipse, scholæ cygnum. In grammaticis, musicis, poesis et pictura primam cum summa laude posuit adolescentiam, et vicessimo ætatis anno ad Socratis auditores annumeratus, vix elapsum fuerat lustrum, jam in sapientibus primi nominis habebatur. Postquam invidi cives mortem Socrati maturarunt veneno, eruditis expeditionibus Plato vacavit, primum ad Megarenses, indè ad Cyrenaicos, ubi sub Theodoro, mathematicis disciplinis consummato Magistro, totis conatibus desudavit ut nihil sibi deese in hac nobilissima philosophiæ parte videtur. A Cyrenaicis transmigravit in Ægyptios, quorum sapientum, eo jam rerum suarum statu discipulus esse non erubuit; ab iisque plura dogmata, variumque scientiarum doctrinas avidissimè derivavit; ibidemque loci, ut fertur, Mosaicos codices, aliorumque sacrorum autorum vaticinia novit, ac didicit magnifacere. Percurrit etiam per eam Italiæ partem, quæ magna Grecia dicebatur, ut ibi cum Philolao, Archita, et Eurito celebri nomine Pythagoricis consilia communicaret, ac sese invicem doctrinarum notionibus illustrarent. Semel, iterum, tertiò, sæpius vocatus ad Dionysium juniorem, Syracusæ dominantem, ad Siculos tandem profectus est; undè tamem post aliquod temporis intervallum exiit, eo confectus dolore, quod ingentes perdidisset conatus, nec omnino potuisset hominem relinquere, quem tyrannum invenerat. Ad suos demum redditus, publicus

Magister, nullo quidem pretio, professus est philosophiam, cujus partibus miro digestis ordine harmonicèque dispositis, Heraclito subscripsit in physicis, Pythagoræ in metaphisicis, in moralibus autem Socrati. In politicis etiam prudentissimè constituendis, et ratiocinandi arte perficienda, felicissimè adlaboravit. Quam plura de his omnibus monumenta supersunt in ejus operibus, quæ tum ab stili elegantia, tum à verborum propietate, tum ab ratiocinandi efficacia, tum præsertim ab sententiarum splendore, ac nobilissima excogitandi ratione maximoperè laudantur. Neque verò est animus, immunem ab erroribus prædicare Platonem, sed certè fuit insigni merito philosophus, princeps academiæ scholæ, sic appellatæ ab horto, quem ipsi pro ludo litterario pecuniosus Atheniensis, nomine Academus, concessit. Altero, et octogesimo ætatis anno mortalitatem Plato deposuit, relicto in patria sui desiderio, et sapientissimi viri nomem tributum illi est, adque ad posteros perpetuatum.

In binas discissi sunt scholas ejusdem discipuli, quorum alteri ad Lyceum traslati, Peripatetici dicti sunt, Aristotele preside, quem postea memorabimus; alteri locum, et nomen Academiæ retinuerunt. In iis fuere Speusippus, Xenocrates, Polemon, Crates, et Crantor, qui Platoni succedentes, unus ex alio nihil ferè immutarunt in Principis Academiæ doctrina; nisi quod Xenocrates pauca immiscuit ab Aristotele desumpta. Et fuit Xenocrates castigatissima vita, integritate mirabili, certissima prudentia in conformandis adolescentium moribus, et summa solitudinis, ac defatigationis in studiis cupidine, in qua laboriosissimæ vitæ serie ad ætatis annum secundum et octogesimum pervenit. Arcesilas autem in Magisterium aliquandò suffectus, á Platone defecit, et quasi novam condidit Academiam, quam postmodum dixere mediam. Et hic est de quo pulchrè Tullius: „Ut in optima Republica Tiberius Graccus, qui otium pertubaret, sic Arcesilas, qui constitutam philosophiam everteret." Enimverò ingenii claritudine, perspicuisque naturæ dotibus, quibus admodum excelluit, perperàm suus est ad constabiliendum dogma de omnimoda humanæ mentis ignorantia: nihil enim, ajebat, scimus, nihil scire possumus; nec etiam, quod unum Soctates excipiebat, nimirum *se nihil scire:* quo sanè dogmate, non aliud fortassè absurdius, nec aut rationi magis dissonum, aut moribus magis periculosum philosophi excogitarunt. Quam aliam animi demissionem sectantur, qui catholicè sapiunt! Et tamen sectatores habuit Arcesilas, eamdemque post eum doctrinam Lacydes, Evander, et Egesimus tradiderunt. Quartus ab Arcesila rexit Ateniensem hanc scholam Carneades, qui recentioris Academiæ Princeps idcirco appellatur; quia paullulum temperavit absurda doctrinæ: non enim, ut Academici medi, veritatem omnem inficiebatur; sed acriter propugnabat, tàm obscuris involuta esse tenebris, quæcumque vera sunt, ut humanæ mentis non sit veritatem attingere; quamquam plura noscantur probabilia, quorum visu

Insigni, et illustri, ut ajebat Tullius, vita sapientis regi possit. Quàm hæc inania! quàm parum digna viro clarissimo, et qui tam avidè vacabant studiorum commentationibus, ut omnem corporis curam negligeret ac sæpè pro prandio sedens, nihil vesceretur nisi servula cibos in ejus manum, et interdum in os intromitteret! Ad annum nonagesimum operosam vitam produxit, ejusque locum occuparunt ordine Clitomacus, Philo, et Antiochus: hic autem postremus cum primum Philonis Magistri doctrinam totis viribus defendisset, acriter postea in eamdem insurrexit, et Academiam veterem instauravit. Et fuit Antiocho summa gloria, quod in suis auditoribus numeraverit illustriora Romanorum nomina, quorum erat tunc temporis consuetudo, iter arripere in Græciam, et Athenis commorari, ut ad optimum philosophiæ saporem conformarentur. Ita vidit apud se considentes, eruditionis cupidos, Varronem, quem Romanorum dixere sapientissimum, Lucullum quem magnificentissimum, et Tullium, quem elocuentissimum. Et ab his Romanis peregrinantibns, et à Polybio, Panætio, Carneade, Philone, Antiocho, aliisque doctissimis Grecis, qui diversis temporibus Romæ commorati sunt, utraque Græcorum Academia, et philosophica lumina, ut suo dicemus loco, per universum Romanorum Imperium diseminata sunt.

Altera schola, quam diximus à Platonis natam discipulis, Peripatetica dicta est, et principem coluit Aristotelem. Et fuit hic ex iis viris illustrissimis, utraque parte famosis, in quos innumeræ laudes, innumera pariter mala congesta sunt. Mediam teneamus viam, quæ solet esse ab scopulis remotior. Natus Aristoteles ingenio certè vastissimo, fœcundissimo, et facilitate ad omnia mirabili, singularem prorsus, et penè incredibilem in studio constantiam adjunxit. Ætatis anno decimoseptimo ad Platonis discipulos cooptatus, quatuor tota lustra sub tanto duravit Magistro, qui et ipsum Academiæ suæ gloriam, et animam appellabat. Platone vitâ functo, apud Hermiam in Mysia commorantem secessit; undè post annos aliquot à Philippo Macedoniæ Rege vocatus, et Magni Alexandri præceptor dictus est. Charissimus tanto Principi, cujus mentem, et mores diligentissimè conformavit, noluit postea, jam Regem, ad belli strepitus proficiscentem, comitari. Quare rediens Athenas, Academiæ preceptore Xenocrate, alteram instituit in Lyceo scholam, quam à verbo græco dixere Peripateticam, quoniam obambulans docere solitus est Aristoteles. Mirabilem reliquit scriptorum copiam, quæ ad Tullii et Quintiliani etiam ætatem videntur, magna saltem ex parte, genuina pervenisse. Tullius quidem in suis philosophicis libris, non semel aut iterum, sed sæpius, et penè ad fastidium, perfundit laudes huic sapienti, cujus appellat ingenium propè divinum, eloquentiam nervosissimam, flumen orationis aureum, stilum limpidum, et perspicuum, cujus philosophiam omnino singularem fateretur; quem rationis et inveniendi, et judicandi prin-

cipem, dicit; quo denique doctiorem, acutiorem, in rebus vel inveniendis, vel judicandis acriorem, palàm testatur fuisse neminem. Quintilianus autem, prudentissimo vir judicio, asserere non grabatus est, nescire se, quid magis in Aristotele admiraretur, num vastam, et profundam eruditionem, num prodigio similem scriptorum copiam, num stili jucunditatem, num excelsæ mentis acumen, num operum propemodùm infinitam varietatem: et addebat, credi fermè posse, quod plura sæcula in studio posuerit, ut sapientiæ suæ vastitate comprehenderet, quidquid philosophorum, quidquid oratorum, quidquid animantium, quidquid plantarum est, quorum omnium naturam, et propietates mirabiliter extricavit. Et nos quidem putamus, multum esse tribuendum horum Romanorum judicio de sinceris tanti philosophi scriptis: quæ verò nunc dicuntur Aristotelis opera, tametsi laude non omnino careant, non tamen esse summi meriti existimant eruditi. Et liquidum profectò est, Teophrasto charo discipulo, et in Magisterio successori, Aristotelem hæreditatem reliquisse, quæcumque scripserat: hæc autem scripta procesu temporum in varias incidisse vicissitudines donec eorum exemplar et ab interpretibus, et ab librariis malè corruptum, in potestatem fortè venit Arabis Averrois, à quo fuerunt penitùs immutata, contrita, et deturpata, et qui ad libitum innumera superadjecit inania, quæ certè non fuerunt ab auctore. Quod in pluribus erraverit Aristoteles, quod immiscuerit multa parvi momenti, multa insulsa, multa prorsus inutilia, nemo certè in sapientibus mirabitur: homo enim erat, plura scripsit, innumera insecutus est, viam sibi sæpè stravit per hactenus inaccessa. Sed quod Aristoteli tribuatur, quidquid longa sæculorum serie peccarunt in philosophicis homines, qui suas delirationes ut constituerent, tanti Sapientis nomine abusi sunt, profectò non est id philosophi sanæ mentis, non est inquirentis veritatem nullo partium favore, non est judicantis ad rationis leges. Depone insanos livores, si vis esse philosophus. Utinam liceret in his diutiùs immorari!

Aristotele maturè prærepto, quum vis numerasset ætatis annum tertium et sexagessimum, succesit in Lycei magisterio vir summus, quem in suis discipulis ipse legerat, et quem à delicatissimo eloquentiæ sapore dixere Theophrastum. Magistro certè fortunatior, numeravit auditores ad duo mille, in quibus eminuere Demetrius Phalereus, et Strato. Posteratati dedit libros de plantis, de civitatum omnium legibus, de vera vitæ beatitate, de rethorica, de variis hominum *characteribus*, aliosque plures; quorum tamen pauci pervenerunt ad nos. Annos vixit saltem octoginta quinque; nec desunt, qui asseverent, ætatis anno undecentesimo scripsisse *Characteres*. Post hunc in Lyceo docuerunt Strato, summoperè commendatus à physicis rerum notionibus; Lycon, ad annos quadraginta manens in magisterio, et à dicendi suavitate Glycon appellatus; Aristo Ceus, de quo solum novimus magno fuisse nomine

in philosophicis, et Glyconi sucessisse, Critolaus quem cum Carneade, Diogeneque missum ab Atheniensibus Romam in famosa illa legatione, fuisse Tullius ait ex nobilissimis illius ætatis philosophis; et Diodorus, quem dixere Dialecticum, et postremum nominant in Licei Doctoribus, quamquam alii dicant, tam longè fuisse ab Aristotelis doctrina, ut peripateticus dici non possit. Post hæc tempora magnum fuit de Aristotele silentium, nisi quod Sylla, captis Athenis, Romam transtulit ejus opera; quorum postea variam delibabimus fortunam, cum sermo nobis erit de corrupto sapore in philosophicis disciplinis.

Principem Cynici noverunt Antisthenem, qui pretium divenditi patrimonii civibus elargitus est, ut voluntaria vivens tenuitate, Socratem audiret; à quo postea recedens, tam impudentem, tentaque mordacitate horridam fundavit scholam, ut erubescere debeat humanum genus hujusmodi homines dixissise philosophos. Non certè inficiamur, ingeniosissimum quemque, plurimisque doctrinis clarissimum posse quidem pessimis esse moribus: attamen schola, cujus unicum sit institutum, mores hominum componere, cujus vera principia certissimè jaculentur ad effrigendum pudorem, ad cor tumidum creandum, ad sui similes contemnendos; hæc, inquam, schola tam esse debet absurda, quam Scholasticorum chimæra. Dialecticam, physicam, geometriam, et præterea liberales artes repudiabant omninò Cynici, et unam profitebantur motum scientiam; quos tamen à primis doctrinæ fundamentis incredibiliter deturpabant. In præcipuis Antisthenis asseclis numerantur Diogenes, Crates, Hipparchia, et Peregrinus. Cratem audiit Zeno decem annos, totidemque alios modò Stilponem, modò Xenocratem, modò Polemonem: et planè rejecta Cynicorum impudentia, nec omninò probatis aut Megarensis, aut Academicorum doctrinis, novam Athenis condidit scholam, ejusque discipulos ab loco, ubi Magister docebat, Stoicos appellarunt. Dialecticam singulari conatu professus, acriter oppugnavit novos Academicos, verum à falso dignosci posse inficiantes. In moralibus autem hæc erat Stoicorum præcipua doctrina: Summum bonum esse virtutem: Sapientem semper esse beatum; quæ ferè naturæ bona dicuntur ab hominibus, tam non esse bona, quam dolores, cruciatus, et adversa quævis dici mala non posse; virtutes omnes esse pares, paria similiter vitia; condelescere, concupiscere, extimescere, lætitia efferri, ceterosque animi motus in sapientem virum non cadere; virtutem acceptam Deo retulisse neminem; fortunam à Deo petendam; ab se ipso sumendam esse sapientiam; Deum natura, sapientem virtutem sua non timere. Quam ampullantes delirare solent homines! Zeno certè numquam fuisse dicitur tentatus valetudine, ac feliciter pervenit ad annum duodecentesimum. Ejus gloriam cumularunt complures famosos nomine sectatores, in quibus illustrissimi fuere Leucippus, Cleanthes, Chrysippus, Diogenes babylonius, Antipater, Panetius, Posidonius,

Epictetus, Stilpo; et in Romanis Cato, Brutus, Seneca, Thraseas, Pœtus, Helvidius Priscus, et Marcus Aurelius Antoninus.

Pirrhonem omittere non licet in historia philosophiæ: non certè quia magni meriti habeatur, vel quia novum quid excogitaverit, quo notionum thesaurus adaugeretur; sed quoniam Arcesilæ dogmata de nulla veri, aut vero similis cognitione, tenacissima dementia prosecutus est; et plura de his impudenter effutiens, exemplo est philosophis, quàm simus ridiculum mundo spectaculum, quum in humanis quæstionibus, posthabita, neglecta, et penitus calcata ratione, audemus philosophari. Ajebat Pyrrho debere semper hominem inquirere veritatem; et ab hac inquisitione perpetua dixere Scepticam ejus philosophiam: sed quidquid quæsieris, addebat, quidquid operosis lucubrationibus desudaveris, nihil certi pronunciare, numquam tibi licebit asserere. Si opponeres, te videre, te cogitare, te esse, planè respondebat: equidem nescio lumen, nescio sensus, nescio mentem, nescio me esse, nihil omninò scio: id tamen, quod nesciam, non tamquam asserens, sed tamquam dubitans pronuncio. Et ab hoc æterno de omnibus dubio in pestiferam illam doctrinam Pyrro incidit, nihil esse in rerum natura vel honestum, vel turpe, nisi vel ab humana lege, vel à præjudicata opinione. Pudet certè in hæc tam inania, quam putida calamum offendere. Nonagesimo ætatis anno vitam posuit.

Fuerunt et celebri nomine philosophi Xenophanes, Democritus, et Heraclitus, Academicis antiquiores; quos non hactenus memoravimus ne primam eorum seriem, qui ab Socrate venerunt, abrumperemus: eosque tamen præterire non licet, tametsi nulli prorsus adhæserint Magistro, nec multitudine discipulorum admodum floruerint. Xenophanes Colophonius, in astronomicis oppidò versatus, plures esse mundos propugnavit; physica diligenter persecutus, de iis, quæ in sublimi aeris parte generantur, tractavit: in poetis etiam clarus, celebrato poemate Colophonem laudavit. Democritus patriâ Milesius, quem ab longa in Abderitis commoratione Abderitam dixerunt, natus est ingenio feracissimo, et studiorum defatigationis tam fuit tenaciter avidus, ut liberiùs, et ab omni strepitu remotius commentandi gratia, sese in subterraneis locis occuleret. Patrimonium negligere, agrosque suos deserere incultos nihil dubitavit, ut scientiam quæreret in Ægyptis, Caldeis, et Persis. Abderæ postea domicilium fixit, ibique librum edidit, in quo mundi fabricam eruditè descripserat: quem librum tam probarunt Sapientes urbis, ut statuam publicè dicandam auctori decreverint. Tam morali doctrina, quam physicis, mathematicis, astronomicis, politioribus litteris, et liberalibus artibus excelluit: à qua scientiarum vastitate Aulus Gellius Democritum philosophorum nobillissimum appellavit. Post vitam eleganter actam in philosophico risu de inanibus hominum curis, de vulgi gaudiis, et lacrymis, decessit ætatis anno supra centesimum

nono. Sed ne quid desit in historia mortalium, ut ridebat ferè semper Democritus, ita ferè semper illacrymabatur Heraclitus. Hunc Ephesi natum, ingenio ad tetra quævis maximoperè prono, tenebricosum dixere philosophum ab summa stili obscuritate. Plurium fuit auctor operum, inter quæ celeberrimum illud habebatur, cujus erat inscriptio *de Natura*; in quo tamquam compendio, dedit posteris philosophiam suam de igne mundi principio, ac de ipso mundo flammis perituro. Librum hunc Euripides cum immisisset Socrati, respondisse fertur gravissimus iste philosophus: valde probari sibi, quæ capere potuerat; et ab iis credere, laudabilia pariter esse, quæ non intellexerat. Eumdem librum Darius Persarum Rex quum legisset, ita magnifecit auctorem, ut elegantissimas literas ad eum dederit, ipsumque beneficiis, et honoribus cumulandum in suam Regiam invitaverit. Negavit Heraclitus, convenire sibi commercium cum hominibus, in quibus improbitas, dolus, avaritia regnabant. Potuisset torvus Philosophus officium Principis recusare, sed modestioribus, et urbanioribus verbis. Ab hoc libro *de Natura* Plato desumpsit, quæ de physicis multa tractavit. Hydrope laboravit Heraclitus, et sexagesimo ætatis anno fatalem horam subiit, seriùs fortassè, quàm polliceri poterat morosissimum ejus ingenium, odiumque in homines, quo gratis consumebatur.

Non plures admodum numerabat annos Jonica schola, quum Thales, quem ejusdem conditorem demonstravimus, auctor fuit Pythagoræ, tunc ætate florido, ut ad Ægyptios peragraret, in illis exculturus, et perfecturus mentem omninò natam ad philosophica. Nihil distulit juvenis obedire sapienti seni, et totos annos viginti duos commoratus est in Ægypto, litteras dumtaxat cogitans, assiduus ad Sacerdotum Collegia nunc Memphi, nunc Thebis, nunc Heliopoli. Duodecim etiam annos posuit Babylone, à Magis eruditionem hausturus; et ab his ad Æthiopes, ad Arabes, ad Indos, ad Cretenses transivit, ubilibet sapientiam quærens, undelibet desumens quidquid utile arbitrabatur ad excelsam philosophiæ fabricam, quam animo cogitabat. Assiduo tot Sapientum commercio quum mentem, natura clarissimam, mirabiliter illustrasset, pretiosa refertus merce in patriam rediit, quæ Samus erat, Icarii maris insula; quam tamen post modicum deseruit tyrannidis impatiens, quam ibi gentium agebat Polycrates. Bona Italorum fortuna in eam Italiæ partem se recepit, quæ magna Græcia dicebatur, et Crotone domicilium fixit apud Milonem athletam, ubi celeberrimam instituit scholam, quam Italicam nuncuparunt. Primus fuit Pythagoras, cui visum est fastosum admodum, superlatum, et planè superbum sapientis nomen, quod sibi tribuebant, qui vel castigato vivendi genere, vel naturæ notionibus eminebant; undè se modestiùs appellavit philosophum, quod græcè sonat sapientiæ cupidum; et hoc postmodum nomen in quærentibus veritatem invaluit. Brevi disseminata est per universam Italiam tanti Magistri fama, numeravitque discipulos pauco tempore ferè quingentos. Accuratissimam adhibebat diligentiam in iis ad rectos mores conformandis, et tacitus observabat eorum sermones, risum, incessum, et quidquid ad privatæ vitæ consuetudinem attinet; ut ad uniuscujusque naturam prudentiùs dispensaret præcepta. Quam hæc digna sunt homine, cujus in officiis est alienos mores ad virtutem componere? Discipulis præcipiebat, ad biennium saltem silere; ut audiendi exercitatione rectè loqui condiscerent; ii autem, quos loquaciores animadverteret, ad totum quinquennium protrahebat silentium. Auctoritatem apud eosdem tantam sibi conciliabit, quanta ferè potest esse in mortalibus; et sententiæ cuilibet ut subscriberent, unum satis erat dixisse Pythagoram. Si Justino, Senecæ, ac Valerio Maximo fidem habeamus, quotquot incolebant Crotonem, Magistrum hunc audiebant in moralibus, ejusdemque præceptis tam aliam sese tota civitas demirata est, ut quos in adventu suo cives reperirit deliciis, et voluptatibus indulgentes, ad mirum frugalitatis usum revocaverit. Seorsum à viris fœminas, puerosque seorsum à parentibus erudiebat, ut peculiaria sexus, ætatisque vitia liberiùs increparet; nec aut hi parentum, illæ virorum conspectum formidarent, aut alteri tempus frustra consumerent, in iis audiendis, quæ sua non attinent. Nec dumtaxat Crotone in redigendis ad meliorem frugem civibus intendebat; sed ab aliis etiam Italiæ urbibus vocatus, et multis precibus conquisitus, non recusabat operosis expeditionibus vacare, ut ad rationes legem vivere mortales doceret: ac præter alia saluberrima præcepta, ubique audiebatur exclamare, bellum dumtaxat inferendum perniciosis quinque hostibus, quos ita designabat, corporis agritudinem, mentis ignorantiam, incompositos animi motus, populorum seditiones, familiarum discordias. Hæc, et similia de morum doctrina tàm privatim ad discipulos, quàm per urbes publicè profundebat: intra domesticos autem scholæ parietes multis contendebat sudoribus, ut mentes auditorum excoleret. Arithmeticam; et geometriam existimabat ille scientias omninò necessarias, ut justum in omnibus ordinem sequi assuescerent ingenia juvenum, et ad sublimiorum studia compararentur. In musicam pariter volebat incumbere suos, et, quod meminit Quintilianus, animos ad lyram excitare, dum evigilassent; quum autem somnum peterent, ad eamdem se componere, si quid interdiù fuisset turbidiorum cogitationum. Quæcumque sunt in orbe phænomena, sic explicabat, ut procederent à mente suprema, quæ dirigit, et vim motricem, et materiem nihil intelligentem, et cui natura sua nec ullus motus est, nec ulla forma. Mentem illam supremam asserebat esse universi orbis animum, ejusque particulas humanos animos. Mirum statuebat consensum inter omnes mundanæ fabricæ partes, et mundum ipsum harmonicè concinentem. Transmigrare dixit animos à primo in alterum, tertium, et plura corpora: de quo ridiculo transitu tam insulsa narrabat, ut jurè Lactantius eum appellaverit vanum senem, qui

sibi tam petulanter metiendi licentiam vindicavit. Quem non erronem excogitavere philosophi, etiam doctissimi, quum sobriè sapere neglexerunt! Rotundam esse Terram, et esse Antipodas propugnavit. Primus omnium agnovit, obliquam esse illam in cœlo Zonam, quam Zodiacum appellamus; ut primus dicitur perfectam habuisse notionem viæ, quæ toto anni spatio describitur à globo se movente. Omninò demostravit, opacum corpus esse Lunam, cui lumen non est, nisi ab sole derivatum; cælestem arcum non aliud esse, nisi lucem ab recta linea deflectentem; Venerem, planetam illum, qui vespere Solem subsequens, Vesper dicitur, eumdem esse Luciferum, qui manè Solem antegreditur. Et super hæc, aliaque Pythagoræ adinventa Physici, et Astrologi faciliùs postea in lucubrationibus id generis laborarunt. Geometria pariter adaucta est non modicè ab hoc insigni philosopho, qui primus demonstravit famosum illud problema, hypothenusæ quadratum in triangulo rectangulo, æquale haberi summæ quadratorum ex binis cathetis. Cujus demonstrationis utilitatem in mathematicis planè intelligens, grato in Deos animo litasse dicitur hecatombem; vel saltem, quod in Tullio legimus, bovem. Quodcumque autem dicatur fuisse sacrificium, videtur prorsus alienum ab homine, qui nihil tam horrebat, quam interfici animantia; et vesci carnibus, ea de causa discipulis interdixerat. Non liquidò constat quo loco ac tempore illustrissimus hic philosophus vivere desierit, sed ferè creditur, tranquillè obiisse anno ætatis completo nonagesimo.

Pythagoræ memoriam summis plausibus excepit posteritas: et præter eximiam discipulorum reverentiam, quæ tum in schola, quam ipsi instituerant, tum in famosioribus Romanæ Reipublicæ litteratis ad longissimam annorum seriem perpetuò florida viguit, etiam à Flavio Josepho, à Clemente Alexandrino, ab Ambrosio Mediolanensi Pontifice, à Theodoreto, ab aliisque posterioris ævi sapientibus, philosophum hunc magnificis laudibus cumulatum comperimus. Non certè quod vel animos transmigrare in nova corpora, vel auræ Divinæ particulas esse, vel alia id furfuris commenta catholici Doctores probaverint; sed quia vel, demptis erroribus, laudarunt auctorem ceterà doctissimum, et benè de philosophia meritum; vel quia quum ageretur de homine, qui morum præcepta sæpè tradebat per obscurissima ænigmata, doctrinas ejus, etiam quæ sonant errorem, excogitato quodam recto sensu posse intelligi crediderunt. Similiter dixeris de pluribus Ecclesiæ Patribus, vel Platonis, vel Aristotelis doctrinam, et magisterium extollentibus. In asseclis Pytagoræ nomen habuit celeberrimum Agrigentinus Empedocles, quem alii dicunt ejus discipulum: Suidas verò tradit, Empedoclem ab Academico Parmenide transiisse ad Telaugem Pythagoræ filium, et in Crotoniensi schola successorem. Pro civium emendandis moribus, et pacandis intestinis urbis tumultibus, incredibiliter adlaboravit; nec pepercisse dicitur aut conatibus, aut sudoribus, aut enixis precibus, aut

liberalibus donis, ut Agrigenti faceret, quod Crotone Pythagoras. Philosophus, poeta, historicus, medicus, et in omnibus his laudibus admodum superiminens, ad plures doctrinarum ramos magisterium suum extendebat. Tam beneficum, et sapientem civem sexagesimo ætatis anno vita functum Agrigenti lacrymati sunt.

Postremum memoramus in Græcis Doctoribus Epicurum, Gargetti natum in Attica, et Sami educatum; cui doctrina Pythagoræ præ-Platonica, et Aristotelica quum placuisset, ad ætatis annum trigesimum sextum perpetuò peregrinatus est; donec restitutus in Græciam, Athenas elegit, ubi novæ scholæ Princeps in quodam horto philosophiam suam disseminaret. Innumeræ confluxe gentes ex tota Græcia, ut ex Asia, et Ægipto peregrini, qui Epicurum audirent. Nemo fuit eo solertior in scholarum Principibus, nemo laboriosior, nemo, qui plura scripserit, nemo, cujus asseclarum tanta prædicetur constantia in Magistri veneratione. Rethoricam neglexit, dialecticam planè contempsit: harum autem scientiarum vice commendabat perspicuitatem, et ordinem; easque laudes, Tullio si credimus, ipse profectò in scribendo assecutus est. Ex tot ejus operibus ad nostram ætatem dumtaxat pervenerunt tres epistolæ, quas in ejusdem vita Diogenes Laertius ab injuria temporum vindicavit: quarum prima compendio persequitur, quæ de physicis; altera singillatim, quæ de meteoris; tertia, quæ de morum scientia philosophus iste tradidit. Leucipii, et Democriti doctrinam de universo mundo ex atomis fortuitò adhærentibus conformato, miris conatibus adoptavit Epicurus: hoc tamen discrimine, quod atomos dixit, ut corporis est natura, suo deorsum pondere ad lineam deduci; non quidem omninò ad lineam, sed minimo declinantes intervallo, quantum satis est, ut ex earumdem complexionibus, et copulationibus, nulla data causa contingentibus, quidquid tam mirabile cernitur in universa rerum fabrica, efficeretur. Omnes corporis sensus tam veri nuntios asserebat, ut Soli, et Lunæ tribueret eam ferè magnitudinem, qua videntur esse nostris oculis. Animum hominis volebat esse materiam: aliter enim, ajebat, nec agere posset, nec sentire. Deum sibi finxit, æternum quidem illum, et beatum; sed otiosum, desidem, atque ita vacantem beatitati suæ, ut omnino nihil curet, quæ aguntur in mortalibus. Extremum hominis bonum propugnavit in voluptate situm esse. Nec ignoramus perniciosum hoc, et absurdis uberrimum dogma, benignè fuisse à compluribus explicatum: nam præter Divum Hieronymum, qui multis laudibus effert Epicuri temperantiam, Stoicus etiam Seneca magnifecit ejusdem præcepta; et post multa sæcula dixit Petrus Gassendus, clarissimo vir ingenio: "Quod » ad mores attinet, Epicurum maximè et so» brium, et continentem extitisse, ac sectam nul» lam philosophorum illius secta fuisse sanctio» rem." Unde ferè interpretantur, non vitiosam sensuum, sed purissimam, et sanctissimam animi voluptatem Epicurum intellexisse. At Tullius Epicureos urgebat, nec ii negare in dispu-

tatione ausi sunt, eorumdem magistrum testificatum fuisse: "Ne intelligere quidem se posse » ubi sit, aut quid sit ullum bonum præter illud, » quod cibo, aut potione, et aurium delectatio» ne, et obscœna voluptate capiatur." Satis hæc pauca sint de hortulis Epicuri, quorum esse posset amplissimum argumentum; sed non est historici compendii singula philosophorum dogmata minutatim evolvere.

Hactenus de Græcis aliisque Sapientibus, qui Græcos hac laude antecesserunt; brevissimè nunc de Romanis, qui longo tempore nescierunt pulcherrimæ philosophiæ delinimenta, et illecebras; imò conantem illam irrepere in Reipublicæ sinum, interposita vi repulerunt, eique fores incondita rusticitate occluserunt. Nimirum homines, qui sine litteris ad canos pervenerant, et quorum tota fuerat in armorum strepitu gloria, expalluerunt ad sapientiæ veneres, timueruntque Reipublicæ, si litterarum studio rapti, et immersi juvenes, arma contemneret. Quasi laurus, et oliva non possent eamdem frontem ornare, ac circumcingere. Nulla quidem est immortalibus vitæ conditio, cui litteræ non sint utilitati, et adjumento. Et profectò nihil potuit Romani Senatus decretum impedire, quominus primò clanculum, indè palam cives philosophiam persequerentur, et processu temporum ad græcæ philosophiæ fastigium, Athenarum æmula, Roma consurgeret. Paulus Æmilius ex nobilissimis Romanorum familiis, qui post domitos bello Macedones, tam magnanimum se gessit, ut inmensos Persei thesauros nec attigerit, nec saltem viderit, sed Quæstoribus illicò tradiderit, in ætarium Reipublicæ deferendos; regiam dumtaxat bibliotecam liberis designavit suis, eumque sibi dulcissimum tantæ victoriæ fructum credidit, quod ab Atheniensibus obtinuisset Metrodorum, egregio nomine philosophum, quem prædictorum filiorum institutioni litterariæ præponeret. In his Pauli filiis fuit Scipio Africanus junior; cui tot, tantaque in bello facinora nomen pepererunt nullo intermoriturum tempore; sed quem ad litterarum amore fortassè justiùs laudabit posteritas. Opulentissimus hic Romanus, *quo non quisquam elegantius*, ait Vellejus Paterculus, *intervalla negotiorum otio dispunxit, et qui semper inter arma, et studia versatus, aut corpus periculis, aut animum disciplinis exercuit;* non solum facilem ad se permittebat sapientibus aditum, sed eos diligenter quærebat: eorumdemque tum amicitias mendicabat, tum necessitatibus liberaliter providebat. Polybium, et Panætium græcos philosophos, doctrinarum excellentia illustrissimos, tam charos habuit contubernales, ut vel in privatæ vitæ officiis, vel in rumoribus belli, vel in splendoribus legationum, saltem ab alterutro numquam divelli permitteret. Terentium Afrum, ab liberali famosum ingenio, habuit in familiaribus; ejusque opera, summo prætio Romæ tunc habita, et nunc etiam eruditis probata, magna saltem ex parte deberi ajebant, elegantissimo Scipionis calamo. Sed nihil in hoc viro tam memoria dignum, quam amicitia cum Lælio, Romano eruditissimo, et castigatis moribus laudatissimo, qui cum illi erat una domus, idem victus, opinandi consensio, communis militia, peregrinationes, rusticationes, et studia semper aliquid discendi, semper nova cognoscendi; quibus in studiis otiosum omne tempus utilissimè conterebant. Quid amicitia id generis dulcius? Utinam et similes colerent in omni benè constituta gubernatione nobiles, et pecuniosi viri! atque utinam similiter ætatem impenderent, qui funestissimum sequentes otium, lacrymabili tædio, ac displicentia sui consumuntur!

Post memoratum Romani Senatus decretum, quo jussi sunt philosophi Romam deserere, scientiarum amor increvit, et magis, magisque litteræ coli cœperunt. Postremis verò Reipublicæ temporibus ad summum honoris fastigium philosophia pervenerat. Parentum accuratio, ut litteris erudirentur ab exordio vitæ liberi, generabat patriæ copiam virorum innumeram, qui in oratoribus, in jurisperitis, in philosophis excellebant. Præjudicatam deposuerant opinionem, quod iis nationibus derelinquendum esset scientiarum studium, quæ non in armorum furore, sed in togæ tranquilitate vitam agerent. Et hinc prima patriciorum liberos educantium cura in id jaculabatur, ut illi à teneris tam latinam patriam, quam eruditam Græcorum linguam perfectè condiscerent; indè verò ut assuescerent venerari sapientes, eorumque consuetudine delectari. Atque ab hac excellenti educatione quum penè ante depositam infantiam saperent, primi postmodum erant in philosophicis notionibus, qui primi cives in patria, primi in Senatu, primi in Magistratibus habebantur. Pompeji nomen, et scientiarum amor meritò celebrantur, quoniam á Mithridatico rediens bello, ingentium victoriarum pondere gravis, militari lauro decoratus, et solemni triumpho proximus, ad Rhodios divertit, tantummodò ut viseret, atque inter discipulos audiret philosophum Posidonium. In avita claritudine, amplissimoque fortunarum splendore delicatè transegit pueritiam, et adolescentiam Lucullus, ejusque postmodum gloriam tum vitæ magnificentia, tum egregia in bello facinora cumularunt. Quàm autem illustriùs habuit nomen ab assiduis conatibus, ut scientiarum ornamento mentem perficeret! Non enim in otio tantum domestico litteris delectabatur, sed in operosis Magistratum officiis, in publicorum negotiorum æstu, in ipsis belli angustiis, quum, ut ajebat Tullius, *non multum Imperatori sub ipsis pellibus otii relinquitur,* brevissimam quamvis temporis particulam, quæ fortè supererat, in studiis impendebat, et cum philosopho Antiocho, quem semper voluit sibi comitem, eruditè congrediebatur. Quàm docta, quàm urbana, quàm jucunda inter homines in tanto amore litterarum educatos colloquia! Quid autem si ad liberos, familiaresque sermones congregarentur Hortensius, Tullius, Cotta, Cæsar, Pompejus, Cato, Brutus, Atticus, Varro, Luculus, et similes ejus ætatis Romani, qui ut erant præcelso, et exercitatissimo ingenio viri, convenire certè non poterant quin eas, quibus quisque abundabat, omnis generis doctrinas urbanè profunderet?

Sed liceat ab reliquis distinguere, seorsumque commemorare in ea docta turba præstantissimum Tullium, quo nemo in philosophis urbanior, nemo suavior, nemo eruditior, nemo eloquentior, nemo patriæ observantior, nemo fortè, cui plus deberent sui cives, nisi casu vixisset, quum in postremis jam erat suspiriis convulsa Respublica. Nec profectò vidimus, nec audivimus umquam litterarum eviditatem ea majorem, quàm orator iste philosophus in suis commonstrat operibus. Nec omnino intellexeris, quo potuerit ille pacto in vita tot plena tumultibus, tot referta negotiis, tot occupata Magistratibus, tot misera publicis calamitatibus, tot vexata privatis inimicitiis, tot laboriosa in foro ad Quirites, in Senatu ad Patres, in gravissimo tribunali ad Judices orationibus: quo, inquam, potuerit pacto tam profundè cognoscere, tam eleganter describere, tam minutatim, et fideliter extricare, quidquid difficilium quæstionum ad eam ætatem agitarant philosophi. Supremi Numinis beneficio, quo certè consuli scientiarum bono, et incremento, plura tanti viri supersunt opera; quamquam non pauci ejusdem libri lacrymabili jactura parierint. Ex iis, qui pervenerunt ad nos, excelsa hujus philosophi magnitudo abundè manifestatur. Et quod admodum miraberis: vir tam eminenti doctrina, et qui non solùm in nullo scientiarum ad ea tempora notarum genere peregrinus erat, sed quidquid tractaret calamo, tamquam in provincia sua videbatur; hic, inquam, vir tam urbanè, tam scitè, tam eleganter fuit philosophus, ut, una sibi proposita meta, veritatem inquirere, neminem suæ sententiæ adversantem voluerit offendere. Quinimò ut tranquillo in veritatem contenderemus animo, palam ajebat: "Maledicta, contumeliæ, tum iracundiæ, contentiones, concertationesque in disputando pertinaces, indignæ mihi philosophia videri solent..... Nos et refellere sine pertinacia, et refelli sine iracundia parati sumus." Amabilem certè doctissimi viri philosophiam! à cujus imagine manum tollere sine dolore non possumus. Oportet tamen, ne breves instituti compendii terminos ultra modum transire videamur.

Post eversam Romanorum Rempublicam, alia surrexit schola, quàm appellarunt Eclecticam, et quàm jurè dixeris rempublicam philosophorum; neminem enim agnoscebat principem; neminem, in cujus verba juraret; neminem, qui opinandi libertatem opprimeret; sed quidquid vel Pythagoras, vel Socrates, vel Plato, vel Aristoteles; vel alii paris magnitudinis Doctores asseverassent, ad justam amussim pensabatur; nec omnino probabantur dogmata, nisi rationi consona viderentur. Primus dicitur Potamon Alexandrinus qui Augusti vixit ætate, in hoc fuisse philosophandi genere; quamquam antiquiores novisse, id maximè decere philosophum, satis confirmetur ex trito illo Platonis effato. *Amicus Socrates, sed magis amica veritas.* Et quod de Socrate Plato, de Platone

ingeminabat Aristoteles. Tullius etiam non tam fuit Academiæ fidelis, ut apertè non dixerit: *Non tam auctores in disputando, quam rationis momenta quærenda sunt.* Profectò dignam homine libertatem, quæ recta ducit ad veri cognitionem, quod supremus naturæ Artifex nobis investigandum concessit! Hæc autem libera opinandi facultas tum solummodò tibi licet, quum post accuratam in litteris assiduitatem rectè uti ratione tua condidiceris: nam si nullo doctrinarum præmunitus adminiculo sis, et tamen obstinabis animo nullius auctoritati cedere, profundum patet errorum pelagus, in quod præceps facilè collabaris. Nullam dicitur Potamon administrasse scholam, quæ peculiaribus ab eodem excogitatis distingueretur doctrinis: nemo tamen dubitat, in ejus ætatis fuisse Sapientibus, et ipsius exemplo servile jugum auctoritatis dejecisse plures insigni nomine philosophos, unam sequi rationem profitentes, et instituto severo examine, id seligentes ex unaquaque schola, quod cum veritate constare videretur. Hæc opinandi libertas ad tantum pervenit honoris culmen, ut doctissimorum hominum philosophiam appellarent Eclecticam. Et processu temporis ex antiquissimis Ecclesiæ Catholicæ Doctoribus ad Eclecticos annumerati sunt tum Clemens Alexandrinus, qui philosophiæ nomine dignam judicabat non eam quidem, quæ natam se diceret à Platone, ab Aristotele, à Zenone, ab Epicuro, vel quovis alio simili; sed quæ carpit ex singulis præstantiora: tum Origenes, qui Principum omnium doctrinas percurrebat, inter se conferebat, minutatìm examinabat, priusquam alicui subscriberet: tum Lactantius, qui subscripturum se dicebat philosopho, *qui sparsam per singulos veritatem, per sectasque diffusam, in unum colligeret, atque in corpus redigeret.*

Sed jam per hæc tempora multis afflicta fuerat vicissitudinibus philosophia. Cajus Caligula, insignis litterarum ossor, enormiter vexarat philosophos; quos et postea Nero jusserat exulare Roma, et ab omnibus Italiæ finibus Domitianus. Instaurati sunt litteris honores, quo tempore ad Romanorum Imperium Adrianus conscendit, studiis maximoperè debitus, in quibus et aliquam meruit laudem, quamquam famosæ gloriæ plus justo cupidus, perperàm voluerit in eorum Sapientum haberi numero, ad quos ingenii sibi dati viribus pervenire non poterat. Ad summum gloriæ fastigium philosophia rediit, imperante Marco Aurelio Antonino, qui et ipse, prætextatus adhuc, incedebat Romæ philosophus habitu, doctrina, moribus: habitum postea cum imperatorio commutavit; doctrinam ætate adauxit, mores philosophicos intulit in sepulchrum. Philosophiam appellabat matrem, aulam verò novercam, et sæpius in ore habebat illud Platonis effatum: *Beatos fore populos, in quibus aut philosophi regnarent, aut Reges philosopharentur.* Hujus viri sapientiam probavit erudita posteritas in famoso ejusdem opere, græcè scripto, quod mirabili rerum prudentia, et venusta simplicitate præcepta morum dilucidat.

In eo sæculo, quod fuit ætatis christianæ secundum, floruere Plinii, Dion Chrysostomus, Quintilianus, Plutarchus, qui summo cum honore sapientiam prosequuti sunt: ut etiam eminuere litteris Epictetus, Arrianus, Galienus, Diogenes Laertius, Maximus Tyrius, Diognetes, Crescentius, Celsus, quem Blanconius ad Augusti sæculum refert, haud renuente postea Tiraboschio, qui priùs Blanconium impugnaverat, aliique plurimi, quorum nonnulli philosophiam suam in sacra Christianorum dogmata et ritus converterunt. Sapientissimi verò philosophi non defuerunt in Catholicis, Iræneus, Justinus, Teophilus, Athenagoras, Ermias, Clemens Alexandrinus, et ferè initio sæculi sequentis Origenes, ejusdem Clementis discipulus, et in scholæ gubernatione succesor, dictusque Adamantinus ab indefessa in litteris assiduitate; qui sanè omnes elegantissimis, et profunda doctrina conscriptis operibus, de Christiani nominis osoribus gloriosè triumpharunt, eosdemque calumniatores æterno inustos dedecore ad silentium redegerunt. Indè autem nihil interrupta serie numeravit Ecclesia Catholica Doctores moribus gravissimos, et doctrina supereminentes, Cyprianum, Athanasium, Basilium, Gregorios, Ambrosium, Hieronymum, Cyrillos, Chrysostomum, Augustinum, aliosque innumeros, quos tanta copia videtur Deus in orbem immisisse difficillimis Ecclesiæ temporibus, ut philosophantibus in sanctæ Fidei dogmata, et erroribus ubique serpentibus, ingenii sublimitatem, heroicam fortitudinem, et indefessam defatigationem opponerent. Sed operosissimis implicati disputationibus, quum vitam agerent longa calamitatum serie prorsus difficilem, totos ferè nervos animi contenderunt in scientias primæ necessitatis, nobilitatis, et magnitudinis, theologica nimirum, et moralia; nec omninò nisi obiter, aliis doctrinarum ramis, quos hactenus agitarant philosophi, vacare potuerunt.

Postea verò in Hispaniam, Italiam, Africam, Galliam latè irruit barbarorum turma, quæ more fulminis omnia rapidè vastavit, inconditè perdidit, miserabiliter conturbavit. Et quid sperare scientiæ poterant in tanto rerum tumultu? Quid viverent inter gladios ubiquè strictos, in eorum qui sapuerant, perpetuo gemitu, et iis jam dominantibus, quibus erat in pretio furor, et ignorantia? Profectò in hoc barbarorum impetu collapsum est Occidentis Imperium, eisdemque corruit involuta ruinis litterarum Respublica. Non certè quod nasci præstantissima desierint ingenia: quinto enim post Christum sæculo Romæ sedit Pontifex Leo, cui Magni nomen tributum est non minus à doctrinæ amplitudine, quam ab elegantissima diligentia in difficillimi Pontificatus muneribus. Romanam pariter Ecclesiam sequenti sæculo gubernavit Gregorius, Magnus etiam dictus, et quidem meritò, si quis alius; quidquid somniatores quidam, et maledici sycophantæ contra effutierint. Ingentes posuit sudores in litteris, et plura scripsit, quæ temperanter sapientibus numquam non erunt monumenta,

quam benè de scientiis meritus fuerit supremus hic Pontifex. Latinè dicentis oratio venustissimè fluebat; quamquam non omninò coluerit, aurei sermonis puritatem: et quidem Erasmus, quem hac in laude peregrinum nemo dixerit, in Gregorii scriptis legi credidit Tulliano proximum stilum, à quo ceteri ejusdem ætatis auctores longe aberant. Isidorus etiam, Hispalensis Pontifex, per ea vixit tempora; quem nec morosiores ætatis nostræ Aristarchi deturbare audent è philosophorum numero: porrò scripsit innumera, non solùm de Divinis, quæ in præcipuis habuit amoribus, verùm etiam de dialecticis, de physicis, de astronomicis, de mathematicis, quorum plura certissimum saltem auctoris judicium, et immensam eruditionem confirmant. Magnus Aurelius Cassiodorus natione Calaber, patricius Romanus, postquam sub Theodorico, novo Italiæ Rege, tribusque ejusdem succesoribus, primas gessit summo cum plausu dignitatis, in Calabriam se recepit, ubi philosophiam cumulavit suam monastico cucullo, quem induit in amplissimo suis expensis condito cœnobio, adjectaque bibliotheca, quàm suis etiam operibus, copioso et pretioso fructu desudantis ad plura lustra ingenii, nobilitavit. Nec modica tanti viri laus est, quod in familiaribus ad contubernales colloquiis, eos identidem cohortabatur, enixè rogabat, et multis rationibus urgebat, ut, quidquid superesset à cœnobii constitutis, in studiorum oblectamento consumerent. Et ab his tam magnanimis Cassiodori conatibus, ut, qui congregati secum erant, doctrinis mentem excolerent, repetendum videtur, quod tam cœnobitæ Vivarienses, quos ille instituit, quàm eorum exemplo plures alii per Italiam, Galliam, Hispaniam, Germaniam, Angliam latè conspersi, totam posuerint operam in scientiarum conservatione: ut ferè, cœnobitis deberi, quod infelicissima illa plurium sæculorum ætate, quàm appellant ignorantiæ regnum, litterarum memoria non omninò deleretur.

Utiquè non defuerunt, etiam extra cœnobia, viri doctrina clarissimi, quorum paucos jam attigimus, alios prætermittimus, quia recensere singulos institutæ brevitatis non est. Sed profectò Sapientium ejus ætatis numerus admodum fuit parvus, et quasi nihilo habendus, contra immensum barbarorum, barbarosque mores imitantium exercitum. Et præterea negari planè non potest, eos etiam paucos, qui tunc doctrinis excelluere, prorsus immunes non fuisse à vitiato quodam in litteris ac depravato sapore, quem ab ætatis derivari moribus, pronum erat. Sæpiùs exagitata est ab recentioribus eruditis quæstio: quæ tan valida pestis per ea sæcula orbem afflixerit, ut vix vestigia litterarum, eaque inter paucos, et quasi tenebris conclusa, restiterint? Sed quidquid garrire libeat nonnullis contra Pontificem Gregorium Magnum, contra Gallorum Regem Carolum, etiam Magni nomine appellatum, contra omnes illos, qui sacris ministeriis addicebantur, depositis tamen livoribus, qui mentem miserabiliter obcæcant, non alia videtur idonea

causa designari posse, nisi et morum ferocitas à barbaris inducta, et incomposita, prorsusque indigesta plurimum nationum congeries, quæ summè inter se distabant natura, educatione, consuetudine, lingua, nec aut frænabantur sacra legum communione, aut alio vinculo tenebantur; et perturbata rerum omnium facies, et odia, cædes, rapinæ, conculcata universa jura, Divina, politica, civilia. Quid vacare poterat, ut in naturæ arcanis investigandis, in cursu siderum contemplando, in lineis, et angulis dimetiendis, in eloquentiæ veneribus conquirendis, occuparentur miseri mortales, qui tam ægrè vitam sustentabant, quibus vivere vix licebat, quibus tot inter mala nasci, adolescere, ad postremos canos pervenire contigerat? *Numquam*, quod ajebat Tullius, *cum sapientia temeritas commiscetur*. Et sedatum quidem, tranquillum, sibi vacantem animum amant litteræ nec unquam in calamitoso effervescentium tumultuum æstu germinare scientiæ visæ sunt.

Ætatis Christianæ sæculo decimo, cum densissimæ obscurabant Europam tenebræ, in Arabiam se recepisse litteræ videbantur, in quibus floruerunt famosissimus à doctrinæ universitate Alfarabius, Albumazar, Avicenna, et plures alii, qui philosophiæ tamquam sequestri, comparata lumina, suo postea tempore cum Europæis communicarunt. Sequenti sæculo disseminarunt eruditas academias per eam Hispaniarum partem ab ipsis occupatam; in quibus perquàm celebre fuit nomen Averrois, Arabis origine, patria Cordubensis cujus calamo præter opera, *de natura orbis, de re medica, de theriaca*, et alia quædam, Aristotelem habemus arabicè loquentem, sive omninò illum convertere, sive tantummodò explanare tentaverit. In hoc autem opere sua potiùs excogitata, quàm Aristotelis philosophiam, orbi litterario reddidit. Unde ajebat Divus Thomas: *Averroes non tam fuit peripateticus, quàm philosophiæ peripateticæ depravator.* Hæc Arabum in fovendis doctrinis defatigatio fortassè dici potest quædam velut aurora, longè quidem adhuc lucescens, quæ tamen viam paravit ad litterarum instaurationem. Utiquè non inficiamur, Aristotelis textum, qui jam ad Arabes vitiatus pervenerat, ab eisdem fuisse magis, magisque conjectura, et interpretatione corruptum; ut etiam, Sapientes ejus nationis in philosophiam induxisse disputationes innumeras, quæ totæ sunt in subtilitatibus, quæ mentem inutiliter onerant; quas nemo sanæ mentis dixerit ad notiones philosophicas pertinere. Sed tamen benè de scientiis meritos arbitramur, quia difficillimis illis Europæ temporibus litteras magnifecerunt, academias instituerunt, ultra patrium solum propagarunt, ingeniaque alibi nascentia, quæ multiplicatis calamitatibus oppressa dormierant, exsuscitarunt. Aristoteles igitur, expletis ad hominum arbitrum lacunis, quæ vitio temporum in ejus operibus factæ fuerant, et innumerorum interpretum inventis pessimè deformatus, initio sæculi tertii decimi ad Gallos introgressus est; sed tam

alius à philosopho Athenas docente, ut si ei daretur è sepulchro exurgere, vel indignatione, vel cachinnis exciperet commendatam suo nomine philosophiam. Hæc fuit anno millesimo ducentesimo nono Lutetiæ Parisiorum incendio damnata, ejusque lectio Catholicis vetita. Sexto post anno permissa ejusdem dialectica, in præfato interdicto physica, et metaphysica remanserunt. Inde autem Romanus Pontifex Gregorius Nonus anno millesimo ducentesimo trigesimo primo, Aristotelem legi prohibuit, donec ab erroribus in sanctam Fidem purgaretur. Post annos centum triginta quinque Purpurati patres ab Urbano V. Legati, ut Academia Parisiensis in pristinum splendorem restitueretur, Aristotelis opera, dumtaxat exceptis physicis, commendarunt. Sequenti sæculo tam in honore jam erat Aristoteles, ut regio Francisci primi decreto damnatus fuerit Auctor, qui hunc peripateticorum principem oppugnavit; eidemque injunctum, ne ipsum auderet ultra maledictis incessere. Sed numquam tam sublimi fuit Aristoteles gloriæ fastigio, quam ineunte sæculo decimo septimo, quum Academia Parisiensis induxit legi, et doceri posse, quidquid philosophicum erat Aristotelis nomine.

In hac pro diversis temporibus diversa nominis Aristotelici fortuna, primi magnitudinis viros in suis cultoribus litteræ numerarunt; quorum tamen comparatam ætate illa famam, non omnium æquè justam existimarunt posteri Sapientes. Et sæculo quidem decimo tertio. Albertus Magnus, Thomas Aquinas, Alexander Hales, Bonaventura, Joannes Dunsius, Roggerus Bacon, Raymundus Lullius, Alphonsus X, Castellæ, ac Legionis Rex, Fridericus II, Germanorum Imperator, aliique viri excellentes, non parvo jam numero, novos attulere conatus ad magnum opus philosophicæ instaurationis. Non tamen plenus adhuc dies illuxerat litteris: non enim vapularant, expunctæque ab hominum memoria fuerant inutiles, vanæ, barbaræ quæstiones, quas aut intelligere, aut ignorare, nihil omnino refert philosophi: quinimò pluribus arabico sapore jam inventis, aliæ tunc ejusdem furfuris adjunctæ sunt, quæ frustra tempus consumebant; quæ patientiam hominum tyrannicè divexabant, quæ miro utrinque furore, ac pertinacia, quasi res essent maximi momenti, propugnabantur. Undè non tam uberes philosophia collegit fructus, quam polliceri sibi poterat à viris tam excelso donatis ingenio; qui si quarto post sæculo vixissent, cum Cartesiis, et Newtonibus fortunatiùs adlaborassent in ædificio scientiarum ad sublimitatis apicem elevando. Et certè Thomas Aquinas, quem dixere quidam tam benè de Theologicis meritum, quam decimo septimo sæculo Cartesius fuit de philosophicis, nullo postea tempore non magni est habitus ab sapientibus, quod profundissimè cogitaverit, quod solidè doctrinas constabilierit, quod mira efficacia ratiocinatus fuerit, quod modestissimè sapuerit, quod simpliciter, et perspicuè scripserit; quod ordinem adamaverit. Et eo jam tempore phi-

losophiæ nomen coarctarant homines angustissimis terminis; nec ferè philosophos appellabant, nisi logica, physica, et metaphysica tractantes. In iis autem litterarum ramis profectò nihil extricasse videtur tertium decimum sæculum; quia cæco quodam favore in ejus Aristotelis, quem confixerant Arabes, jurabatur verba, nec erat fermè, qui auderet contra jam cogitata dicere, novas rerum causas quærere, in secreta naturæ laudabiliter curiosiùs ingredi; ne scilicet tanti Magistri, quem omnes credere videbantur ab errore immunem, offenderetur auctoritas. Acria certamina et contentiones, quæ scholas inter se dissecabant, plerumque vertebantur in quavis floccifacienda subtilitate, singulis conantibus, et fluctus in simpulo excitantibus, ut id evincerent, favere sive Aristotelem. Et hæc imperiosa tyrannis perpetuata est toto etiam sæculo decimo quarto; quamquam in eo vixerint ad Italos, ad Gallos, ad Hispanos, ad Germanos, ad Britannos illustrissima ingenia, quorum auctoritas potuisset subjugatas hominum mentes in libertatem asserere. Aliquantò feliciores visi sunt decimi quinti sæculi conatus, quum ad Italos transierunt Græci, Bessario Nicenus Pontifex, Joannes Argirophilus, Theodorus Gaza, Georgius Trapezuntinus, et plures alii præclaro in litteris nomine, qui et publicè in scholis, et privatim in eruditis colloquiis doctrinam uberrimam effundentes, exacuerunt Occidentis ingenia jam ultrò adnitentia in optimum scientiarum saporem. Et quidem obtentum est, ut plures insurgerent, qui mentem humanam injustè oppressam esse vehementissimè declamarent. In his autem declamationibus, quidam sincerè descripserunt scholæ vitia; quidam verò audacissima fronte plus juxto latrarunt contra eos, qui Scholastici appellabantur. Decimo sexto sæculo, sapientissimo quidem illo tum in re Theologica, tum in morum scientia, tum in politioribus litteris, nondum tamen suo potuit explendori philosophia restitui: quum enim, ut in præcedenti, plures lacrymarentur, in philosophia tunc tradita philosophiam desiderari, nec tamen aliam humano digniorem ingenio sufficerent; in tanta sæculi luce nemo fuit, qui jugum servitutis excuteret.

Renato Cartesio, philosopho Gallo, reservatus erat hic triumphus. Quarto natus anno, decimum septimum ingressus est sæculum, illustris genere, longè illustrior nobili opinandi, de mundanis libertate, beneficisque sudoribus quibus philosophiam aut magna ex parte penè creavit, aut certè splendore, ac dignitate magnificentissimè cumulavit. Neque verò debita fraudandus est laude Galileus de Galileis, famosus quidem imprimis, Florentiæ natus triginta duos annos antè Cartesium: qui Galileus ab summa eruditione, in geographicis, ab ingeniosissimis inventis in re mechanica, et præsertim ab astronomicis notionibus, magnos ætate sua de se rumores excitavit, et summam sui celebritatem posteritati reliquit. Galilei suppar floruit in Angelis Franciscus Bacon, Verulamii Dynastes, qui agitavit quidem magna, et

sublimia, ut instauratio litterarum aliquando perficeretur; quarum bono libros conscripsit oppidò celebratos de humanarum notionum incremento, ac dignitate, de novo scientiarum organo, de universi orbis phænomenis, et plures alios primæ utilitatis, atque amplitudinis, quidquid maligni quidam Britanicæ laudis invidi oblocuti sint. Petrus etiam Gassendus, excelso vir ingenio, natus in Galliis anno ante Cartesium quarto, per eadem ferè, atque ille, tempora Peripateticos conturbavit, Leucippi, et Democriti vacuo, et atomis instauratis. Qui verò totam philosophiæ faciem immutaverit; vetustissima dominationis vincula generosè fortis diruperit; libero, ac robusto ingenio præjudicatas opiniones concusserit; contra formidabilem scholarum omnium impetum solus pugnare ausus fuerit; philosophicas omnes quæstiones habuerit suspectas, donec ad severi examinis trutinam appenderentur; humanæ auctoritati rationem, veritatem novè cognitam incanescenti præjudicio antehabendam exclamaverit; primus utiquè dicitur fuisse Cartesius. Profectò liquidum est, philosophum hunc fervidissimo ductum ingenio, veras causas, undè ad explicanda naturæ phænomena descendit, non tam semper attigisse, quàm gratis asseverasse ab se repertas; ceterum subvertit ingentem philosophiæ tunc regnantis colossum, quo quidem incolumi, lux veritatis oboriri non poterat; et jactis novo philosophandi generi fundamentis, viam facilè constravit, ut, quoad licet mortalibus, ex purissimo rationis fonte veritas hauriretur. Et quantus ille fuerit in audacter excogitando, et quò processerit indole fervida, et mirabiliter inventrice, satis eruitur ex ejus operibus; in quibus præcipua sunt, Methodus ducendi mentem ad verum, Meditationes metaphisicæ, Elementa Philosophiæ, Dioptrica, Mechanica, Geometria, Algebra, et libri de homine, de mundo, de internis animi motibus, de meteoris, et plures epistolæ, quarum totum est de philosophicis argumentum. Famosi vortices particularum, materiæ perpetuo sese in orbem agentium, tam circa proprium axem, quam circa commune centrum: elementa illa tria, quæ fricantibus inter se particulis nascuntur, materia nimirum subtilis, globuli, et partes ramosæ ac duriores; bruta se moventia mechanicis tantum legibus, et mera, quod ajunt, automata; hominis anima tertium inter et quartum cerebri ventriculum sita, ubi glandula est, quam à figura *pinealem* appellavit, aliaque id generis prorsus nova, et sin minus vera, saltem acutissimo conficta ingenio, in philosophicis fuere Cartesii doctrinis.

His penitus oppositas excogitavit Isaacus Newton, vir plane maximus, Britanorum decus, ornamentum proximè lapso, et præsenti sæculo. A Keplero, et Cartesio prima derivavit lumina de geometricis, et mathematicis, in quibus viginti quatuor natus annos ea jam primus invenerat, quæ postea Sapientes cum admiratione legerunt in famosis ejusdem operibus de optica, et de philosophiæ naturalis elementis. In phy-

sicis, et metaphisicis probavit ingenium, probavit etiam fortitudinem, quam præjudicatis philosophorum opinionibus Cartesius opposuit; non tamen credidit subscribere se posse conjecturis, quibus ille innixus, novæ philosophiæ fabricam ædificavit. Quarè operæ pretium censuit philosophus Anglus, experimentis, et geometricæ normæ subjicere physicam. Primus invenit infiniti calculum, et ordinem progressionum sine numero: quæ sane inventa maximi fuere momenti, tam ad geometricæ sublimia, quàm ad innumera explicanda naturæ phænomena. Primus fuit lucis quasi anatomicus, quàm mira dissecuit arte, septemque radiis conflari monstravit. Loquebantur de luce ante Newtonem philosophi: sed nemo noverat, quid illa esset; nec ullus in tot Sapientibus fuerat, qui penitissimè rimatus intimam ejus naturam, septemplicem in ea radium, et primigenios totidem colores vidisset. Primus docuit, indè repetendum phænomenon, quod omnes in sua planetæ constent orbita; quia supremæ legi obediunt, quod sese mutuò trahant omnia corpora. Et hæc vis trahendi, quam summus rerum Artifex inseruit corporibus, et quam Newton *attractionem* appellavit, potissimum totius Newtonicæ philosophiæ fundamentum est. Hanc autem attractionis generalem legem in duas divisit: nimirum prima est, si corpus quantitate sit quater majus altero, vi quater majori major quantitas trahet minorem, quod geometricis verbis dicitur, attractionem esse in directa massarum ratione. Quarè si hæc duo corpora, certa inter utrumque posita distantia, mutuæ relinquerentur attractione, minus illud tantò festinantiùs viam perficeret, ut cum majori conjungeretur, quantò ab hoc exceditur quantitate, quod geometricè dicitur, velocitatem corporum esse in inversa massarum ratione. Altera lex est: si bina corpora inter se distent ad tria milliaria, trahendi vis in majori quater major est, quam si ad sex milliaria distarent: sive ut geometræ loquuntur, semper sequitur attractio rationem inversam quadratorum à diversis nascentium distantiis. Et quod mirum est, his tantummodo legibus, non quidem positis ad arbitrium, sed geometrica ratione, atque ordine confirmatis, ferè quidquid est in naturæ phænomenis, Newton dilucidavit. Quintum et octogesimum agebat annum, quum è vivis abiit, et parentatum illi est ferè quasi Regi, et magnifico in ejus honorem erecto mausoleo apposita est inscriptio in hæc desinens: " Gratulentur sibi mortales, tale, tantumque extitisse humani generis decus."

Dedit etiam Germania præstantissimum elapso, et nostro sæculo philosophum, cum Cartesio, et Newtone jure comparandum, Gottofridum Gullielmum Leibnitium. Lipsiam habuit patriam, ingenium sortitus feracissimum, et, quod ajebat de Catone Livius, ad omnia versatile, ut natum ad id unum diceres, quod agebat. Pretiosam à patre accepit hæreditatem, bibliotecam scilicet innumeris libris omnes ferè scientiarum ramos agitantibus refertam: et quum pretiosius illo donum habuisset à natura, summam sciendi cupidinem, et incredibilem in sudoribus litterarum constantiam, orator, historicus, poeta, jurisperitus, theologus, philosophus, mathematicus, et in singulis eximius dicitur evassise. Quidquid verò sit de hac scientiarum universitate, dumtaxat ejus philosophiam, quæ nostri est instituti, nec eam totam, sed præcipua capita memorabimus. Platonem et Aristotelem, ipsorumque ordinem, et concinnitatem impensè laudavit; sed viam longè ab iis aliam tenuit in natura rerum explicanda. Universa, quæ sunt, conflari voluit *monadibus*, quarum nomine intelligebat substantiam simplicem, cui nec pars est, nec figura, nec locus, nec extensio, nec aut tangi, aut generari, aut corrumpi, aut solvi potest, nec omninò esse, nisi ab summo creetur Artifice; aut mori, nisi ad nihilum redigatur. Omnes, ajebat, monades inter se sunt dissimiles, et quadam vi donatæ, qua invicem alteræ in alteram agunt; præter hanc autem intrinsecam vim agentem, et moventem, est in individuis monadibus interna forma singulis propria. Ejusmodi simplicissimæ substantiæ, nulla compositæ parte, nihil extensæ, rerum omnium elementa sunt; sed pro suo quæque ordine diversis rebus inserviunt. Omnes quidem quasi centrum, et speculum, et via orbis universi sunt; sed aliæ confussisimè repræsentant, nec in iis vis est, nisi movendi; et hæ sunt monades, quibus corpora componuntur: aliæ paulò clarius; et ex iis brutorum animæ consurgunt: tertii sunt ordinis, in quibus facilè, perspicuè, miroque ordine universitas rerum repræsentatur; et ex iis nobilioribus humana est anima. Monas verò est quartum ordinem una efficiens, æterna rerum origo, suprema monadum omnium ratio, quæ videt, cognoscit, repræsentat, quidquid aut est, aut esse potest; et hanc monadem Deum Optimum Maximum appellavit. Si quæsieris: qui possint, quibus extensio non est, extensum producere? Id esse, ait; ex conjunctis monadibus necessariò nascens phænomenon; perfectissima enim illa monas cum ceteras creavit, eam præstituit rerum harmoniam, ut monas unaquælibet sibi datis legibus obediens, peculiaribus aliarum monadum legibus obnoxia videatur, quamquam inter hanc; et illas nullum sit omninò commercium. Ita quidem animus Leibnitii, nihil prorsus obnoxius corporis organis, tot nova excogitavit in philosophicis; et videbatur corpus ea scribere, quæ dictabat animus; quemadmodum autem animus ad ea excogitanda præstitutus, excogitasset etiam longè à corpore; ita corpus harmonicè creatum ad ea scribenda, scripsisset longè ab animo. Nihil prorsus aut animus à corpore, aut corpus ab animo dirigitur, excitatur, impellitur, quamquam ab harmonia præfinita videantur sibi invicem respondere: monades ergo sunt *ratio sufficiens* rerum omnium, quæ possunt contingere: quumque nullum planè, vel minimum, sit spatium monadibus vacuum, non potest, una in aliam agens moveri, quin rerum universitas commoveatur, et nova orbis facies repræsentetur. Hanc ergo præfinitam rerum

harmoniam qui animadverterit, mirari non debet quod ex monadum conjunctione, non quidem extensarum; sed harmonicæ tamen legi obedientium, nascatur extensum. Et ex iis regulis facilè deducitur, monadem illam creatricem, quidquid umquam fecerit, *ratione sufficienti* ductam fecisse, ac proindè perfectissimè: quumque non aliter omninò possit, dicenda est teneri ad optimum in suis externis operibus; quod nimirum sit optimum, non singulari perpenso bono, sed orbis universi perfectione. Sunt hæc in Leibnitii doctrinis; in quibus utiquè admirationi patet sublimitas ingenii liberrimè volantis, novorum inventrix, et amatrix indoles, et non hactenus audita philosophia. Sed num ea sibi constent, non est historicè narrantis examinare.

Fuerunt etiam hoc duodevicesimo sæculo, litteris aureo, Malebranchius, Clarckius, Wolfius, Maupertuisius, et novissimè Boschovichius, Eulerus, Alembertus, Bonnetus, aliique plures, quorum et supereminuerunt ingenia, et oppidò laudabiles fuerunt ingentes conatus in adaugendis philosophiæ luminibus, eaque quotidianis incrementis ad saporem optimum conformanda. Sed nec videntur novas omninò trivisse vias in phænomenorum explicanda universitate; nec in brevi compendio licet singulos, qui excelluerunt commemorare. Unum superest: ut vos iterum alloquens, Mexicani juvenes, multis precibus obsecrem, impellam, exuscitem, urgeam, ut litteras habeatis in amoribus, ut ex animo colatis philosophiam, quæ sivè fortuna vobis arriserit, sivè adversa contigerint, sivè Theologiam prosequimini, sivè Jurisprudentiæ vacabitis, sivè togam olim induetis, sivè militari gloria rapiemini, sive ad Dei ministros adscribemini, sivè pecuniosi, sivè pauperes eritis, sivè domi latebitis, sivè publicè incessetis, sivè in urbe vitam agetis, sivè rusticabimini, sivè cum cive, cum extero, cum sapiente, cum hebete sermonem conseretis, sivè aliquandò profecti patria, mundi remotissima peragrabitis; numquam non vobis erit eruditum otium, numquam non in miseris casibus perfugium, numquam non utile, suavissimumque oblectamentum. Sed per Deum immortalem! discite judicare inter ingenium, et ingenium; discernite sobriè sapientem ab impio tumidè philosophante; cavete à captiosis quorumdam illecebris, qui postremis hisce temporibus perperàm se dixere philosophos; non certè quia novum aliquod lumen in philosophiæ instaurationem attulerint, sed quia multis eloquentiæ veneribus ornati, nihil non temerè audent, errores facilè disseminant, mores corrumpunt, pertinaciter garriunt, fidentissimi pronunciant, humanam rationem volunt supremam omnium judicem, etiam adversus dogmata, quæ vel Deus ipse liquidè manifestavit, vel supremi Ecclesiæ Pastores legitimè definierunt, vel catolici Patres, omnes quidem, ubiquè, semper, quæ divina est traditio, propugnarunt. Et profectò si ejusmodi philosophorum errores pulcherrimè comptos legeritis, quin mentes vestras

et longa rerum experientia, et doctrinæ ubertate præmuniatis, dulcissimi sermonis aureo poculò venenum incauti devorabitis.

ELEMENTA MATHESEOS

PROLEGOMENA.

1 Mathesis est (*) scientia quantitatis, vel magnitudinis. Quantitas autem *continua* est, aut *discreta: Continua* dicitur quæ partibus simul cohærentibus constat: cujus notio ubique in omnibus corporibus nobis exhibetur. *Discreta* verò ea dicitur, cujus partes disjunctæ sunt, putà hora, dies, annus, frumenti, aut arenæ cumulus, atque alia omnia, quæ *tota per aggregationem* vulgò audiunt in scholis.

2 Quod si distincte magnitudinem aliquam velis concipere, necesse est illam cum alia comparare. Sic numeri cujuscumque ideam perspicuam habebis, illum cum unitate conferendo, dum, quoties illam, vel ejus partes contineat, perpenderis. Similiter notionem ulnæ, aut pedis, à palmi, et pollicis, aut lineæ cognitione deduces. Quantitas ergo in rebus sine medio assumpto dari, minimè tamen concipi potest.

(*) *Μὰθησις* á *μανθανω* disco, unde *μὰθημα*, *μὰθησις* disciplina, *μὰθητης* discipulus. Non rectè aliqui proferunt *Mathessis* breve, quum etha græcum natura longum sit.

3 Jam verò si quantitatem veluti partium congeriem consideremus, nullo ad earum nexum habito respectu, *arithmeticè* illam tractamus. Quando autem veluti continuam, sive partibus conjunctis compositam attendimus, *geometricè* operamur. Quarè quantitas discreta *Arithmeticæ;* continua vero *Geometriæ* objectum est.

4 Porrò numerus, aut magnitudo quævis, non in aliqua specie determinata consideratus, sed generatim, aut veluti abstractim, *mathesis pura* dicitur: quum verò aliquibus rebus hunc mundum componentibus applicatur, *mathesis mixta* est. Mathesis puræ elementa, quæ tironi philosopho necessaria sunt, hoc volumine complectimus: mixtam in Physica tam generali, quam particulari passim adhibemus.

5 Methodus mathematica est ille ordo, quo mathematici ad proponendas veritates utuntur. Plerumque à *definitionibus* incipiunt; progrediuntur, si opus fit, ad *axiomata, et postulata*, sive veritates evidentes, quæ nulla indigent demonstratione. Nonnumquam *lemma* præmittitur: propositio nimirum, quæ ideò demonstratur, ut ad alias sequentes viam sternat; deinde *theoremata*, aut *problemata* proponunt, in quibus aut veritas aliqua demonstratur, quod theorematibus fit; aut aliquid faciendum præscribitur, et hoc *problema* nuncupatur, cujus solutione modus operandi docetur, ac postea si opus sit, demonstratur. Nonnumquam *corollaria* post theoremata, aut problemata subnectunt; ex his alias veritates

deducendo, quæ ex demonstratis facilè derivantur. *Scholia* vocant quasdam annotationes, quibus plurima præoccupantur, quæ alioquin novis theorematibus, aut problematibus exponi debuissent.

TRACTATUS I.

ARITHMETICA NUMERALIS.

CAPUT PRIMUM.

De natura numerorum.

6 Defin. Quælibet res seorsim considerata una est, atque adeò unitatis notio ita omnibus est perspicua; ut nulla definitio ad eam concipiendam necessaria sit. Res et unitates tum dicuntur *æquales*, quum magnitudine non differunt, *similes* verò, quando in omnibus notis conveniunt, quamvis alioquin magnitudine differant. Sic duo juvenes æquales dicuntur, si eamdem staturam, aut ætatem habeant: similes autem, quum in omnibus corporis, lineamentis conformantur, quantumvis magnitudine dissentiant. *Numerus* est congeries unitatum: quæ quidem, si ejusdem speciei sint, numeros faciunt *homogeneos*: secus *heterogeneos*. Sic tres, quinque, duodecim horæ, numeri sunt homogenei, pes autem et annus, heterogenei.

7 Schol. 1. Numeri heterogenei in unum numerum coalescere non possunt, neque operationibus arithmeticis subjici. Decem regalia, et tres aurei, numquan in unam summam colliguntur, nisi prius ad eadem speciem reducantur: putà aureos ad regalia traducendo:

deducendo, quæ ex demonstratis facilè derivantur. *Scholia* vocant quasdam annotationes, quibus plurima præoccupantur, quæ alioquin novis theorematibus, aut problematibus exponi debuissent.

TRACTATUS I.

ARITHMETICA NUMERALIS.

CAPUT PRIMUM.

De natura numerorum.

6 Defin. Quælibet res seorsim considerata una est, atque adeò unitatis notio ita omnibus est perspicua; ut nulla definitio ad eam concipiendam necessaria sit. Res et unitates tum dicuntur *æquales*, quum magnitudine non differunt, *similes* verò, quando in omnibus notis conveniunt, quamvis alioquin magnitudine differant. Sic duo juvenes æquales dicuntur, si eamdem staturam, aut ætatem habeant: similes autem, quum in omnibus corporis, lineamentis conformantur, quantumvis magnitudine dissentiant. *Numerus* est congeries unitatum: quæ quidem, si ejusdem speciei sint, numeros faciunt *homogeneos*: secus *heterogeneos*. Sic tres, quinque, duodecim horæ, numeri sunt homogenei, pes autem et annus, heterogenei.

7 Schol. 1. Numeri heterogenei in unum numerum coalescere non possunt, neque operationibus arithmeticis subjici. Decem regalia, et tres aurei, numquan in unam summam colliguntur, nisi prius ad eadem speciem reducantur: putà aureos ad regalia traducendo:

tunc enim ejusdem speciei unitatibus summa coalescit.

8 Schol. 2. Scientia numerum (3), quam arithmeticam appellant, duplici modo tractari potest: aut signis vulgaribus, quod fuit Arabum perutile inventum, aut litteris alphabeticis, quæ recentioribus Geometricis, à Francisco Vieta, methodus est familiarissima. Prima *Arithmetica vulgaris dicitur*, secunda autem *speciosa*. Porrò ad exprimendum quemcumque numerum, decem tantum signis utimur, omnibus notissimis, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; quando autem ad denarium pervenimus, eorumdem signorum conjunctione insignes etiam summas compendio exprimimus, quæ quidem adeò omnibus notas sunt, ut ab his explicandis supersedeamus. Tantum quæ negotium facessere in complicatioribus summis colligendis tironibus possunt, sequenti problemate dabimus.

9 Probl. *Numerum scriptum dilucidè exponere.* Solutio. Dividatur à dextra versus sinistram, ita ut singulæ tres notæ virgula dividantur; existantque plura membra, quorum ultimum una, aut duabus tantum notis constare potest. Ut autem *milliones*, *billiones* etc. ritè dignoscantur, lineolis superius post sex quasque notas indicentur. Exemplo res clarescet: $4'''$. 365, $294''$, 783, $468'$, 256, 935 sic enuntiabis: quatuor trilliones, ter centum sexaginta quinque mille, bis centum nonaginta quatuor billiones, septies centum octoginta tres mille, quater centum sexaginta octo milliones, bis centum quinquaginta sex mille, novies centum triginta

quinque unitates. Satis manifestum est, primam notam à dextra versus sinistram continere unitates, secundam decades, tertiam centenaria, quartum unitates millenariorum, quintam decades millenariorum, sextam centenaria ejusdem numeri, septimam unitates millionum, et sic deinceps.

10 Schol. Barbarè quidem dicitur *millio*, *billio*, *trillio*, quemadmodum alia plurima; quæ tamen jam frequenti usu in omnibus disciplinis recepto, latinitate donata sunt. Operosum enim, atque ambagibus pronum est, ne dicam captu difficillimum, enuntiare decies centena millia, millies millies millia, ut *millionem*, *ac billionem* indicaremus, romanorum more. Sed jam ad operationes, quæ numeris exerceri possunt, properemus. Ad quatuor autem reducuntur; nimirum Additio, Subtractio, Multiplicatio, et Partitio, quarum usus in humano comercio frequentissimus est. Tirones assuescant calamum nocturna, ac diurna versare manu, ut arithmeticæ regulas ad praxim deducant. Parum namque proficient, nisi distinctas notiones, quas studio comparaverint, continenti exercitatione repetere conabuntur.

CAPUT SECUNDUM.

Arithmeticæ operationes in numeris arabicis.

§. I.

Additio.

11 Defin. *Additio* vocatur ea arithmeticæ operatio, qua plures numeri in unum colliguntur: qui numerus compositus ab omnibus, dicitur *summa*. Signum additionis est $+$, atque exprimi solet vocabulo *plus*: sic $4+3$ enuntiatur; quatuor plus tribus. Æqualitatis signum est, $=$, quod enuntiatur æquale; unde $4+3=7$, sic leges, quatuor plus tribus, æqualia sunt septem. Ut autem excessum unius præ altero indicemus, hac notæ $>$ utimur; quæ hoc modo $<$ inversa contrarium indicat: unde $6>3$ significat numerum 6 majorem esse altero; contra verò $3<6$, primum altero esse minorem. Additionis operatio hoc principio innititur: *Totum est æquale suis partibus*: quarè $4+3=7$; nam quatuor, et tres sunt partes componentes numerum septem. Hinc additio numerorum simplicium nulla indiget ulteriori explicatione. Ad numeros compositos accedamus.

12 Probl. *Numeros compositos homogeneos addere.* Solut. 1. Numeri addendi ita scribantur, ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenaria centenariis etc. sibi respondeant in unaquaque summa addenda. 2. Singillatim addantur unitates, quæ si novenarium excedant, ad decades rejiciantur, subter lineam scriptis

tantum unitatibus. Similiter in decadibus, si denarium numerum excedant, ad centenaria referendæ sunt, retento numerum decadum, quæ ad decem non perveniant. Exemplo clarior res fiet. Sint addendi sequentes numeri.

$$\text{Exemplum}\quad \begin{array}{r} 2369 \\ 405 \\ 20 \\ 6 \\ \hline 2800 \end{array}$$

Quoniam in prima serie à dextris versus sinistram viginti unitates reperiuntur, quæ duas decades justè complent, nulla superest unitas; unde cyphra, seu *zero* notatur, nullam adesse unitatem. Duabus autem decadibus cæteris secundæ seriei adjunctis, planum est cum aliis octo decem conficere, quæ quidem decem decades jam centenarium conficiunt. Nulla igitur restat decas subscribenda, quum omnes ad centenarium rejectæ sint: *zero* itidem hoc notandum est. In tertia serie septem centenaria inveniuntur, quæ cum alio ex decadibus collecto, octo centenaria fiunt: quum verò ad decem centenaria non perveniant, transferri non debent ad millaria. Scribenda itaque sunt sub serie centenaria continente. Denique milliaria collige sub serie milliariorum; invenies summam integram ex quatuor summis partialibus constantem. *Demonstr.* Tali modo operandi colliguntur tot unitates, decades, centenaria, milliaria etc., quot in summis partialibus inveniuntur: totum autem æquale est suis partibus simul sumptis: igitur summa inventa continet omnes numeros in seriebus contentos.

13 Schol. Additionis probationes plurimæ adhibentur, quæ ad substractionem referuntur. Satiùs erit operationem denuò instituere sensu inverso ab eo, quo primum facta est. Si descendendo summa collecta est, ascendendo denuò colligatur. Difficile enim idem error operatione inversa repetitur. Quod si summæ collectæ dissentiant, signum est errorem irrepsisse; sin verò conveniant, manifestum est, operationem rectè institutam; quum eadem summa debeat emergere, quocumque modo colligatur.

§. II.

Subtractio.

14 Defin. Subtractio est operatio, qua numerus à numero detrahitur, ut eorum differentia innotescat, quæ dicitur etiam *residuum*. Numerus major appellari potest *minuendus*, minor *subducendus*. Signum subtractionis est lineola —, quæ enuntiatur verbo *minus*. Sic 8 — 6 = 2, enuntiatur; octo minus sex æqualia sunt duobus. Hæc est subductio numerorum simplicium, quæ nullo negotio perficitur. Jam ad compositos.

15 Probl. *Numeros compositos à se invicem subducere.* Solutio.

Exempl. Minuendus sit	1904657
Subducendus	0429593
Residuum	1475064

1. Subscribatur minuendo subtrahendus, ut in exemplo, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus etc. respondeant; linea subscribatur. 2. Subducantur unitates ab unitatibus, et subscribatur residuum uniuscujusque seriei sub linea in serie respondente. 3. Quod si numerus superior inferiore minor sit, à serie proximè sequente decas mutuetur, sive unitas, quæ pro ordine numerorum erit computanda aut decadum, aut centenaniorum etc., et sic poterit subductio fieri. Series vero sequens debet ea unitate mulctari, quæ jam computata fuit in serie subducta. Sic in exemplo, 9 à 5 subtrahi non possunt: addita verò unitate fiunt 15, scilicet decades, à quibus subducendæ sunt novem decades. 4. Quum verò jam centenarium à classe superiore detraxeris, nam quinque decadibus decem addidisti, quæ sunt unitas in centenariis; non amplius remanent sex, sed quinque tantum centenaria. Idem recurrit in quarta serie millenariorum. 5. In quinta verò, quæ decades millenariorum continet, nova ocurrit difficultas. Nam 2 à 0 detrahi non possunt; quarè à serie proximè sequente deme unitatem addendam huic seriei, que cum 0 facit 10. Memineris tamen ex hac decade jam detraxisse unitatem, quam millenariorum classi adjunxisti. Non igitur 2 ad 10, sed à 9 debes subducere. *Dem.* Hac operatione detrahuntur tot partes in minuendo, quot indicat subtrahendus; nempè unitates ab unitatibus, decades à decadibus etc. Ergo etiam totus subducendus à toto minuendo substractus est.

16 Schol. Examen substractionis est additio. Nam si subducendo addas residuum, minuendus debet restitui. Si aliter eveniat, operatio errore non caret, ideòque iteranda erit.

§. III.

Multiplicatio.

17 Defin. Numerum per numerum multiplicare est toties sumere *multiplicandum*, quoties indicat *multiplicator*. Appellari etiam solent *factores*, et coefficientes: quia uterque numerus facit, aut coefficit novum numerum, qui *productum*, vel *factum* dicitur. Signum multiplicationis est crux Sancti Andreæ sivè decussata ×. Alii vero puncto intermedio multiplicationem indicant. Ita 4×5 aut 4. 5=20, sic lege: quatuor ducta in quinque, æqualia sunt viginti. Patet multiplicationem esse iteratam additionem. Nam idem est 4 multiplicare per 5, atque quatuor quinquies addere. Verum hæc additio nimium operosa foret, adeòque multiplicationis compendio brevior fit.

18 Schol. Pro faciliori multiplicationis praxi inventa est tabula, sive abacus pythagoricus in sequenti schemate subjectus.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

C D

Usus tabulæ notissimus est. Ut invenias cujusvis numeri per alium multiplicati productum, quære utrumque in serie verticali, et horizontali; numerus inter utrumque interceptus erit productum: e. g. vis scire productum ex 6×5, quære in columna verticali AC numerum 5 aut 6, alterum autem in serie AB; invenies ab ipsis interceptum numerum 30 productun ex 5×6=30. Facili negotio abacus infinitè continuari posset eadem methodo, progrediendo semper eodem augmento, ut in numeris minoribus peractum vides quod quidem, pro privato adolescentium usu, ut sibi quisque proprio marte abacum ampliorem elucubraret, auctor essem.

19 Probl. *Numeros compositos multiplicare.*

Solut. Exempl. Multiplicandus 93406782
Multiplicator 34

373627128
280220346

Productum 3715830588

CAPUT TERTIUM.

FRACTIONES.

§. I.

Fractionum notio.

41 Defin. Quum aliquot totum in plures partes æquales dividitur, earumque una aut plures sumuntur, hæ partes relatè ad totum *fractiones* dicuntur. Duobus numeris supernè, ac infernè positis, ac lineola separatis scribuntur: quorum superior *numerator*, inferior *denominator* appellatur. Primus indicat partes ex toto desumptas, secundus in quot partes divisum sit. Ex. g. tres horas unius diei rectè scribes $\frac{3}{24}$; in tot enim horas dies dividitur, cujus tres partes sumuntur.

42 Theor. 1. *Quando in fractione numerator, et denominator æquales sunt, fractio unitati æqualis est.* 2. *Quod si numerator minor sit denominatore, fractio pariter minor est unitate.* 3. *Quum verò major est, valor fractionis unitatem superat.* Dem. 1. Si uterque numerus æqualis est, tot continet partes numerator, in quot totum divisum est: ergo ipsi æqualis est. 2. Pariter minore existente numero partium, pauciores etiam continet: ergo minor est. 3. Demum numeratore excedente, plures continet partes, atque in toto contineantur; adeòque ipsum superat. Hæc tamen propriè fractio non est, quum integrum contineat cum fractione:

cujus valor numeratore per denominatorem diviso facilè innotescit: v. gr. $\frac{15}{4}=3+\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}$.

43. Schol. 1. Fractiones propriè considerari possunt velut divisio numeratoris per denominatorem. Undè valor fractionis est quotiens numeratoris per denominatorem divisi. Quotus enim exponit rationem, seu proportionem primi ad secundum. Tunc verò numerator consideratur velut datus numeratus integrorum; denominator autem indicat qualis illorum pars sumi debet. Ex. g. valor $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$: hic enim est quotus numeri 4 divisi per 8. Evidens autem est, 4 esse dimidium 8. Pariter quatuor octavæ unius unciæ idem valet, ac quatuor unciarum octava pars. Nam $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$; 4 unciæ $=\frac{32}{8}$, cujus octava pars $=\frac{4}{8}$.

44 Lemmata. I. Quantitas tum in plures, tum in pauciores partes dividi potest. Jam verò si magnitudinem cujusvis partis consideremus, magnitudo partis eo major erit, quo ad pauciores partes redigitur: contrà verò minuitur, dum numerus partium augetur. *Dem.* Sit ex. g. pes in pollices dividendus: partes erunt 12. Sit dividendus in lineas: partes erunt 144: atqui linea est pars duodecima pollicis; ergo minores partes evadunt, quoties numerus partium augetur: majores verò, dum minuitur.

II. Quantitas genericè sumpta, in æquales partes divisa, augetur, dum majores, et plures partes habet: minuitur, dum minores, et pauciores. Hoc axiomatis loco haberi debet; res enim per se nota est.

III. Quantitas in æquales partes divisa, si eo modo ejus partes minuuntur numero, quo magnitudine augentur; aut inversè eo sensu magnitudine decrescunt, quo earum numerus augetur, invariata manet. *Dem.* Augmentum in uno sensu est decrementum in altero; et vicissim: ergo tantum variatur expressio, intacta manente quantitate. Ex g. Eadem remanet unica [illegible] in quartas, vel in octavas, vel in decimas sextas partes ipsam dividas.

IV. Quod si numerum partium minus auges, quin pari sensu magnitudinem minuas, quantitatem minorem effecisti. *Dem.* Augmentum in numero, et decrementum in magnitudine, pari passu debent currere, ut æqualitas servetur (supra 3). Rursus quantitas minuitur, quum pauciores et minores habet partes (supra): hoc autem fit in casu figurato: igitur decrescit.

V. Si verò augeas numerum, quin magnitudinem minuas, vel decrementum non sit æquale, quantitatem auges. *Dem.* Eadem ratione innititur, quum sit inversa propositio precedentis.

§. II.

Fractionum valor.

45 Theor. 1. *Fractio eo majores partes continet, quo minor est denominator: crescente autem denominatore, minores partes evadunt; numerus verò partium major, vel minor quas fractio continent, provenit à numeratore.* Dem. 1. Denominator exprimit in quot partes quantitas divisa sit: verum quo minor est denominator; majores partes evadunt; crescente autem numero partium, decrescit magnitudo (44 lem. 1). Quare à denominatore sumitur inversa magnitudo partium; majores si minor, minores si major sit. 2. Numerator exprimit quod partes quantitatis sumantur (41): ergo quum major est, plures continet; quum minor, minorem partium numerum.

46 Theor. 2. *Valor fractionis eo major est, quo numerator est major, et minor denominator; et versa vice eo minor, quo minor est numerator, major denominator.* Dem. Numerus partium à numeratore desumitur, et earum magnitudo inversè à denominatore: quare majore existente numero partium, et magnitudine, valor fractionis debet augeri. Contrà verò decrescente numero, et magnitudine, pro augmento denominatoris, ac decremento numeratoris, valor minor fieri debet.

47 Theor. 3. *Quum numerator, et denominator fractionis per eumdem numerum multiplicantur aut dividuntur, ejus valor non mutatur.* Dem. In hoc casu tantumdem augentur, aut minuuntur numerator, et denominator: valor igitur idem remanet, quamvis expressio valoris mutetur (44 lem. 3). Multiplica numeratorem, ac denominatorem fractionis $\frac{1}{2}$ per 5: fiet $\frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10} = \frac{1\times50}{2\times50} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ etc. Divide numeratorem, ac denominatorem fractionis $\frac{50}{100}$ per 5: fiet $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ etc.

48 Corol. 1. Hinc sequitur infinitas dari fractiones ejusdem valoris, quæ non nisi expressione differunt. Quamvis autem diversis terminis exprimantur, eumdem valorem continent, qui divisione, aut multiplicatione ad eamdem expressionem reduci possunt. Praxis ejusmodi vocatur fractionum transformatio : de qua in sequenti paragrapho.

49 Corol. 2. Si valores diversarum fractionum inter se compares, ex dictis facilè colliges. 1. Quum fractiones eumdem numeratorem habent, earum valores esse inversè juxta diversitatem denominatorum : v. g. $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{4}$ sunt inter se ut 4 et 3 : valor tamen ejus, quæ denominatorem habet minorem, est major ; quæ vocatur ratio inversa, ut infra; ubi de proportionibus. 2. Existente eodem denominatore in utraque fractione, variantibus numeratoribus, ab his dignoscitur valor fractionis. Ex. gr. $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$ erunt ut 2 et 3. 3. Demum quum diversi sunt tam numeratores, quam denominatores, eorum valores erunt ut quotientes : sic $\frac{3}{6}$ et $\frac{6}{18}$ ut $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$; aut etiam ut numeratores provenientes facta reductione ad eamdem denominationem, ut statim exponemus.

§. III.

Transformatio fractionum.

50 Defin. Fractionem transformare est illam in aliam ejusdem valoris mutare. Quum verò plerumque, non ad libitum, quod per multiplicationem, aut divisionem per quemcumque numerum obtineri posset (per præc.), sed ad

datam expresionem fractio reduci debeat: tum opus est inquirere numerum, per quem uterque numerus exactè dividatur. Hic dicitur *communis* utriusque *mensura*; atque etiam pars *aliquota*. Numerus quem nullus exactè dividit, dicitur *primus*. Interdum nulla invenitur communis utriusque numeri mensura ; quivis enim numerus præter unitatem, illos dividit cum aliquo residuo ; tum hi dicuntur *inter se primi*; et quicumque alius divisor *pars aliquanta* horum numerorum. Numerus *multiplus* est, quem plures alii præter unitatem dividunt.

51 Probl. 1. *Invenire mensuras cujusvis numeri, sivè factores illum componentes.* Solut. Si numerus est par, dividatur per 2 : si verò sit impar, dividatur per numeros impares 3, 5, 7, etc. Non obtenta divisione, numerus est *primus*, quem sola unitas metitur: vocantur etiam *surdi* et *irrationales* hujusmodi numeri. Jam verò si divisio procedit, ulterius progredi oportet, tentando divisionem per 2, 3, 5, etc, donec quotus sit unitas. Possunt etiam divisores simplices inter se multiplicari, et habentur compositi. Ex. g. quæruntur divisores num. 60: fiat $\frac{60}{2}=30$; $\frac{30}{2}=15$; $\frac{15}{3}=5$; $\frac{5}{5}=1$. Divisores simplices sunt 1, 2, 3, 5. Compositi à binis 4, 6, 10, 15. E ternis 12, 20, 30. Numerus autem 60 ex quaternis resultat.

52 Probl. 2. *Invenire maximam communem mensuram duorum numerorum.* Sol. Dividatur major per minorem ; ac neglectò quoto notetur residuum ; tum per hoc residuum dividatur numerus minor, et neglectò quoto, notetur resi-

duum: per hoc porrò residuum dividatur residuum præcedens, et sic deinceps, donec sine ullo residuo fiat divisio, aut residuum sit unitas. Ultimus divisor, qui sine residuo exactè dividit præcedentem, est maxima communis utriusque mensura. Ex. g. Inquirenda sit maxima mensura numerorum 96, et 44: primum per secundum dividendo, quotiens est 2. Hoc neglecto, per residuum 8 divido 44: residuum est 4: demum 8 divido per quatuor, exacta est divisio. Igitur 4 est maxima communis utriusque mensura. Si postremùm residuum sit unitas, numeri sunt inter se primi, nec alium communem divisorem præter unitatem habent (50). Hæc enim minima est omnium numerorum mensura. *Dem.* 4 exactè continentur in 8: ergo etiam in 44. Nam dividendus est æqualis producto ex divisore in quotum plus residuo. Quum autem residuum fiat divisor, si hic exactè continetur in producto; contineri etiam debet in dividendo. Sic $96 = 44 \times 2 + 8$; atqui per 8 divisa sunt 44; ergo utrumque numerum exactè dividit. Nullus autem alius major 4 illos exactè metitur; alias non processisset divisio usque ad illum; ergo 4 est maxima communis mensura.

53 Probl. 3. *Fractiones ad minimos terminos reducere.* Solut. Quæratur maxima mensura numeratoris et denominatoris: per hanc dividatur uterque: quoti erunt nova fractio ejusdem valoris ac prima, et minimis terminis expressa. *Dem.* Valor est idem, nam per eumdem numerum dividuntur tam numerator, quam

denominator (47). Est etiam minimis terminus expressa, quum nullus alius divisor major inveniri possit (præced.).

54 Probl, 4. *Fractiones ad eumdem denominatorem reducere.* Solut. Multiplicentur tam numerator, quam denominator cujusvis fractionis per productum denominatorum aliarum fractionum: nova producta erunt fractio quæsita, Ex. gr. sint $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$ reducendæ ad eumdem denominatorem; duc tam numeratorem 2, quam denominatorem 3, in productum $4 \times 5 = 20$: emergit nova fractio $\frac{40}{60}$, deinde $\frac{5}{4}$ in $3 \times 5 = 15$: erit $\frac{45}{60}$, demum $\frac{4}{5}$ in $3 \times 4 = 12$: erit $\frac{44}{60}$. *Dem.* Valor uniuscujusque fractionis non immutatur, nam per eumdem numerum multiplicatur tam numerator, quam denominator (47): ergo eumdem valorem retinentes, in denominatore conveniunt.

55 Probl. 5. *Integrum ad fractionem ejusdem denominatoris cum alia fractione reducere: aut integrum cum fractione in unam transformare.* Solut. Sit v. g. 4 reducendus in fractionem ejusdem denominatoris cum $\frac{3}{5}$: integrum in modum fractionis dispone subscripta unitate pro denominatore $\frac{1}{4}$: deinde duc utrumque in denominatorem alterius: erit $\frac{4 \times 5}{1 \times 5} = \frac{20}{5}$, nova fractio ejusdem denominatoris ac $\frac{3}{5}$. Deindè si utramque velis ad novam fractionem reducere æqualis valoris atque aliæ duæ, numeratores adde, ac nova emerget fractio $\frac{25}{5} = \frac{20}{5} + \frac{5}{5}$. Sed hoc jam ad additionem pertinet.

§. IV.

Quatuor operationes in fractionibus.

56 Probl. 1. *Fractiones addere.* Solut. Si ejusdem sint denominatoris, numeratores in unam summam colligendi sunt, eodem subscripto denominatore, ut in præcedenti exemplo. Si vero denominatores sint diversi, ad eumdem denominatorem priùs reducendi sunt (54): deinde numeratores addendi, subscripto communi denominatore, ut prius. Pariter si integri cum fractis addendi sunt, seorsìm colligantur integri, et seorsìm fracti. Demostratio eadem est ac in numeris integris.

57 Probl. 2. *Fractiones substrahere.* Solut. Quando ejusdem sunt denominatores, differentia inter utrumque numeratorem scribitur pro novo numeratore, denominatore retento. Quando diversi sunt denominatores, ad eumdem conversis, operatio eadem est. Quod si ab integris subducendi sint fracti, scribantur integri ad modum fractionis ut n. 55, ex g. $3-\frac{1}{4}=\frac{3}{1}-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$. Quid si ab integro cum fractione, major fractio detrahenda sit? Respondeo, breviùs te expedies unitatem ab integro mutuando, atque fractionem augendo: v. g. à $6+\frac{1}{4}$ subducendi sint $5+\frac{3}{4}$: reduc $6+\frac{1}{4}$ ad $5+\frac{5}{4}$, à quibus substrahe $5+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}$.

58 Probl. 3. *Fractiones multiplicare.* Solut. Ducantur numeratores, et productum erit numerator novæ fractionis; eodem modo fit cum denominatoribus, et productum dat novum

denominatorem: ex. gr. $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{12}$. *Dem.* Multiplicare est toties sumere multiplicandum, quoties indicat multiplicator (17): quarè multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$, est ter sumere quartam partem duarum tertiarum. Quærenda igitur primum est quarta pars duarum tertiarum: hoc autem fit ducendo 3 in 4, ut fiat $\frac{2}{12}$. Nam 8 sunt duæ tertia 12, et 2, quarta pars 8. Deindè ducendo numeratores 2×3, ter sumitur 2, quarta pars 8: ergo factum est quod petebatur.

59 Corol. Manifestè deducitur ex hac demonstratione, productum in fractionibus minus esse factoribus: contra atque in integris evenit. Nam quum numerator in factoribus minor sit denominatore, per multiplicationem minus augetur numerator, quam denominator; ac proindè minus augetur ejus partium numerus: unde minus augetur numerus quam magnitudo minuatur (44 lem. 5); quod est fractionem minuere. Manifestiùs id fiet in multiplicatione fractionis per integrum. Nam si $\frac{2}{3}$ in 3, aut 4 duceres, $\frac{6}{3}$ aut $\frac{8}{3}$ prodirent. Multiplicatio enim sic procederet $\frac{2}{3}\times\frac{3}{1}=\frac{6}{3}$: aut ducendo in quatuor $\frac{2}{3}\times\frac{4}{1}=\frac{8}{3}$ (55). In hac multiplicatione augetur numerus, retenta magnitudine partium: crescere igitur debet valor (46) ter aut quater. In alia verò magnitudo decrescit quater: igitur quater minor esse debet magnitudo partium, quin quater augeatur numerus, sed tantum bis. Hoc autem fusiore calamo ideò explicavimus, quia tironibus nimium quantum negotium facessit praxis hujus problematis, autumantes paradoxon pro veritate ipsis intrudi.

60 Schol. Quum factores sunt integri cum fractis, prius reducuntur integri ad fractionem ut supra; deinde operatio procepit, ut in problemate numeri præcedentis.

61 Probl. 4. *Fractiones dividere.* Solut. Divisio est operatio inversa multiplicationis. Undè si in multiplicatione numeratores, et denominatores invicem ducuntur, in divisione debent inversè multiplicari. Numerator igitur dividendi multiplicetur per denominatorem divisoris, et productum statuatur numerator novæ fractionis: tum denominator dividendi multiplicetur per numeratorem divisoris, et productum fiat novæ fractionis denominator, quæ erit quotus quæsitus: id quod ex eo apparet, quod nova fractio multiplicata per divisorem exhibet dividendum. En exemplum: ut $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$ dividas, duc 3 in 3, et 4 in 2; erit $\frac{9}{8}$ quotus quæsitus. *Dem.* Dividere est inquirere, quoties dividendus contineat divisorem: quod in casu figurato est investigare quoties $\frac{2}{3}$ contineant $\frac{3}{4}$. Reducantur igitur ad eumdem denominatorem: erunt novæ fractiones $\frac{9}{12}$ et $\frac{8}{12}$, 9 continet semel 8, plus unitate: igitur quotus $= 1 + \frac{1}{8}$. Rursus $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$. Quotus igitur adamussim extrahitur, factores decussatim ducendo. Quod jam de multiplicatione animadversum est, productum minus esse factoribus; inverso modo ad divisionem est transferendum, scilicet quotum majorem esse dividendo: quod non minus paradoxon videtur, quam primum. Percepta autem demostratione præcedentis problematis, ex ejus veritate veritas hujus manifestè eruitur.

Nam numerator dividendi multiplicatur per denominatorem divisoris, qui major est suo numeratore; et hic pariter multiplicatur per alterius denominatorem: ergo crescit numerator quoti, magis quam augeatur ejus denominator; valor igitur debet augeri (46). Quando ocurrat integer cum fracto dividendus per fractionem, aut per integrum cum fracto, prius ad unam fractionem dividendus reducendus est, et similiter divisor (55); postea operandum ut supra.

62 Probl. 5. *Fractionem speciei superioris ad inferiorem reducere; sivè illius valorem invenire.* Solut. Multiplica numeratorem per numerum indicantem quoties inferior continetur in superiore; deindè productum divide per denominatorem datæ fractionis: ex. g. sint datæ $\frac{3}{4}$ unius pedis, cujus valor examinari debeat. Species proximè inferior pedis est pollex, qui 12 es continetur in pede. Duc $3 \times 12 = 36$: divide per $4 = 9$. Igitur $\frac{3}{4}$ ped. $= 9$ pollicibus.

§. V.

Fractiones decimales.

63 Defin. Fractio decimalis ea dicitur, cujus denominator est 10, 100, 1000 etc. Methodus fractiones decimales scribendi ea invaluit, ut omissis denominatoribus, numeratores scribantur, præfixis integris, si qui sunt, virgula interjecta, aut puncto. Sic ut scribas $2 + \frac{35}{100}$, signabis 2, 35. Integris deficientibus, cyphra scribitur loco integrorum: ex. g. $\frac{289}{1000}$ ita exprimes: 0, 289; vulgò jam intelligitur denomi-

natorem esse unitatem tot cyphris auctam, quot notas continent numerator. Quod si in numeratore partes decimæ desiderentur, replentur cyphris notæ deficientes, ut denominator discerni possit. Sic 0,006 exprimunt $\frac{6}{1000}$. Diverso modo scribendi decimales nonnulli utuntur: ex. g: $\frac{5}{10}$ sic exprimunt 5.0: $\frac{87}{100}$=37.00. $\frac{304}{1000}$=304.000. Usitatior tamen methodus ea est, quam prius tradidimus.

64 Corol. 1. Fractionum decimalium utilitas præcipua est ad obtinendum quotum proximè verum, quando peracta divisione, aliquod residuum in quoto superest: ex. g. diviso 147475 per 362, quotus invenitur $407+\frac{141}{362}$. Numeratori addatur 0; et 1410 per denominatorem 362 diviso, quotus erit 3 cum residuo 324. Iterum 0 adjuncto, dividatur 3240, ut supra; quotus erit 8 cum residuo 344. Operatione ut priùs iterata, novus quotus emergit 9 cum residuo 182, et sic deinceps. Planum est quotum usque ad tertiam divisionem, scilicet 407, 389 captu commodiorem esse altero 407, $\frac{141}{362}$. Posset etiam instituti divisio adjectis tot cyphris quot decimales extrahere oportet; eodem enim recidit praxis, utrolibet modo opereris: ex. g. loco 1410, scribe 141000, ac divisionem institue, ut supra: quotus erit idem 389, qui integris adjunctus dat 407, 389 ut priùs neglecto residuo 182.

65 Corol. 2. Eodem erit methodus, ut fractionem vulgarem in decimalem convertas. Numeratori addantur tot cyphræ, quot volueris; deindè dividatur per denominatorem: quotus

erit decimalis quæsita: ex. g. ut $\frac{3}{4}$ ad decimales transferas, numeratorem multiplica per 100=300: deinde divide per 4; quotus erit $\frac{75}{100}$, aut 0, 75=$\frac{3}{4}$: nam 100 dividendo per 4, quotus est 25: proinde 75 sunt tres quartæ partes centenarii. Animadvertendum tamen, plerumque non exactè dividi posse numeratorem, utcumque cyphræ adjungantur: valor tamen propriùs accedet ad verum, quo pluribus cyphris angebitur; quod numero superiore ostensum jam est.

66 Schol. 1. Per augmentum prædictum cyphrarum, nullus fractionibus valor accrescit, Nam pari passu currunt incrementum numeratoris, ac denominatoris; adeòque valor retinetur. (47). Si enim numeratori adduntur duæ cyphræ, aut quatuor, intelliguntur pariter adjunctæ denominatori; v. g. 2, 4=2, 40=2, 400=2,4000. Idem enim est in casu, ac multiplicare utrum per 10, 100, 1000 etc.

67 Schol. 2. In fractionibus decimalibus solent partes nimium parvæ negligi; ex g. 4, 364; si velis ad centesimas reducere, neglectis millesimis, debes ultimam notam 4 adjicere. Ut autem rectiùs procedas in figurato casu, quia 36 excedit quinarium, melius scribes 4, 37; quam 4, 36: secus autem si quinarium non superant. Ratio est quia tunc magis accedit ad justum valorem, aut minus abludit ab ipso. Evidens enim est ultra quinarium incipere excessum magis aproximari decenario, quam ab ipso recedere; secus est in numeris infra quinarium.

68 Prob. 1. *Fractiones decimales addere, vel subducere.* Solut. Operatio eadem est atque in integris.

Exemp. Additio	4, 345	Sub. 4, 3509
	0, 2	2, 4623
	28, 75	1, 8886
	33, 295	

Notandum tamen, ut accuratè quilibet numerus integer, et fractus sub sibi respondente serie scribatur: integri sub integris, decimæ infra decimas, centenaria sub centenariis etc.; aliter valor minueretur, aut cresceret in summa, prout error in scribendo contingeret. In secunda linea additionis scriptum vides 0, 2; quæ decimalis respondet $\frac{2}{10}$ (63): idcircò sub decimis collocari debuit.

69 Probl. 2. *Fractiones decimales multiplicare.* Solut. Duc inter se omnes notas, perindè atque in integris fit. Deindè in producto tot decimales notandæ sunt, quot erant in utroque factore: ex. g. 4, 25×2, 34=9, 9450. *Dem.* Exprimantur valores ad modum fractionis vulgaris, erunt $\frac{425}{100}\times\frac{234}{100}=\frac{99450}{10000}=9, \frac{9450}{10000}$ (58).

70 Probl. 3. *Fractiones decimales dividere.* Solut. Divisio fiat more integrorum; deinde in quoto tot resecabuntur notæ à dextris, quot dividendus superabat divisorem. Ut dividias 9, 9450 per 4, 25 more vulgari quotus erit 234: duobus autem notis dividendus superat divisorem: has itaque separa ad dextram virgula, ut fiat decimalis: erit 2, 34 quotus quæsitus. *Dem.* Hæc operatio est contraria præcedentis. Quum

verò in multiplicatione productum debeat continere tot notas decimales, quot in utroque factore inveniuntur, in divisione debent detrahi. Nam divisio per unum ex factoribus, dat quotum alterum factorem (25): ergo quum in dividendo inveniantur decimales utriusque factoris, in divisione emergere debent notæ, quibus alter alterum superabat.

71 Schol. Nonnumquam integer per decimalem ocurret dividendus; aut minor fractio per majorem scilicet paucioribus notis expressa. Tunc addantur integro, aut fractioni minori, tot cyphræ, quot opus fuerit ut superet divisorem; atque operatio de more instituatur. Sic ut 3 dividas per 0, 25, fiat 300, dividendus per 25: quotus erit 12, quod breviùs exprimeres $\frac{300}{25}=12$.

72 Probl. 4. *Fractionem decimalem ad vulgarem traducere.* Solut. Multiplicetur decimalis per datum denominatorem; productum, rejectis notis decimalibus, erit saltem proximè numerator, cui subscribatur denominator prædictus: ex. g. 0, 50 pedis, sive $\frac{50}{100}$ pedis etc.; debeant ad mensuram notam pedis reduci: $50\times 12=\frac{6{,}00}{12}=\frac{12}{6}=\frac{1}{2}$. *Dem.* Hic queritur expressio adæquans verum valorem decimalis: evidens autem est 50 esse dimidium 100: igitur expressio $\frac{6}{12}$ æqualis $\frac{50}{100}$. Cave autem credas, expressionem $\frac{6{,}00}{12}$ continere sexcentas duodecimas partes pedis: continet enim, sive equivalet huic valori $\frac{600}{1200}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

TRACTATUS II.

ARITHMETICA SPECIOSA, SIVE LITTERALIS, ALGEBRA VULGO NUNCUPATA.

CAPUT PRIMUM.

Notiones prævia.

73 Defin. 1. *Algebra* est scientia quantitatis signis litteralibus expressa, quorum significatio à signis non determinatur. Jam usus obtinuit quantitates notas primis alphabeti litteris, ignotas postremis designare.

Annotatio historica. Diophantes primis æræ christianæ sæculis plurima ad analysim pertinentia in suis quæstionibus arithmeticis usurpavit. Non leve hoc fundamentum est apud Græcos: Diophantis ætate, jam notam fuisse *algebram*, à quibus Arabes hanc scientiam postea exceperint. Nonnullis tamen placet Arabes hujus inventionis auctores facere, antequam Græcis innotesceret. Quod verò apud omnes convenit, est Arabes, notis vulgaribus ab ipsis inventis, sivè ab Indis mutuatis, quod aliis placet, in calculo usos fuisse. Franciscus Vieta, Gallus, anno 1590, primus alphabeti litteras ad quantitates exprimendas invexit; eo successu,

ut ferè jam nullus ad Mathesim tractandam accedat, qui Vietæ vestigiis non insistat. Quibus verò hujusmodi ars Ægyptianis hieroglyphicis intricatior videtur, hi pari jure musicas notas inter Isidis, et Osiridis arcana collocent, necesse est. Sanè benè perceptis algebræ fundamentis, reliqua non majorem difficultatem habent, quam si arabicis notis pertractarentur. Quare præcipua nobis cura erit prænotiones algebricas, quam dilucidè explanare, ut tironum mens ideas, ac distinctas concipiat, quibus, veluti face prælucente, tuto pede ad penitiora analysis arcana ingrediatur.

74 Defin. 2. *Terminus algebricus* est una, aut plures litteræ collectæ, sine ullo signo + aut — conjunctæ. Ex. g. a, b, ab, abc. *Termini positivi* sunt, quos præcedit signum +. Negativi, quos signum subtractionis — antecedit. Quum verò nullo signo afficiuntur, intelligitur habere signum positivum, ut plerumque initio fit. *Termini similes* dicuntur, qui iisdem litteris designantur: ut $ab+2ab+abc$, primi termini sunt similes, tertius dissimilis.

75 Schol. *Quantitates oppositæ*, positivæ scilicet, et negativæ, sunt quantitates homogeneæ, quæ ita sibi opponuntur, ut una minuat alteram. Fac ex. g. te versus orientem centum passus fecisse, deindè verò, quoniam iter agere debuisses in occidentem partem, retrò per eamdem viam 50 passus facere. Certum est, te 150 passus emensum, summa tamen itineris erit $100-50=50$. Quantitas motus positiva est: itineris tamen facti summa, partim positiva, par-

tim negativa. Hoc exemplo, autumo, terriculamentum quantitatis positivæ, et negativæ evanescet.

76 Defin. 3. *Terminus incomplexus*, sive *monomius* est cuantitas solitaria, nulli alteri signo + aut — conjuncta; ex. g. a, ab, abc. *Complexus* sive *polynomius* est quantitas pluribus terminis constans, signis interpositis: ut $ab+abc-bc$. *Binomia* dici solet quum duobus terminis constat; *trinomia*, *quadrinomia etc.* à numero terminorum componentium integram summam.

77 Nonnumquam in polynomiis post terminum positivum occurrunt plures negativi. Cave intelligas secundum negativum minuere primum: ex. g. $20-5-3$ non denotat quantitatem 20 minuendam esse $5-3$, attamen 8 à 20 auferri debere. Pariter $20-5+3$ indicat non tota quantitate 5, sed solum 2 minuendam esse: quare $20-5-3=12$: at $20-5+3=18$. Præsens canon claritatis gratia in numeris propositus ad quantitates litterales est transferendus. Nam $a-b-c-d$ idem valet atque a minuta quantitatibus b, c, d. Pariter $a+b-c+d$ tantum minuitur quantitate c: augetur autem b et d.

78 Defin. 4. Numerus, qui litteris præfigitur earumdem *coefficiens* dicitur. Hinc autem indicat quoties ea quantitas sumenda est: ex. g. $3a+2ab-6bc$: denotat primam ter, secundam bis sumendas esse; minuendas tamen sexies quantitate bc.

79 Defin. 5. Numerus supernè litteris ad-

scriptus dicitur *exponens*. Denotat autem quantitatem multiplicatam per se ipsam bis, ter, quater etc. Sic a^2 indicat a per se ipsam esse multiplicandam, sive productum $a\times a=aa$, sivè a^2: similiter b^3 significat $b\times b\times b=bbb$, sivè b^3. Animadvertendum tamen, non idem esse $3b$, atque b^3. Nam primum equivalet additioni, secundum multiplicationi: $3b=b+b+b$. Quando verò scribitur b^3 indicat productum $b\times b\times b$. Fac $b=3$; erit $3b=9$; in altero autem casu $b^3=27$. Nam $3+3+3=9$; $3\times3\times3=9\times3=27$. Quando autem nullo exponente litteræ scribuntur, earum exponens est unitas ut in coefficientibus $a^1=a$.

Sæpè inveniens scriptas quantitates parenthesi inclusas, aut linea supernè ducta notatas: ex. g. $(a+b-c)\ (a+b)$, aut $\overline{a+b-c}\times\overline{a+b}$: intellige notam primam quantitatem per secundam multiplicandam esse. His benè perceptis, reliqua planiora evadent.

CAPUT SECUNDUM.

Operationes Arithmeticæ in litteris.

§. I.

Additio, et Subductio.

80 Probl. 1. *Quantitates litterales addere.* Solut. Hoc fit quantitatum, sive terminorum conjunctione: ex. g. ut addas terminos, a, ab, bc, scribe $a+ab+bc$. Male autem scriberes

$aabbc$, aut $aab+bc$. Jam enim monimus in his quantitatibus nullo signo conjunctis productum contineri, non summam. Demonstratio eadem est atque in numeris.

81 Schol. Si quantitates similes coefficientes habeant, eorum summa colligitur, atque in unum terminum coalescunt: ut $2a+3a=5a$; compendii enim causa sic reducuntur. Pariter $-ab-3ab=-4ab$.

82 Probl. 2. *Quantitates litterales subducere.* Solut. Ut quantitates algebricas subducas, satis est in quantitate subtrahenda mutare signa in opposita, ipsam jungendo cum minuenda: ex. g. sit ab subducenda ex bc: erit $bc-ab$. *Dem.* Quantitas à quantitate subducitur, quum à minuendo ea detrahitur: hoc autem fit in mutatione signorum subducendi; nam quantitas, quæ erat positiva, ipsi adscribitur ut negativa, aut contra; quare quantitas positiva subducetur, si sumatur negativè; negativa verò, eam convertendo in positivam. Quod si termini subducendi coalescant ex positivis, et negativis, ut si minuendus sit $a+b$, et subducendus $c-d$, residuum erit $a+b-c+d$. Nam à quantitate $a+b$ non tollitur totum c, sed tantum pars, quæ non sit d: undè in residuo manere debet pars d. Exemplum in numeris.

Min.	$1+0-1-2-3$
Subt.	$1+1+1+1+1$
Res.	$0-1-2-3-4$

In minuendo una est quantitas positiva, sex negativæ, nimirum quinque negativæ, quum

positiva à negativa absorbeatur. Ab his quinque negativis quinque aliæ positivæ detrahi debent; quod fieri non potest, nisi augendo totidem negativis summam residui. In hac igitur decem negativæ inveniri debent, ut vides.

83 Corol. 1. Quando occurrunt termini similes in minuendo, et subducendo, delentur: ex. g. $a-a$, $ab-ab$; planum est, hujusmodi quantitates in summa esse superfluas. Quapropter operatione peracta, fit reductio terminorum, delendo, qui se invicem conficiunt; quod ad omnes algebricas operationes extendendum est. Ex. g. $a-2a+4a-bc+2bc$, facta reductione scribitur: $3a+bc$.

84 Corol. 2. Coefficientes in substractione algebrica tractantur, ut in numeris arabicis: ex. g. sit $6a$ in minuendo, et in subtrahendo $4a$: scribe differentiam coefficientium$=2a$.

§. II.

Multiplicatio.

85 Probl. *Quantitates terminis algebricis expressas multiplicare.* Solut. Praxis eadem est ac in numeris. Quælibet quantitas multiplicatoris per omnes multiplicandi terminos multiplicatur, ac productum scribitur, postea in summam redigendum. Sic a multiplicandum per b dat productum ab: ita enim productum algebricum scribitur; multiplicatum per bc dat productum abc etc. Unica occurrit differentia in signis: nam positiva dant productum positivum; negativum, et positivum dant negati-

vum: negativa autem dant positivum.
Exempl. Mult. $3a+ab+bc-b$
Multiplicator. $2a-b$

$$6aa+2aab+2abc-2ab$$
$$-3ab-abb-bbc+bb$$

Productum
facta reductione $6aa+2aab-5ab-abb+2abc-bbc+bb$.

Dem. Eadem est ac in numeris, quatenus producta factorum respicit. Difficultas maxima, quæ crux tironum dici potest ocurrit in signis. Et 1. quod plus in plus det productum $+$, nihil negotii facessit. 2. Quod autem plus in minus ductum, det productum$-$, sic ostenditur. Quantitatem positivam per negativam multiplicare, est eam toties sumere, sivè addere, quot indicat altera; altera autem indicat subtrahendam, quum$-$signum sit subductionis: quare productum debet esse negativum; nam additio negativa est vera subtractio. Productum igitur debet esse negativum.

3. Caput difficultatis indè emergit, quod $-\times-=+$. Memini plus centies auditoribus demonstrasse hanc veritatem, quin demonstrationibus acquiescerent, aut quod idem est, eas dilucidè perciperent. Nonnunquam fulgore veritatis repente illustrati, cedebant; postea verò ad ingenium redibant, novis difficultatibus obtenebrati. Quamobrem, qua potero, maxima perspicuitate, ac brevitate me expediam. Quantitatem negativam per negativam multiplicare,

est eam toties sumere, sivè addere, quoties indicat altera: altera autem indicat snbtrahendam, quum signum$-$sit subductionis: quarè productum debet esse positivum; nam quantitas negativa subducitur, eam convertendo in positivam: quantitatem igitur negativam per negativam multiplicare, est illam positivè ponere, aut sumere. Ergo$-\times-=+$. Vide dicta art. 82.

86 Schol. 1. Si quantitates affectæ sint coefficientibus, hi ducantur inter se, ac productum pro novo coefficiente scribatur in producto: ut in exemplo $3a\times 2a=6a$.

87 Schol. 2. Si autem exponentes occurrant in litteris similibus, sumatur utriusque exponentis summa, eaque scribatur in producto: sic $a^2\times a^3=a^5$. Productum enim $aa\times aaa=aaaaa$ (79).

§. III.

Divisio.

88 Lemma. *In partitione algebrica in dividendo delentur litteræ communes dividendo ac divisori; seu quæ utrobique reperiuntur: residuæ sunt quotus.* Sit.

$\frac{ab}{b}$; hoc est ab dividendus, b divisor: quotus erit a.

Dem. Si factum dividitur per factorem unum, quotus est alter factor (25): at in partione algebrica litteræ sunt factores, ex quibus emergit productum; diviso igitur facto per quaslibet ex litteris, quotus erit altera pars permanens, deletis utrobique communibus. Fac a esse$=5$, b autem$=10$, erit ab, scilicet productum $a\times b=50$. Divide $\frac{50}{10}=5$.

Ergo $\frac{ab}{b}=a=5$.

89 Probl. 1. *Quantitates incomplexas dividere per incomplexas.* Solut. Deleantur litteræ communes; reliquæ erunt quotus (per præc.) Coefficientes autem, si qui sunt, et dividi possunt, tractentur ut in divisione numerorum. Signa mutantur ut in multiplicatione; similia dant quotum positivum, diversa negativum. Ex. g. $\frac{8abc}{2bc}=4a$. Pariter $\frac{-bdb}{3d}=-2b$: et $\frac{-4abc}{-2ac}=+2b$. *Dem.* Divisor ductus in quotum restituit dividendum: ducatur $2bc\times4a=8abc$: similiter $3d\times-2b=-6bd$ demum $-2ac\times+2b=4abc$.

90 Probl. 2. *Quantitates litterales complexas dividere.* Solut. Eodem modo tractantur litteræ ut in probl. præc. Divisio autem procedet ut in numeris, incipiendo à primo membro, quotum extrahendo, multiplicando per divisorem, subducendo: residuum iterum tractando, donec nullum supersit operationi subjiciendum.

Exempl. Divid. $aa-ac+ab-bc$ (Quotus $a-c$

Divisor. $a+b$

Prod. quoti a in div. $aa+ab$

Alterum mem. $-ac-bc$

Divisor $a+b$

Prod. quoti c in div. $-ac-bc$

0

91 Schol. 1. Quemadmodum in multiplicatione exponentes adduntur, ita in divisione debent subtrahi, et residuum præbet exponentem quoti. Sic $\frac{a^4}{a^2}=a^2$. Idem enim exprimit, ac $\frac{aaaa}{aa}=aa=a^2$

92 Schol. 2. Quod si æquales sint exponentes, evanescunt, et valor quantitatis æqualis fit unitati. Sic $\frac{a^2}{a^2}=a^{2-2}=a^0=1$. Fac $a=10$: erit aa sive $a^2=100$. Jam si $\frac{100}{100}=1$: valor igitur hujus quoti $\frac{a^2}{a^2}=a^0=1$.

93 Schol. 3. Si autem contigerit, exponentem divisoris majorem esse altero dividendi, exponens quoti erit negativus: $\frac{a^2}{a^4}=a^{-2}$. Nam $2-4=-2$. Quantitas verò exponente negativo affecta, veluti a^{-2}, valorem habet æqualem fractioni cujus numerator est unitas, denominator vero ipse exponens sino positivo affectus. Unde valor $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$. Nam valor $a^{-2}=a^{2-2}=a^0=1$. Jam si $\frac{a^0}{a^2}=\frac{1}{a^2}$.

§. IV.

Fractiones litteris expressæ.

94 Defin. Fractio litteris expressa est quantitas à numeratore indicata, dividenda per de-

nominatorem. Undè quum divisio unius quantitatis per aliam prodere non potest, tunc ad modum fractionis scribitur. Ita $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem a dividendam per b, cujus quotus indicari non potest his litteris. Hoc pariter notavimus in fractionibus vulgaribus, à quibus desumendæ sunt regulæ pro fractionibus algebricis.

95 Probl. 1. *Fractiones algebricas ad eumdem denominatorem revocare.* Solut. Multiplicentur tam numerator quam denominator cujusvis fractionis per productum denominatorum aliarum fractionum; nova producta erunt fractio quæsita (54). Sint $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ad eumdem denominatorem reducendæ; erunt $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$ novæ fractiones ejusdem denominatoris, et valoris ac primæ.

96 Probl. 2. *Fractiones algebricas addere, aut subducere.* Solut. Ad eumdem denominatorem (per præc.) quum reduxeris, unam alteri signo additionis conjunge, si addendæ sint; aut subductionis, si subtrahendæ; subscripto communi denominatore. Sic in primo exemplo $\frac{ad+bc}{bd}$ erit additio: $\frac{ad-bc}{bd}$ erit subtractio.

97 Probl. 3. *Fractiones algebricas multiplicare.* Solut. Ducantur invicem numeratores, et denominatores, producta dabunt fractionem quæsitam: sic $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

98 Probl. 4. *Fractiones algebricas dividere.* Solut. Ducatur numerator dividendi in denominatorem divisoris; tum denominator in numeratorem. Primum productum erit numerator quoti; alterum denominator. *Dem.* Multiplicetur enim nova, quæ sic prodit, fractio per divisorem: clarum est proditurum esse dividendum: hoc ipsum in fractionibus vulgaribus supra art. 61 ostensum abundè manet.

CAPUT III.

Æquationes primi gradus.

§. I.

Prænotiones.

99 Limina jam analysis attigimus quam humani ingenii apicem jure meritò apellat Wolfius. Ea sanè est analysis mira inventio, ut vix quidquam ab humano intellecto felicius, utilius, atque elegantius excogitandum umquam concepi possit. Duplici methodo veritas aliqua inveniri potest, compositionis scilicet, et resolutionis: primam synthesim, secundam analysim appellant. Utriusque frequens usus in mathesi: nam in geometria elementari synthesim, analysim in sublimiori passim adhibemus. Quum ab una veritate cognita ad aliam gradum facimus, quasi à fundamentis ædificantes, synthesi utimur: dum verò quantitatem resolvimus, veluti partes segregando, analytica methodus dicitur, in qua ope æquationis veritas invenitur.

100 Defin. *Æquatio* est duplex ejusdem quantitatis expressio, quarum una alteri substituitur, ad detegendam quantitatem incognitam, sub alia expresione latentem. Hinc membra æquationis dicuntur expressiones signo æqualitatis conjunctæ: sic $8=6+2$, sunt membra hujusce æquationis: sinistri autem termini primum, dextri verò secundum æquationis membrum dicuntur.

101 Schol. 1. Ariadnes filo ad resolvenda problemata opus est; ne veluti in labyrintho Cretico errantes, nullum finem resolutioni imponamus. Hujusmodi fila sunt conditiones aliquæ, nexum cum quantitate incognita habentes. Hæ conditiones numeris, litteris, et signis exprimuntur; quibus positis, problematis *denominatio* fieri dicitur. Indè ex conditionibus, quippè inter ipsas, et incognitas, connexio intercedat, necesse est; veritas, sivè *æquatio* eruitur, expressionum permutatione. Porrò quum litteræ quantitatem incognitam exprimentes, nullo affectæ sunt exponente, æquationes primi gradus dicuntur; habent enim pro exponente unitatem: ex. gr. $3y+a=b-2y$. Quando verò eo devenitur, ut in uno membro cognitæ, in altero incognitæ reperiuntur, operatio explicit: jam enim valor incognitæ elucet; ut in præjacto exemplo $y=\frac{b-a}{5}$.

102 Schol. 2. Problemata alia sunt determinata, in quibus tot conditiones sunt, quot incognitæ: alia indeterminata, quæ plures continent incognitas, quam conditiones. Problema

determinatum primi gradus unicam solutionem admittit; indeterminatum plures. Axiomata, quibus æquationes innituntur, sunt sequentia. 1. Si æqualibus addas æqualia, summæ etiam erunt æquales. 2. Si æqualibus demas æqualia, residua, sivè differentiæ, remanent æquales. 3. Æqualia per æqualia multiplicata, aut divisa, dant producta æqualia, aut æquales quotos. 4. Æqualia pro æqualibus semper substitui possunt.

§. II.

Æquationum formatio et resolutio.

203 Defin. 1. *Æquationis* formatio est algebrica problematis expositio, nempè litteris comprehendere quantitates, atque earum rationes, cognitas ab incognitis ritè discernendo, ac separando. Plura sunt, quæ usu magis, quam regulis addiscuntur. Exempla nimirum tironum oculis subjicient, quæ longa verborum ambage vix perciperent.

104 Defin. 2. *Æquationis resolutio* est valoris incognitæ inventio. Invenitur autem ex cognitarum ad incognitas relatione. Rationes autem hujusmodi inclusæ sunt, atque abditæ in ipsis quantitatibus, ex quarum commixtione, ac separatione erui debent; non secus atque in nucleo latentes fructus, cortice rupto, aut disjuncto, apparent. Methodus autem hujusce separationis est earumdem quantitatum, sivè expressionum transformatio, quæ multiplici modo fieri potest.

I. Separatur *additione*: ipsi scilicet incognitæ, atque alteri membro æquationis aliam quantitatem addendo. Ex. gr. $x-a=b+c$; ergo $x-a+a=b+c+a$; et reductione facta: $x=b+c+a$. Hinc apparet quantitatem negativam ab uno ad aliud membrum æquationis traduci posse converso signo — in +, manente æqualitàte (axiom. 1.)

II. *Subductione.* In exemplo allato si $x+a=b+c$, possum auferre utrimque a, eritque $x+a-a=b+c-a$, et reducendo $x=b+c-a$. Hæc est praxis inversa præcedentis: scilicet quantitas positiva à membro ad membrum traducitur, converso signo + in —, sivè subtractione (axiom. 2.) Utraque methodus dicitur *transpositio.*

III. Separatur *multiplicatione*: hæc praxis plerumque locum habet in fractionibus: nam fractio evanescit ceteros terminos in suum denominatorem ducendo si $\frac{z}{a}=b$; duc utrumque membrum in denominatorem a, fitque $\frac{az}{a}=ab$, et facta divisione $z=ab$ (ax. 3.)

IV. *Divisione.* Nam si quantitas quantitatem multiplicat, per illam dividendo omnes æquationis terminos, à multiplicatione liberabitur, ac solitaria remanebit. Ex. gr. in æquatione $ab+c=bx$, dividendo omnes terminos per b, habebitur: $\frac{ab}{b}+\frac{c}{b}=\frac{bx}{b}$, quod divisione facta dat $a+\frac{c}{b}=x$ (ax. 3.)

V. *Valorem incognitæ sumendo.* Hoc impor-

tat aliam quantitatem æqualem in æquatione ipsi incognitæ substituere: ex. gr. si $x=a+y$, ipsi x substituo $a+y$, illiusque valorem sumo (ax. 4.) Hoc passim in operationibus algebricis occurrit. Problematum resolutione hæc omnia clariora evadent.

§. III.

Problemata.

105 Probl. 1. *Quantitatem incognitam à cognita per additionem aut subductionem separare.* Solutio erit exemplum. Sit *Andronicus 60 annorum, cujus filius Cajus 15 numerat.* Quæritur *quo anno, patris ætas dupla futura sit ætatis filii.* Solut. Fiant $60=a$, et $15=b$: numerus annorum, in quibus conditio implenda erit $=y$. Hæc est problematis *denominatio.* Jam quum ex utraque parte numerus annorum $=y$ debeat excurrere, ut ætas Caji æqualis sit dimidio ætatis Andronici; erit ætas Andronici in tempore, quo implenda est conditio $=a+y$: atque ætas Caji $=b+y$: quumque $a+y$ sit duplum $b+y$; ut fiat æquatio, erit $a+y=b+y+b+y$; et reducendo $a+y=2b+2y$. Fiat *transpositio* incognitæ: $a=2b+2y-y$ (per II. num. 104), et facta reductione $a=2b+y$, iterum transponatur $2b$, eritque $a-2b=y$. En jam incognitam in altero membro separatam, atque æquatam cum cognitis. Igitur problema resolutum est formula generali ad omnes casus similes applicabili. Substituantur numeri pro casu præsenti assumpti. Quum $a=60$, ac $b=15$; erit $60-2b=60-30=y$. Jam $=60-30=30$.

Igitur 90 ætatis anno erit Andronici ætas dupla ætatis Caji. Hic quidem tum habebit 45 annos, dimidium 90.

En typum calculi:

Ætas Andronici tempore implendæ conditionis $=a+y=b+y+b+y$.

Reducendo $a+y=2b+2y$

Et trasponendo $a=2b+2y-y$

Et reducendo $a=2b+y$

Iterum transponendo $y=a-2b=60-30=30$.

Igitur $y=30$, et $a+y=60+30=90$.

106 Corol. Formula hæc œcumenica ad omnes casus est applicanda, in quibus similes conditiones proponantur. Nam si ætas filii dimidium ætatis parentis superaret, eadem æquatione $a-2b=y$ inveniretur utriusque ætas. Fac non 15, attamen 35 habere Cajum; quoto amborum anno ætas unius fuit alterius dupla? Quum $a=60$, et $2b=70$; erit $y=60-70=-10$. Hoc est anno $60-10$ adimpleta fuit conditio, anno scilicet 50 ætatis Andronici, et $35-10$ ætatis Caji$=25$. Planum enim est 50, duplum esse 25.

107 Probl. 2. *Incognitam multiplicatione se parare.* Exempl. *Alexander ad Darbellam exercitum Darii fudit: hujus quarta pars in campo jacuit; duæ quintæ partes captivæ remanserunt, ad quadraginta duo millia fuga subducti sunt. Quot militibus instructus Darius prælium commisit?* Solut. Fugitivos milites scilicet 42000 dico a; exercitum universum dico x: jam quum hujus quarta pars interierit, erit$=\frac{x}{4}$, captivi

erunt $\frac{2x}{5}$: quare denominatio problematis erit $\frac{x}{4}+\frac{2x}{5}+a=x$. Primam fractionem, tollo, multiplicando per denominatorem 4 omnes terminos: eritque $x+\frac{8x}{5}+4a=4x$. Secundam etiam pari methodo multiplico, ducendo omnes terminos in denominatorem 5; fitque $5x+8x+20a=20x$, et facta reductione $13x+20a=20x$, et trasponendo $20a=20x-13x$, quod facta reductione dat $20a=7x$. En æquationem, quam adhuc ad terminos problematis reducere oportet, multiplicando a per 20, sive $42000\times 20=840000$, dividenda per $7=120000$. Hic numerus conditiones problematis implet.

Nam	30000	= quarta pars. 120000.
	48000	duæ quintæ partes
	42000	fugitivi.
	120000	

Animadvertendum tamen in problemate non ad finem historiæ, sed ad resolutionis commoditatem militum numerum exactum esse.

18 Probl. 3. *Incognitam divisione separare.* Exempl. *Cæsar, et Drusus pecunia instructi, bibliopolæ officinam ingredientes, libros empturi, primus 26 aureos alter ad 44 impendit. Domi pecunia residua numerata, Cæsar invenit, se quadruplo plus habere, quam Drusus. Quæritur utriusque pecunia ante impendium.*

Solut. Quoniam aurei impensi in libros noti sunt, unica incognita restat, numerus scilicet aureorum ante impendium; hunc voco x: erit igitur $x-26$ pecunia Cæsaris: atque $x-44$ residuum Drusi. Supponimus autem Cæsaris esse quadruplum alterius: habebimus igitur æquationem, $x-26=4(x-44)$; et facta multiplicatione, $x-26=4x-176$. Jam transponendo fit $-26=4x-x-176$, et reductione facta $-26=3x-176$. Rursus transportatione fit $176-26=3x$: ac reducendo $150=3x$. Quare $x=\frac{150}{3}=50$. Eruitur jam residuum Cæsaris esse $50-26=24$. Supponitur autem esse quadruplum residui Drusi; erit igitur hoc$=\frac{24}{4}=6$. Addantur residua expensis, fitque $26+24=50$: $6+44=50$: adeòque benè procedit operatio.

109 Probl. 4 *Incognitas substitutione separare.* Exempl. Datis summa duarum quantitatum$=a$, earumque differentia$=b$, quantitates invenire. Solut. Ut facilius menti occurrat objectum determinatum, fac $a=60$, et $b=8$; incognita autem major sit$=x$, minor$=y$. Erit igitur $x+y=a$, et $x-y=b$. Jam transponendo fiet $x=a-y$: hanc igitur substituo sibi æquali x (ax. 4, n. 102). Erit igitur in altera æquatione $x-y=b$; $a-y-y=b$; et reducendo $a-2y=b$; et transponendo $a-b=2y$; et dividendo $y=\frac{a-b}{2}=\frac{60-8}{2}=\frac{52}{2}=26$. Erit igitur $y=26$. Ex hac æquatione altera etiam quantitas innotescit: nam $x+y=a=60$. Erit igitur 34: nam $26+34=60$; quorum differentia$=8$. Quod si non jam cum y,

sed cum x operatio instituta fuisset, loco æquationis $\frac{a-b}{2}=y$ inventum fuisset $\frac{a+b}{2}=x$.

110 Corol. Ex problematis solutione theorema deducitur, veritatem his terminis universalioribus enuntians. *Datis summa, et differentia duarum quantitatum, major æqualis est dimidiæ summæ, cum dimidia differentia: minor æqualis dimidia summæ, dempta dimidia diffetentia.* Veritas manifesta ex est formula æquationum: nam major quantitas $x=\frac{a+b}{2}$, minor verò $y=\frac{a-b}{2}$.

111 Exempl. 2. *Antonius Lepido dixit: Si unum ex aureis, quos penes me repositos habeo tibi darem, æqualem summam haberemus: si tu unum ex tuis mihi traderes, ego duplum haberem. Quot aureos unusquisque habet?* Solut. Fiat summa Antonii$=x$; Lepidi verò$=y$. Jam ex prima conditione problematis eruitur, $x-1=y+1$.

Atque tiam ex secunda, $x+1=2y-2$.

Ergo transponendo, $x=y+1+1$, sivè $x=y+2$,

et substituendo $y+2+1=2y-2$, sivè $y+3=2y-2$;

et transponendo, $y=2y-2-3$, sivè $y=2y-5$,

ac demum $5=2y-y$, sivè $5=y$,

eadem methodo inveniri potest summa Antonii, $x=7$.

112 Exempl. 3. Tres incognitas referens. *Cajus, et Popilius mercatura 1000 aureos adquisierunt: Cajus et Titius 1100: Popilius et Ti-*

tius ad 900. *Quæritur singulorum lucrum.* Solut. Sit summa Caji $=x$: Popilii $=y$: Titii verò $=z$. $1000=a$: $1100=b$: $900=c$. Jam ex conditionibus problematis hujusmodi æquationes eruuntur

$$x+y=a$$
$$x+z=b$$
$$y+z=c$$

Transposit. ope duæ 1.mæ reducuntur ad $x=a-y$

$x=b-z$

et substitutione....... $a-y=b-z$

et transpositione..... $a=y+b-z$

atque iterum.......... $y=a-b+z$

Pariter ex æquatione 3.ª deducitur......... $y=c-z$

et substitutione....... $c-z=a-b+z$

et transpositione..... $c=a-b+z+z$

sivè reducendo .... $c=a-b+2z$

deindè.................... $c-a+b=2z$

demum...... $z=\frac{c-a+b}{2}=\frac{900-1000+1100}{2}$

Invento hoc valore $z=500$; quum $y=c-z=900-500$, erit $y=400$; et $x=a-y=1000-400=600$.

113 Schol. Metodos problemata indeterminata solvendi consultò omittimus; prolixioris enim industriæ ac provectioris solertiæ sunt, quam quæ tironibus, vix primum limen matheseos ingressis, proponuntur. Porrò problemata indeterminata jam diximus plures solutiones admittere: ex gr. duos numeros invenire, quo-

rum summa $=14$: tot enim solutiones in numeris positivis admittit, quot conjuctiones in numeris componentibus summam: in negativis verò aut fractis innumeras. Universim animadvertere sufficiat, æquationes ita tractandas esse, ut demum in uno membro incognita uniea reperiatur, in altero verò incognita cum cognitis. Tum assumpto valore positivo atque integro, huic secundæ applicetur, ut valor primæ determinetur.

CAPUT QUARTUM.

De Potentiis, et radicibus.

§. I.

Prænotiones.

114 Defin. 1. Numerus quicumque in se ductus productum efficit, quod *quadratum* dicitur: numerus autem, qui in se ductus fuit, *radix cuadrata.* Ex *g.* $2\times2=4$. Numerus 4, consideratus ut productus à 2×2, est quadratum, ac 2 ejus radix, quæ et prima potentia dicitur. Pariter in litteris quantitas quæcumque litteris expresa, est prima potentia: in se ipsam ducta efficit quadratum, seu secundam potentiam, veluti de numeris dictum est. Sic a est prima potentia: productum verò $a\times a=aa$ quadratum, cujus radix quadrata a est prima potentia. Universim quilibet numerus considerari potest, ut prima potentia, cujus quadratum est productum numeri in se ipsum ducti.

115 Defin. 2. Quando autem productum

tius ad 900. *Quæritur singulorum lucrum.* Solut. Sit summa Caji $=x$: Popilii $=y$: Titii verò $=z$. $1000=a$: $1100=b$: $900=c$. Jam ex conditionibus problematis hujusmodi æquationes eruuntur

$$x+y=a$$
$$x+z=b$$
$$y+z=c$$

Transposit. ope duæ 1.mæ reducuntur ad $x=a-y$
$x=b-z$

et substitutione....... $a-y=b-z$
et transpositione..... $a=y+b-z$
atque iterum.......... $y=a-b+z$
Pariter ex æquatione 3.a deducitur......... $y=c-z$
et substitutione....... $c-z=a-b+z$
et transpositione..... $c=a-b+z+z$
sivè reducendo....... $c=a-b+2z$
deindè.................. $c-a+b=2z$

demum...... $z=\frac{c-a+b}{2}=\frac{900-1000+1100}{2}$

Invento hoc valore $z=500$; quum $y=c-z=900-500$, erit $y=400$; et $x=a-y=1000-400=600$.

113 Schol. Metodos problemata indeterminata solvendi consultò omittimus; prolixioris enim industriæ ac provectioris solertiæ sunt, quam quæ tironibus, vix primum limen matheseos ingressis, proponuntur. Porrò problemata indeterminata jam diximus plures solutiones admittere: ex gr. duos numeros invenire, quo-

rum summa $=14$: tot enim solutiones in numeris positivis admittit, quot conjuctiones in numeris componentibus summam: in negativis verò aut fractis innumeras. Universim animadvertere sufficiat, æquationes ita tractandas esse, ut demum in uno membro incognita unica reperiatur, in altero verò incognita cum cognitis. Tum assumpto valore positivo atque integro, huic secundæ applicetur, ut valor primæ determinetur.

CAPUT QUARTUM.

De Potentiis, et radicibus.

§. I.

Prænotiones.

114 Defin. 1. Numerus quicumque in se ductus productum efficit, quod *quadratum* dicitur: numerus autem, qui in se ductus fuit, *radix cuadrata.* Ex *g.* $2\times2=4$. Numerus 4, consideratus ut productus à 2×2, est quadratum, ac 2 ejus radix, quæ et prima potentia dicitur. Pariter in litteris quantitas quæcumque litteris expresa, est prima potentia: in se ipsam ducta efficit quadratum, seu secundam potentiam, veluti de numeris dictum est. Sic a est prima potentia: productum verò $a\times a=aa$ quadratum, cujus radix quadrata a est prima potentia. Universim quilibet numerus considerari potest, ut prima potentia, cujus quadratum est productum numeri in se ipsum ducti.

115 Defin. 2. Quando autem productum

primum iterum in radicem ducitur, jam ad cubum elevatur, qui etiam tertia potentia dicitur. Sic $2\times2\times2=8$ dicitur tertia potentia, seu cubus. Radix autem cubica est ipsamet radix quadrata, prout secundæ multiplicationi subjacens. Ad quantitates litterales similiter hæc applicanda sunt. Nam $a\times a\times a=aaa$ cubus dicitur, seu tertia potentia. Compendii tamen causa potentiæ per exponentes enuntiantur: ex. g. a^2, a^3, quod indicat quantitatem elevatam ad secundam, tertiam etc. potentiam, quam numerus exponit.

116 Defin. 3. Elevatio ad quartam, quintam, sextam etc. potentias fit perpetua multiplicatione novi producti in radicem $2\times2\times2\times2=4\times2\times2=8\times2=16$, et in litteris $a\times a\times a\times a=a^2\times a\times a=a^3\times a=a^4\times a=a^5$, etc. Quarta potentia dicitur etiam *quadrato-quadratum*; quinta *quadrato-cubus*, sexta *cubo-cubus*: quibus barbaris nominibus satius erit parcere, quum per quartam, quintam etc. potentiam planius res manifestetur.

117 Defin. 4. Quadratum, cubus aliaque tum dicuntur perfecta, quum oriuntur ex multiplicatione radicum sine ullo residuo, ut in exemplis hactenus adductis. Imperfecta verò, quando, extracta radice, aliquod residuum superest: ut 6, in quo præter quadratum 4, adhuc residuum 2 superest, dicitur quadratum imperfectum.

118 Defin. 5. Elevatio fractionum ope multiplicationis utriusque numeratoris et denominatoris obtinetur: ex. gr. $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$, quadratum $\frac{3}{4}$; cubus verò $\frac{3}{4}\times\frac{9}{16}=\frac{27}{64}$. Planum est fractiones per elevationem deprimi, per extractionem autem radicum augeri (59). Nam si fractio $\frac{1}{2}$ elevetur ad quartam potentiam, hoc ordine decrescit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$. Extracta verò $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ erit $\frac{1}{2}$, cujus valor octuplo major est alterius.

119 Schol. Signum $\sqrt[4]{\ }$ nuper allatum indicat radicem quartæ potentiæ illius quantitatis, cui præfixum est. Universim signum $\sqrt{\ }$ denotat radicem quadratam, $\sqrt[3]{\ }$ cubicam, $\sqrt[4]{\ }$ quartæ potentiæ; $\sqrt[5]{\ }$ quintæ etc. Hujusmodi autem quantitates tali signo præfixo indicatæ, radicales appellantur.

§. II.

Potentiæ et radices monomiæ.

120 Probl. 1. *Quantitatem monomiam ad assignatam potentiam elevare.* Solut. Quantitas monomia potest esse affecta coefficientibus, atque exponentibus: ex g. $2a^2b^3$. Jam 1. coefficiens elevetur ad potentiam assignatam (116). 1. Exponens multiplicetur per numerum indicantem gradum potentiæ, ad quam elevanda est quantitas. Exempl. $2a^2b^3$ ad tertiam potentiam evehenda sit: erit $8a^6b^9$ ejus cubus. *Dem.* Hac operatione omnes partes monomii ad datam potentiam evehuntur. Nam $2\times2\times2=4\times2=8$. Deindè $a^2\times a^2\times a^2=a^6$ (87): $b^3\times b^3\times b^3=b^9$.

121 Probl. 2 *Radicem dati gradus ex monomiis extrahere.* Solut. Inverso modo atque in præcedenti probl. operandum est. 1. Ex coefficiente extrahatur radix, methodo mox tradenda. 2. Exponens dividatur per numerum indicantem gradum potentiæ, ad quam evecta est quantitas. Sic in allato exemplo num. præc. radix cubica $8a^6 b^9$ est $2a^2 b^3$. Jam enim demonstratum est ex multiplicatione hujus quantitatis modo indicato, cubum oriri; quapropter per resolutionem subindè restitui debet.

112 Schol. 1. Quando ocurrat quantitas, cujus exponens sit fractio, ex g. $a^{\frac{2}{3}}$, illius numerator pro exponente potentiæ, denominator vero pro exponente radicis accipi potest: scilicet $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$.

123 Schol. 2. Duæ quantitates radicales possunt ad eumdem exponentem radicis trahi sine valoris mutatione. Sit $\sqrt[2]{a^3}$ et $\sqrt[3]{a^5}$; exprimantur hac forma: $a^{\frac{3}{2}}$ et $a^{\frac{5}{3}}$: deinde fractiones reducantur ad eumdem denominatorem, erunt $\frac{9}{6}$ et $\frac{10}{6}$: demum $a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{9}{6}}=\sqrt[6]{a^9}$: et $a^{\frac{5}{3}}=a^{\frac{10}{6}}=\sqrt[6]{a^{10}}$.

124 Corol. 3. In quantitate monomia potest occurrere, ut unus ex factoribus signo radicali afficiatur; alter verò extra signum radicale sit: ut uterque sub eodem signo comprehendantur, potest elevari ad potentiam indicatam in signo

radicali, qui non est affectus, ac tum cum altero collocari: ex g. $a^3 \sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{(a^3 b)}$. Vicissim factor comprehensus signo radicali ab illo educi potest, extrahendo ab ipso radicem indicatam, ut in exemplo allato $\sqrt[3]{(a^3 b)}= a^3 \sqrt{b}$. Quod quidem ad numeros extendi potest: nam $\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=3\sqrt{5}$; et $\sqrt{28}=\sqrt{4\times 7}=2\sqrt{7}$.

125 Probl. 3. *Quantitates radicales addere vel subducere.* Solut. Si exponens signi radicalis est idem, eademque quantitas illi subjecta, addantur, vel subducuntur factores signum radicale præcedentes: ex g. $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$. Pariter $\sqrt{63}+\sqrt{28}=3\sqrt{7}+2\sqrt{7}=5\sqrt{7}$.

126 Probl. 4. *Quantitates radicales multiplicare et dividere.* Solut. Reducantur ad eumdem exponentem signi radicalis (123): deinde multiplicentur quantitates signum radicale præcedentes inter se: postea quantitates sub signo radicali, comprehensæ: ex g. $a\sqrt{c}\times b\sqrt[3]{d^2}$: erit primò $ac^{\frac{1}{2}}\times bd^{\frac{2}{3}}$ (122): deindè ad eumdem denominatorem reductæ fractiones, erunt $ac^{\frac{3}{6}}\times bd^{\frac{4}{6}}$ (123); quod, mutata expressione, convertitur in $a\sqrt[6]{c^3}\times b\sqrt[6]{d^4}$; ac demum facta multiplicatione$=ab\sqrt[6]{c^3 d^4}$ (124). Et quoniam divisio est multiplicationis disolutio; ut quantitates radicales dividas, pri-

mum quantitates extra signum radicale positas, deindè, quæ sub signo continentur, oportet dividere. Sic $ab\sqrt[2]{xy}$ per $-a\sqrt[2]{x}$ divisum, quotum exhibet $-b\sqrt[2]{y}$: et $a^2\sqrt[3]{cd}$ divisum per $a^2\sqrt[3]{fg}$, quotum dabit $\sqrt[3]{\frac{cd}{fg}}$: demum per n quamcumque radicem indicando $x\sqrt[n]{a}$ divisum per $y\sqrt[n]{b^2}$, pro quoto dabit $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{a}{b^2}}$ etc.

127 Schol. 1 Quantitatis negativæ a omnes potentiæ pares sunt positivæ, impares verò negativæ. Nam $-a \times -a = a^2 \times -a = -a^3 \times -a = a^4$ etc. Quapropter in monomio a^2 radix est æquivoca: potest enim esse vel $-a$, vel $+x$. Jam si in aliqua æquatione extrahenda sit radix quadrata, veluti in $x^2 = a^2 - b^2$, radici præfigendum est signum dubium $x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$.

128 Schol. 2. Qui radicem quadratam monomii $-a^2$ requirit, oleum, et operam perdit. Nam $-a^2$ neque provenit ex $a \times a$, neque ex $-a \times -a$; in utroque enim casu productum est positivum. Quum ergo $-aa$ non possit esse productum quantitatis ullius realis in se ipsam ductæ, quadratum $-aa$ est chimæricum: hinc $\sqrt{-a^2}$ dicitur quantitas *imaginaria*, aut *impossibilis*.

§. III.

Radix quadrata quantitatum complexarum, et numerorum.

129 Theor. *Quadratum binomii constat ex quadrato primi termini, duplo producto primi in secundum, et quadrato secundi. Dem.* Quævis quantitas binomia repræsentari potest ab hac formula $a+b$. Elevetur ad quadratum $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$; et reducendo $a^2 + 2ab + b^2$. Constat ergo quadrato primi termini a^2, duobus productis $a \times b$, et quadrato secundi termini b^2. Eadem demonstratio in numeris exhiberi potest. Sit $a=20$, $b=5$; quadratum $25 \times 25 = 625$. Quadratum $20 \times 20 = 400$; duplum productum $20 \times 5 = 200$: quadratum $5 \times 5 = 25$: summa $400 + 200 + 25 = 625$.

130 Probl. 1. *Ex quantitate complexa litteris expressa radicem quadratam extrahere.* Solut.

Exemp. Quadr. $a^2 + 2ab + b^2$. Radix $a+b$.

$$\begin{array}{l} -a^2 \\ \hline 2ab+b^2 \\ 2a+b \\ -2ab-b^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

1 Extrahatur à primo termino radix, eaque scribatur ad latus ut in divisione fieri solet: multiplicetur radix per se ipsam, sivè ad quadratum elevetur; deindè subducatur à primo

termino. 2. In residuo contineri debet duplum productum primi termini in secundum; et quadratum alterius partis: accipiatur duplum radicis inventæ; nempe $2a$, illoque veluti divisore residuum dividatur, $\frac{2ab}{2a}=b$. Adscribatur hic terminus radici, deindè adjungatur alteri termino $2a$; fit $2a+b$. 3. Multiplicetur hæc quantitas per alterum radicis terminum, erit $2ab+b^2$. Demum subtrahatur à priori residuo; nihil remanet. Est ergo qnantitas assignata quadratum perfectum. Demonstratio ex ipsa operatione est manifesta.

131 Corol. Eadem methodo procedi ulterius deberet, si plures essent termini in quantitate assignata pro extractione radicis: duplum nimirum radicis inventæ pro divisore usurpando; quotum verò alteri radicis parti adscribendo. Nam si prædicta quantitas alio termino augeretur, putà c, quadratum esset $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$. Radix $a+b+c$.

$$\begin{array}{r} -a^2 \\ \hline 2ab+b^2 \\ 2a+b \\ -2ab-b^2 \\ \hline 2ac+2bc+c^2 \\ 2a+2b+c \\ -2ac-2bc-c^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

In hac ultima operationis parte sumitur etiam duplum radicis inventæ, nimirum $2a+2b$; per hanc dividitur residuum; quotiens est c, scriptum prius in radice; subinde adjungitur divisori; ac demum tota quantitas per inventum terminum multiplicatur, ac subtrahitur productum à residuo.

132 Schol. Si aliquis ex terminis esset negativus in radice, duplum productum deberet esse negativum. Duplex verò quadratum utriusque termini positivum. Nam $(a-b)(a-b)$ dat hujusmodi productum $a^2-2ab+b^2$. Quadratum igitur cujuscumque termini sivè positivi, sivè negativi, semper est positivum.

133 Lemma. *Radix numerica ad quadratum elevata non potest plures notas continere, quam duplum earum, quæ in radice inveniuntur: quandoquè tamen poterit una minus inveniri.* *Dem.* Numeri inter 1 et 10, non possunt plures notas, quam duas in quadratis habere; quia $10\times10=100$ est primus numerus, qui tribus notis constat. Similiter $100\times100=10000$, primus etiam est, qui ex quinque notis componitur, et sic deinceps. Omnes igitur numeri inter 1 et 10 duas tantum: á 10 usque ad 100 quatuor tantum notas exhibere possunt in quadratis; à 100 usque ad 1000 non plures, quam sex continere etc. Quod autem unica tantum nota á duplo possit deficere productum, eadem inductione demonstratur. Nam 10 in quadrato tres habet, 100 quinque, 1000 septem etc. Omnes autem hi numeri sunt primi in serie, qui una nota augeantur.

134 Corol. Facilè deducitur ex theoremate præcedente, quot notis constare debeat radix cujuscumque cuadrati. Dividatur nimirum numerus, à quo extrahenda est radix per classes à dextra sinistram versus; in qualibet verò classe duo tantum notæ comprehendantur: ultima autem classis unica etiam nota constare potest. Sit numerus 588289, à quo extrahenda sit radix; dividatur in classes modo jam indicato: peracta, divisione, membra erunt 58, 82, 89. Tribus igitur notis radix constare debet. In sequenti autem numero unica ad sinistram nota invenitur 6, 42, 27, 39. Quatuor deindè in radice notæ inveniuntur.

135 Schol. In sequenti schemate radices, et quadrata numerorum ab 1 ad 9 exhibentur, ut faciliùs in sequentibus operationibus procedatur:

Radices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Quadrata, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

136 Probl. 2. *Ex quantitate numerica radicem quadratam extrahere.* Solut.

Exempl. Quadr. 58, 82, 89. Radix $a+b+c$ 767

$$\begin{array}{rr}
 & a^2=49 \\
\hline
 & 982 \\
2a+b= & 146 \\
2ab+b2= & 876 \\
\hline
 & 10689 \\
2a+2b+c= & 1527 \\
2ac+2bc+c^2= & 10689 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

1. Numerus dividendus est in classes (134). 2. Incipiendo à primo membro à sinistris, quærenda est radix quadrata dati numeri, aut quadrati proximè inferioris; in exemplo 58 quadratum proximum est 49. Ab hoc radix mutuetur, quæ, loco pro numero radicali assignato, scribenda erit: deindè elevetur ad quadratum, ac subducatur à primo membro. 3. Residuo 9 secunda classis adjungitur, ut secundæ operationi inserviat. Jam duplum radicis inventæ accipiendum est, nimirum 14, quod loco divisoris est usurpandum; atque sub penultima nota 8 scribendum: nam ad has tantum extenditur divisio. Quotus inventus 6 radici, et divisori adscribitur, atque per ipsum numerus 146 multiplicatur: deindè productum 876 subducitur á primo residuo 982. Hic operatio secundi membri explicit. 4. Residuo 106 tertia classis 89 adjungitur; pro divisore ut supra, duplum totius radicis inventæ usurpatur, nimirum 152, quod ad penultimam notam attingere debet. Divisione peracta, quotus 7 scribitur ut supra tam radici, quam divisori, per quem etiam auctus multiplicatur, ac deinde productum à tertio membro subducitur. Nihil remanet. Radix ergo quæsita est 767. *Dem.* Quæ hic in numeris peracta sunt, omninò cum his quæ supra (130) in litteris exhibuimus, conveniunt, atque ex numero 129 facilè demonstrantur. Ideo etiam in litteris ad latus eadem operatio indicata est. Ut majori in luce praxis indicata collocetur, juvat schema sequens ob oculos ponere, quo tam synthesis, quam analysis qua-

drati exhibetur. Insimul autem quare notæ eo, quo jussæ sunt, ordine collocari debeant, ostenditur.

		$a \quad b \quad c$
588289	Radix	$700+60+7$
490000	Quadr.	$a^2=490000$
98289	dup. prod.	$2ab=84000$
14600	Quadr.	$b^2=\ 3600$
87600	dup. prod.	$2ac=\ 9800$
10689	dup.	$2bc=\ 840$
1527	Quadr.	$c2=\ 49$
0		588289

137 Probl. 3. *Ex quadrato imperfecto radicem extrahere.* Solut.

Exempl. Quadr. 6, 42, 27, 39. Radix 2534

4
242
45
225
1727
503
1509
21839
5064
20256

Residuum 1583

138 Schol. 1. Quemadmodum in divisione multiplicatio divisorum in quotum ostendit, num rectè processerit operatio, pariter in extractione radicum multiplicatio radicis inventæ in se ipsam reddere debet quadratum. Quod si residuum aliquot supersit, ejus additione ad inventum productum, integram summan restitui necesse est.

Duc $2534 \times 2534 = 6421156 + 1583 = 6422739$.

139 Schol. 2. Ea est proprietas divisionis, ut invento uno ex factoribus dividendi, ac per ipsum facta divisione, alter factor habeatur (25). Quamobrem productum notum per notam radicem dividendo, quotus est altera radix. Jam in operationibus præcedentibus, quotiescumque nova sectio demittitur, per duplum radicis dividitur, sicque altera radix innotescit. Nam jam ostensum est duplum radicis inventæ esse unum ex factoribus producti, à quo radix extrahitur: adeòque in divisione alterum factorem latentèm tradere debet.

140 Schol. 3. Si aliquando occurrat, ut duplum radicis majus sit membro tractando; scripto *zero* in radice, novum membrum demittitur, atque operatio de more instauratur.

141 Schol. 4. Numerus sumptus in problemate, præter quadratum radicis continet residuum 1583: ideòque quadratum imperfectum dicitur. Nam neque quadratum est numeri 2534 neque 2535 unitate majoris. Major enim est primo 1583 unitatibus. Numeri autem 2535 quadratum est 6426225, quod ipsum 3486 unitatibus superat. Radix ergo prædicti numeri inter utramque radicem 2534, ac 2535 existit.

Erit igitur numerus 2534, auctus parte unitatis, quæ nec numero integro, nec fractione alitatis, quæ nec numero integro, nec fractione aliqua adamussim exprimi potest. Ad radicem tamen veram semper magis ac magis possumus accedere ope decimalium, ut in sequenti.

142 Prob. 4. *Radicem quadratam per aproximationem extrahere.* Solut. Extracta radice quadrati imperfecti, ut in problemate præcedenti, residuo addantur tot cyphrarum paria, quot libuerit; deindè extractio radicis de more instituatur. In radice autem inventa tot notæ decimalis à dextris resecari debent, quot cyphrarum paria adjecta sunt. Radix eo erit accuratior, quo plures notæ aggregatæ fuerint. In residuo probl. præc. addantur unum, aut duo cyphrarum paria, atque operatio instauretur, ut in exempl. ubi residuum 1583, addendo unum cyphrarum par, evadit 158300. Radix 2534, 31.

$$\begin{array}{r} 50683 \\ 152049 \\ \hline 625100 \\ 506851 \\ \hline 118239 \text{ etc.} \end{array}$$

143 Schol. 1. In allato exemplo, quod ulterius protrahi posset in infinitum, nova residua eodem modo tractari deberent, atque in duobus præcedentibus peractum est. Hic jam ad $\frac{5}{10}$ pro vera radice numeri præfati accessimus. Ceterum demonstratio eadem est, ac quæ in fractionibus decimalibus pro simili casu usurpata fuit (66).

144 Schol. 2. Si radix quadrata alicujus numeri major est numero integro, at minor numero integro sequente, exprimi non poterit accuratè, neque per integrum, neque per fractionem propriam integro abjectam. Quocumque enim modo tractetur, numquam ad integram reduci poterit. Sit 6 ex. g. à quo extrahitur radix quadrata: hæc neque 2 neque 3 exprimi adamussim potest. Fac $= 2\frac{1}{2}$, hæc inquam radix accurata non est. Nam infractionem impropiam transformata $= \frac{5}{2}$, atque ita ad quadratum elevata $\frac{25}{4}$, rursus prodit talis fractio quæ integro æquari non potest. Idem tentando cum quacumque alia fractione notæ 2 adjuncta invenies.

145 Schol. 3. Hujusmodi radices vocantur *irrationales*, *surdæ incommensurabiles*. Contra radices numero quorum valor integris, aut fractionibus exactè exprimi potest, *rationales*, *commensurabiles* dicuntur.

146 Schol. 4. In fractionibus vulgaribus, ut ad quadratum eleventur, aut ut ab ipsis radix quadrata extrahatur, tam numerator, quam denominator tractari debent: ex g. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Quando autem ambo fuerint quadrata imperfecta, consultius erit easdem in decimales convertere (65), ac postea radicem extrahere. Curandum tamen, ut notæ decimales sint pares: ex. g. si ex 7,329 extrahenda sit radix, adjuncto zero fit par numerus decimalium; commodiorque evadit calculus.

§. IV.

Æquationis secundi gradus.

147 Defin. Æquationes secundi gradus seu quadraticæ dicuntur illæ, in quibus æquatio, quum à fractionibus, quæ incognitam in denominatore continent, liberata fuerit, major incognitæ potestas sit secunda, seu quadratum. Quod si nulla alia potestas incognitæ admisceatur, æquatio erit *quadratica pura*; sin verò prima etiam incognitæ potestatem æquatio contineat, erit *quadratica affecta*. Ut autem præparetur æquatio ad separationem incognitæ, opus est primum ope transpositionis incognitam à cognitis separare (104): deindè quadratum incognitæ à coefficiente liberare; nisi unitas coefficiens quantitatis sit, seu quod idem est, nullo coefficiente notetur: ac demum si negativum fuerit, ope multiplicationis in positivum convertere; quod multiplicando totam æquationem per -1 obtinetur. His peractis, si æquatio fuerit *quadratica pura*, valor incognitæ statim elicitur, utrinque radicem quadratam extrahendo, quod si æquatio *quadratica affecta* extiterit, oportet primum quadratum in membro incognitæ complere; quod utrique æquationis membro quadratum dimidiæ quantitatis cognitæ, qua prima incognitæ potestas afficitur, adjungendo obtinetur; ut radix deindè utrobique extrahatur, ac per transpositionem valor incognitæ habeatur: ut singillatim in

sequentibus problematis exponemus.

148 Probl. 1. *Æquationem quadraticam puram resolvere.* Solut. Termini æquationis methodo pro æquationibus primi gradus præscripta ita tractandi sunt, ut demum incognita in uno membro, in altero autem cognitæ quantitates appareant. Deindè extractio radicis ex utroque membro instituenda est; ac demum valor investigandus. Animadvertendum tamen, ne quadratum incognitæ sit negativum, tum enim transpositione fieri deberet positivum. Jam sit $x^2 - a^2 = b^2$: erit transponendo $x^2 = a^2 + b^2$; atque extracta radice $x = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)}$. *Dem.* Si æqualia sunt quadrata, æquales radices habere debent: nam iidem factores eadem producta debent dare. Potest autem eadem radix esse, vel positiva, vel negativa, ut quadrata æquentur (127). Prefigendum igitur est signum dubium.

149 Probl. 2. *Æquationem quadrati imperfecti resolvere.* Solut. Quum incognita ad secundam potentiam elevata, alteri quantitati notæ per multiplicationem mixta est, tunc 1.° complendum est quadratum, dimidium quantitatis notæ incognitam multiplicantis utrique membro adjungendo. 2.° Radix ab utroque membro extrahenda est; ita incognitæ valor facilè invenietur; debet enim alteri solis cognitis constanti æquari. Sit $x^2 - ax = b$. Elevetur a ad quadratum, dimidium ipsius sumendo, erit $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. Hoc utrique æquationis membro adjunc-

to, fit $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b$. Extracta radice primi membri erit $x - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}$: ac demum $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}$.

150 Exempl. 1. Esto summa duorum numerorum $= 10$; eorum productum $= 16$. Qui erunt factores? Solut. Summam dico a, productum b. Factores vero unum dico x, alterum y. Ex conditionibus problematis fit aquatio $x + y = a$, et $xy = b$.

Diende transp.	$x = a - y$
Et substit.	$(a - y)\, y = b$
Et facta multipl.	$ay - y^2 = b$
Et mutando signa	$y^2 - ay = -b$
Complendo quad.	$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$
Extracta radice	$y - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$
Demum	$y = \frac{a}{2} + a\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$

Quum incognita segregata sit, atque æquata cum notis, nihil restat nisi ut valor cognitarum nitidè exponatur. Jam $a = 10$: quadratum $a = 100$: igitur $\frac{a^2}{4} = 25$: $b = 16$. Igitur radix $25 - 16 = \sqrt{9} = 3$. Erit ergo $y = 5 + 3 = 8$: contra $x = a - y = 10 - 8 = 2$. Habes jam omnes problematis conditiones, $2 + 8 = 10$; $2 \times 8 = 16$.

151 Schol. Animadvertendum est y æquè applicari posse valori $= 2$, atque alteri $= 8$. Nam eodem modo conditiones implentur; sivè

y fiat $= 2$; vel $= 8$: undè non minus referri potest ad radicem y valor 2, quam ad alteram radicem x: atque quælibet ex incognitis poterit ad majorem, vel adminorem numerum pro libito applicari. Quamobrem problemata secundi gradus duplicem solutionem admittunt, ac radices ambiguas habent. Potest enim esse utralibet positiva, aut negativa (127). Parenthesi autem includimus quantitates $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$, quippè radix extrahenda est ab una, alterâ mulctatâ; quod alii hoc modo indicare solent $\sqrt{\overline{\frac{a^2}{4} + b}}$.

152 Exempl. 2. Esto numerus $a = 8$, numerus $b = 33$: quæritur numerus x, cujus quadratum et productum in numerum a, det summam æqualem quantitati b. Solut. Ex conditionibus datis erit $x^2 + ax = b$. Compleatur quadratum, ut radix extrahi possit; quemadmodum in exemplo præced. factum est:

habebitur Quod $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b$.

Rad. $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + b\right)}$

transponendo $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$.

Incognita jam separata, valores perpendantur. $\frac{a}{2} = 4$: $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)} = \sqrt{\left(\frac{64}{4} + 33\right)} = \sqrt{(16 + 33)} = \sqrt{49} = 7$. Erit igitur $x = -4 + 7 = 3$. In hac æquatione omnes conditiones inveniuntur.

Nam $3\times3=9$, quadratum 3: deindè $3\times8=24+9=33$.

153 Exempl. 3. Quæritur numerus x, à cujus quadrato, si ejus cuadruplum dematur, residuum sit$=96$. Solutio. Elevato x ad quadratum, ab eo subducatur ejus quadruplum consueta substractionis formula, deindè instituatur æquatio.

Erit $x^2-4x=96$

Completo quad. $x^2-4x+4=96+4$

Extracta radice, $x-2=\sqrt{(96+4)}$

Transponendo, $x=2+\sqrt{(96+4)}$

Ex ultima æquatione resultat $x=12$. Nam $2+\sqrt{(96+4)}=2+10=12$. Est enim $\sqrt{(96+4)}=\sqrt{100}=10$. Animadvertendum in æquatione radicem 2 debere esse negativam, quia factor -4 est negativus, adeòque quadratum provenit ex $\frac{-4}{2}\times\frac{-4}{2}=\frac{16}{4}=4$; quod brevitatis gratia in formula omissum est.

154 Exempl. 4. Amici rus concedentes, ut diem læti transigerent, prandium communibus expensis parare jusserunt. Quum jam symbolam conferre deberent, duo ex ipsis solvendo non erant, quapropter 12 aureorum expensa, quæ in omnes justis partibus erat distribuenda, à reliquis est persoluta, uno aureo insuper gravatis; quam si omnes symbolam protulissent. Quæritur amicorum numerus. Solut. Esto $12=a$, amicorum numerus$=x$, solventium$=x-2$. Symbola uniuscujusque, omnibus æquas partes conferentibus, fuisset$=\frac{a}{x}$. Duobus vero

non solventibus erit $\frac{a}{x-2}$. Alia autem ex conditionibus est, aureum plus singulos solventes insumpsisse; ut igitur prodat æquatio; erit $\frac{a}{x}=\frac{a}{x-2}$. Sublatis fractionibus (107),

erit Reduc. $ax-2a=ax-x^2+2x$

et transp. $-2a=-ax+ax-x^2+2x$

et reduc. $-2a=-x^2+2x$

et transp. $x^2-2x=2a$

Comp. quad. $x^2-2x+1=2a+1$

Extra. rad. $x-1=\sqrt{(2a+1)}$

ac demum $x=1+\sqrt{(2a+1)}$

En tibi æquationem, quam ad calculos numerorum translatam, habebis $1+\sqrt{24+1}=1+\sqrt{25}=6$. Fuerunt igitur amici rusticantes 6, solventes 4, symbola uniuscujusque fuisset 2. Quoniam autem duo non solverunt, erit $\frac{12}{4}=3$; uno aureo major quam si omnes sumptus fecissent.

§. V.

Radix cubica.

155 Theor. *Cubus radicis binomia consurgit ex cubo primi termini, triplo quadrato primi termini ducti in secundum, triplo primi termini ducti in quadratum secundi, ac demum cubo secundi termini. Dem.* Sumatur eadem radix binomia in quadrato usurpata $a+b$. Illius quadratum est $a^2+2ab+b^2$. Hoc per radicem multiplicato, emergit cubus $a^2a+2aab+ab^2+a^2b+2abb+bb^2$; et reducendo a^3+3a^2b+

$3ab^2+b^3$, termini in theoremate enuntiati.

156 Schol. Eadem demonstratio ad numeros extendi potest. Sit numerus $5=2+3$. Elevato primum ad quadratum $(2+3)(2+3)=4+6+6+9$, et ducto rursus hoc quadrato in radicem, cubus erit $8+12+12+18+12+18+18+27$. En cubum primi termini $2=8$, triplum quadratum 4 in secundum terminum $3=12+12+12=36$, triplum primi termini $2=6$ in quadratum secundi $9=18+18+18=54$; ac demum cubum secundi termini $3\times3=9\times3=27$. Jam additis $8+36+54+27=125$.

127 Probl. 1. *Radicem cubicam litteris expressam extrahere.* Solut. Sit

$$
\begin{array}{ll}
\text{Cub.} & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \text{ Radix } a+b \\
 & -a^3 \\
\hline
 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
 & 3a^2 \\
\hline
 & 3a^2b \\
 & \quad +3ab^2 \\
 & \qquad +b^3 \\
\hline
 & -3a^2b-3ab^2-b^3 \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

Artificium idem est, atque in extrahenda radice quadrata; nisi quod ea varietas, quæ inter cubum et quadratum intercedit in productis, ad methodum etiam extractionis transferenda sit. Jam 1. à primo termino a^3 radix extrahitur; atque scribitur loco radici destinato; ad cubum deindè elevata, substrahitur à primo membro.

2. Pro divisore assumitur triplum quadratum primæ partis radicis $3a^2$, eoque dividur secundum membrum; quotus $\frac{3a^2b}{3a^2}=b$, præbet alteram radicis partem, quæ loco suo scribenda erit.

3. Juxta genesim cubi fiant tria producta, multiplicando $3a^2$ per b; productum $3a^2\,b$ præbet triplum quadratum primi termini ducti in secundum. Deindè elevetur ad quadratum secundus terminus radici $b=b^2$, et multiplicetur per triplum primi membri radicis a; erit $3a\times b^2=3ab^2$. Demum elevetur ad cubum b; erit b^3. Deindè ad cubum elevata, ac omnia producta subducantur; nihil remanet. Est igitur quantitas data cubus perfectus.

158 Corol. Si quantitas tribus terminis, aut pluribus in radice constaret, eadem methodo extractio radicis procederet. Ex gr. cubus radicis $a+b+c$ est $a^3+3a^2\,b+3ab^2+b^3+3a^2\,c+3ac^2\,+3b^2\,c+3bc^2\,+6abc+c^3$. Tertium membrum sic debet tractari, ut radix $a+b$ habeatur pro prima parte: deindè residuum divide per $3(a+b^2)=3a^2+6ab+3b^2$, quotus erit c; reliqua ut in altero membro prius factum est.

159 Lemma. *Numerus cubicus plures notas habere non potest, quam triplum notarum suæ radicis: neque pauciores, quam triplum jam dictum, minus duobus. Dem.* 1. Numeri ab 1 ad 9, unam notam tantum habent in radice, in cubo autem non plures quam tres; nam cubus 10, qui duabus notis constat est 1000, primus numerus, qui una augeatur nota in

serie aritmetica: ergo omnes numeri infra 10 tribus tantum notis constare possunt in cubo. Pauciores autem quam tres minus duobus habere non possunt; quia eorum radix una constat nota. 2. Numeri etiam à 10 ad 100 nec plures, nec pauciores quam 1000 et 1000000, cubi numerorum 10, et 100; ut est manifestum: ergo omnes inter 10 et 100, seu duarum notarum in radice, non plures habebunt quam sex in cubo, nec pauciores quam quatuor etc.

160 Corol. Ex theor. præced. facilè deducitur methodus determinandi notas in cujuscumque cubi radici contentas. Dividatur numerus datus in membra trinis notis constantia à dextris sinistram versus, ultimum membrum duas, aut unam habere potest. Quot membra in numero divisa sunt, tot notæ respondent in radice: sic numeri cubici 1, 000, 000, quia tria membra continet, radix 100 tribus notis constat.

161 Schol. Pro faciliori radicis cubicæ extractione, en numerorum simplicium cubos in sequenti schemate comprehensos.

Radices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Cubi	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	729.	

162 Probl. 1. *Ex numero complexo radicem cubicam extrahere*. Solut.

Exempl. Cub. 185, 193 Radix $a+b$

$$a^2 = 125 \qquad 57$$

$$60193$$

$$3a^2 = 75$$

$$3a^2 b = 525$$
$$3ab^2 = 735$$
$$b^3 = 343$$

$$60193$$

$$0$$

1. Cubus juxta n. 160 dividitur in membra tribus notis constantia; ac deindè quæritur cubus æqualis, aut proximè minor primo membro hic erit 125. Nam sequens 216 ipsum superat. Ab invento cubo radix extrahitur, atque scribitur loco radici destinato: hæc radix ad cubum elevata subducitur à primo membro, ac residuum subtus scribitur.

2. Residuo 60 secundum membrum adjungitur 193. Pro divisore assumitur triplum quadratum radicis $5 = 3 \times 25 = 75$. Hic divisor scribitur sub residuo 60, uno gradu ad dexteram promotu. Deindè divisio membro, sub quo est scriptus divisor, quotus 7 ad radicem adjungitur; est enim altera radicis pars.

3. Tria producta juxta cubi genesim fieri debent: primum radicis 7 in triplum quadratum $75 = 7 \times 75 = 525$, quod sub divisore scribendum est: secundum quadrati radicis 7 in triplum radicis 5 primi membri $= 15$: erit $49 \times 15 = 735$: quod sub primo producto scriben-

dum etiam est uno gradu ad dexteram promotum: demum cubus quoti $7=343$ subscribendus pariter sub secundo producto uno gradu ad dexteram promotus, ac summa colligenda $=60193$, quæ à secundo membro subducenda est. Nihil remanet, adeòque numerus datus est cubus perfectus radicis 57. Demonstratio ex ipsa cubi genesi deducitur. Si cubus plura membra habeat, residuo membri jam pertracti membrum sequens adjungitur, atque operatio de more iteratur; ut in secundo membro exempli factum est.

163 Schol. 1. Methodus tradita algebrica est; eaque cubi jam analysis continetur. Breviorem aliam si cupis, en praxim. Primo membro ut prius tractato, residuo 60 adde primam notam membri secundi; erit $=601$; hoc divide per triplum quadratum radicis inventæ ut prius; et quotum ad radicem adjunge. Deindè fac cubum ex hac radice, atque ipsum à membris, ad quæ operatio extenditur, subducito. In præsenti casu cubus radicis 57 est ipsemet à quo radix extrahitur; adeòque nihil debet remanere. Quod si plura membra haberet, residuo subductionis prima nota membri sequenti adjungi deberet, atque operatio iteranda, sumpto pro divisore triplo quadrato radicis hactenus inventæ. Hic esset $57\times57\times3=9747$. Quotus adjunctus primæ radici, daret radicem ad cubum formandum ut prius. Alio exemplo res clarior evadet.

Cubus 11, 390, 625. Radix 225.
8

Resid. cum prima nota 33
Tripl. quad. rad. $2=12$
Cubus rad. $22=10648$

Resid. cum 1.a nota 7426
Tripl. quad. rad. $22=1452$
Cubus rad. $225=11390625$

0

164 Schol. 2. Quum aliquid remanet, signum est numerum datum non esse cubum perfectum. Radix igitur inventa erit maximi cubi in eo contenti. Residuum autem, si ipsum notare oporteat, ut in divisione fieri solet, exprimitur per fractionem, cujus numerator est ipsum residuum, denominator verò differentia inter cubum proximè minorem, et proximè majorem minus unitate. Sic cubus primi membri 11, quod est cubus imperfectus, haberet in radice $2+\frac{3}{18}$. Nam cubus 8 est proximior numero 11; differentia autem inter ipsum, et sequentem cubum $27-8=19$. Ex dictis autem mulctandus est unitate; igitur residuum erit $\frac{3}{18}$.

165 Schol. 3. Obiter notandum ex modò dictis, cubum majorem superare cubum proxime minorem, triplo radicis minoris ducto in radicem majoris plus unitate. In exemplo allato numero superiori, cubus 27 superat cubum

8 triplo radicis 2=6, ducto in radicem 3=18 +1=19. Idem in ceteris cubis observare licet. In quadratis verò excessus majoris supra minorem est duplum radicis minoris plus unitate. Quadratum 25 superat proximè minus 16 duplo radicis 4=8+1=9. Nam 16+9=25.

166 Schol. 3. Quod jam in numeris quadratis ostensum est; radicem nimirum, quæ inter duos integros continetur, nec integris, nec fractionibus integris adjectis perfectè exprimi posse (144), etiam ad numeros cubicos extendendum est. Ex g. radix cubica numeri 20, quæ major est numero integro 2, et minor 3; neque integro, ut est manifestum, neque integro fractione adjecta, perfectè umquam exponetur. Sit ejus radix $2\frac{4}{5}=\frac{14}{5}$; hæc ad integra reduci nequit: ergo nec ejus cubus ad integra reduci poterit. Nam $\frac{2744}{125}$ cubus prædictæ fractionis æqualis non est 20; adeòque radix ejus $2\frac{4}{5}$ non potest esse radix cubica numeri 20. Inveniuntur itaque in cubis radices *surdæ* aut irrationales, quarum valorem exprimere perfectis numeris non possumus. Licet tamen per aproximationem magis ac magis accedere, ut in sequenti.

167 Probl. 2. *Radicem cubicam per approximationem extrahere.* Solut. Residuo cubi imperfecti post extractam radicem tot ternarii notarum decimalium addantur quod libuerit; deindè extractio radicis iteranda, ut in probl. præced. in radice inventa tòt notæ pro decimalibus segregandæ sunt, quod ternarii ciphrarum additi fuerint.

Exempl. Cubus 35 Radix 3, 2

```
  27
 ----
 8000
  27
 ----
  54
   36
     8
 ----
 5768
 ----
 2232 etc.
```

Posset rursus iterari extractio, additis tribus aliis notis decimalibus, ut supra: quod etiam in novo residuo fieri deberet, si approximatio major exigeretur. *Dem.* Quum abduntur tres, aut sex notæ, perindè est ac si numerus duceretur in 1000, aut 1000000; radix autem crescere debet proportionaliter 10es, aut 100es. Separatis deinde notis decimalibus, rursus dividitur per 10, aut 100: adeòque rursus minor evadit. Nihil ergo in radice mutatur, nisi quod ejusmodi partes quæ verè ad radicem pertinent, patefiunt; ac proindè accuratior radix habetur.

168 Schol. 1. Examen operationis fit, elevando radicem inventam ad tertiam potentiam, atque ipsi addendo residuum, siquod fuerit: productum restituere debet numerum datum, ut est manifestum.

169 Schol. 2. In fractionibus vulgaribus extractio radicis tam in numeratore, quam in denominatore fieri debet. Quando autem deci-

males adhibentur, curandum ut numerus decimalium sit semper ternarius, ut tres, sex, novem; quod, ut dictum est, additione notarum semper obtineri potest: quæ pariter in radice resecari debent juxta numerum ternarium, ita ut tribus adjectis in cubo, una respondeat in radice.

CAPUT V.

Proportiones, et series.

§. I.

Prænotiones.

170 Defin. 1. PROPORTIO sivè analogia quantitatum est relatio, quæ inter ipsas intercedit. Quum etiam quantitas admittat magis, et minus, excesus, aut defectus unius respectu alterius, calculo subjici potest, atque comparari.

171 Defin. 2. Modus, quo una quantitas se habet ad alteram, *ratio* stilo mathematico vocatur. Omnes autem quantitates homogeneæ inter se rationem habent, seu relationem. Semper enim altera major, aut minor, aut æqualis est alteri. Hinc omnis ratio duos semper terminos supponit: primus dicitur *antecedens*, secundus *consequens*.

172 Defin. 3. *Proportio* est duarum rationum æqualitas. Hinc in omni proportione quatuor termini inveniuntur, aut saltem bis idem terminus repeti debet, ubi tres tantum reperiantur, ut in proportione *continua*. Hæc ita

appellatur, quum series quantitatum ita collocatur, ut prima sit ad secundam, ut hæc ad tertiam, tertia ad quartam. *Discreta* vero dicitur ea, in qua ordo interrumpitur. Series numerorum cardinalium est proportio continua: si in ipsa serie duo extremi cum primis comparentur interruptis mediis, discreta erit proportio: ex. gr. 3 ad 4 ut 8 ad 9. Proportio continua per longam terminorum seriem continuata, dicitur progressio, aut series.

173 Schol. *Rationes* diversis nominibus donantur pro diversitate excessus, aut defectus antecedentis ad consequentem. Si antecedens sit duplo, triplo, quadruplo major, dicitur ratio dupla, tripla, quadrupla: quod si minor fuerit eodem decremento, ratio dicitur subdupla, subtripla, subquadrupla etc. Æqualitas intercedens inter utrumque, ratio *æqualitatis* dicitur. Quum non duplo, sed tantum dimidio major est antecedens, ratio *sexquialtera* dicitur. Hæc etiam ad proportionem extenduntur.

§ II.

Ratio, et proportio arithmetica.

174 Defin. Ratio arithmetica est illa relatio unius quantitatis ad alteram ejusdem generis, in qua consideratur excessus aut defectus primæ quantitatis respectu alterius: qui excessus aut defectus antecedentis respectu consequentis dicitur differentia: eaque positiva erit, si antecedens sit minor consequente, negativa si sit consequente major. Hinc rationes arithmeticæ

males adhibentur, curandum ut numerus decimalium sit semper ternarius, ut tres, sex, novem; quod, ut dictum est, additione notarum semper obtineri potest: quæ pariter in radice resecari debent juxta numerum ternarium, ita ut tribus adjectis in cubo, una respondeat in radice.

CAPUT V.

Proportiones, et series.

§. I.

Prænotiones.

170 Defin. 1. PROPORTIO sivè analogia quantitatum est relatio, quæ inter ipsas intercedit. Quum etiam quantitas admittat magis, et minus, excesus, aut defectus unius respectu alterius, calculo subjici potest, atque comparari.

171 Defin. 2. Modus, quo una quantitas se habet ad alteram, *ratio* stilo mathematico vocatur. Omnes autem quantitates homogeneæ inter se rationem habent, seu relationem. Semper enim altera major, aut minor, aut æqualis est alteri. Hinc omnis ratio duos semper terminos supponit: primus dicitur *antecedens*, secundus *consequens*.

172 Defin. 3. *Proportio* est duarum rationum æqualitas. Hinc in omni proportione quatuor termini inveniuntur, aut saltem bis idem terminus repeti debet, ubi tres tantum reperiantur, ut in proportione *continua*. Hæc ita

appellatur, quum series quantitatum ita collocatur, ut prima sit ad secundam, ut hæc ad tertiam, tertia ad quartam. *Discreta* vero dicitur ea, in qua ordo interrumpitur. Series numerorum cardinalium est proportio continua: si in ipsa serie duo extremi cum primis comparentur interruptis mediis, discreta erit proportio: ex. gr. 3 ad 4 ut 8 ad 9. Proportio continua per longam terminorum seriem continuata, dicitur progressio, aut series.

173 Schol. *Rationes* diversis nominibus donantur pro diversitate excessus, aut defectus antecedentis ad consequentem. Si antecedens sit duplo, triplo, quadruplo major, dicitur ratio dupla, tripla, quadrupla: quod si minor fuerit eodem decremento, ratio dicitur subdupla, subtripla, subquadrupla etc. Æqualitas intercedens inter utrumque, ratio *æqualitatis* dicitur. Quum non duplo, sed tantum dimidio major est antecedens, ratio *sexquialtera* dicitur. Hæc etiam ad proportionem extenduntur.

§ II.

Ratio, et proportio arithmetica.

174 Defin. Ratio arithmetica est illa relatio unius quantitatis ad alteram ejusdem generis, in qua consideratur excessus aut defectus primæ quantitatis respectu alterius: qui excessus aut defectus antecedentis respectu consequentis dicitur differentia: eaque positiva erit, si antecedens sit minor consequente, negativa si sit consequente major. Hinc rationes arithmeticæ

duæ sunt æquales, quum eamdem habent differentiam: positivam quidem in utraque, aut in utraque negativam. Itaque $a \,.\, a+b$ est æqualis $c \,.\, c+b$, quoniam utriusque differentia est $+b$; itemque $a \,.\, a-b$, et $c \,.\, c-b$, quarum utriusque differentia est $-b$. Proportio arithmetica est duarum rationum arithmeticarum æqualitas: quæ erit continua, si consequens primæ proportionis idem sit ac antecedens secundæ: sin minus, erit discreta. Proportio arithmetica sic scribitur, atque enuntiatur, a, $b=c$, d aut $a:b::c:d$; a est arithmeticè ad b, uti c ad d. Numeris etiam exprimitur 4: 8:: 12: 16. Quatuor est arithmeticè ad octo, uti duodecim ad sexdecim: scilicet idem excessus invenitur, sivè differentia inter primos, atque inter secundos numeros. Termini primus, et ultimus dicuntur extrema; secundus, et tertius media.

175 Theor. 1. *In proportione arithmetica summa extremorum æqualis est summæ mediorum. Dem.* 1.mo in numeris. Sumantur quivis numeri arithmeticè proportionales 2 : 4 : : 6 : 8. Extremorum summa est $8+2=10$; mediorum verò $4+6=10$. Nam si primus terminus binario à secundo exceditur, idem pariter excessus est in quarto supra tertium: alioquin non dareretur proportio arithmetica: ergo utrinque excessibus compensatis, summæ æquales evadere debent. 2.° in litteris. Quævis proportio arithmetica exprimi potest generali hac formula $a : a+d : : b : b+d$; quæ suffectis numeris quibuscumque exacta invenietur; ut $2 : 2+3 : : 6 : 6+3$. Jam summa extremorum est

$a+b+d$, summa mediorum $a+b+d$, evidenter æquales.

176 Theor. 2. *Si summa extremorum æqualis est summæ mediorum, termini sunt arithmeticè proportionales. Dem.* Esto $a+d=b+c$, in quibus a d sint extrema, b c media: si a excedit, aut exceditur à b quantitate $=x$, eadem pariter c excedere, aut excedi debet à d; alioquin summæ non essent æquales, ut supponitur: ergo sunt arithmeticè proportionales (174).

177 Corol. In proportione arithmetica loco mutari possunt termini, intacta proportione. Hoc tamen ex utraque parte fieri debet, ita ut antecedentes fiant consequentes, et vicissim consequentes ad locum antecedentium transferantur. Adhuc enim summa mediorum æqualis remanet extremorum summæ, ut in numeris luculentius videre licet. Si 2 : 3 : : 5 : 6, etiam erit 3 : 2 : : 6 : 5; collige utriusque extremi, ac medii summam; æqualis remanebit.

178 Probl. 1. *Datis tribus terminis, invenire quartum arithmeticè proportionalem.* Solut. Sint a, b, c tres termini arithmeticè proportionales; quæritur quartus x. Addantur medii: erit (per 175) $b+c=a+x$, et transponendo $x=b+c-a$. Determinetur valor formulæ in numeris $a=4$, $b=8$, $c=12$: jam $12+8=20-4=16$, quartus arithmeticè proportionalis. Nam 4 : 8 : : 12 : 16.

179 Defin. Medium proportionale dicitur, quod est simul consequens primæ rationis et antecedens secundæ. In proportione arithme-

tica $5 : 10 :: 10 : 15$, numerus 10, qui est antecedens secundæ, est consequens primæ.

180 Probl. 2. *Datis duobus terminis, medium arithmeticè proportionalem invenire.* Sint termini in proportione arithmetica continua a, x, b: erit $a+b=2x$, et $x=\frac{a+b}{2}$: scilicet semisumma extremorum æqualis est medio proportionali quæsito. Substituatur valor in numeris ad libitum, ex gr. $5+15=20$; hujus dimidium erit terminus quæsitus $5 : 10 :: 10 : 15$.

§. III.

Progressiones arithmeticæ.

181. Defin. Proportio continua per longam terminorum seriem eodem excessu, aut diminutione continuata, dicitur progressio, aut series arithmetica. Si progressio fiat per incrementum terminorum, erit progresio, aut series crescens, seu positiva: si differentia fuerit per decrementum, erit decrescens, et negativa. Quævis progressio arithmetica hac formula generali comprehendi potest: $a : a+d : a+2d : a+3d : a+4d$ etc. Communis differentia est d, quæ signo positivo afficitur, si progressio est crescens; negativo, si termini decrescunt.

182 Theor. 1. *In progressione arithmetica quorumqumque terminorum, summa duorum extremorum æqualis est summæ duorum mediorum ab extremis æquè distantium. Dem.* In formula art. præc. colligatur extremorum summa; ex. gr. $a+a+4d$, et duorum mediorum æquè

distantium $a+d+a+3d$, et reducendo $2a+4d$ in utraque. In numeris 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. addantur duo extremi seriei, et duo medii æquè distantes; summa invenietur par.

183 Theor. 2. *In progressione numerorum imparium summa extremorum, vel etiam duorum æquè distantium ab extremis, æqualis est duplo termini medii. Dem.* In formula $a+a+4d=(a+2d)2=2a+4d$. In numeris series erit 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 etc. $1+13=14=7\times2=14$.

184 Theor. 3. *In omni progressione arithmetica quilibet terminus continet primum terminum et toties exponentem, seu differentiam, quot sunt termini à primo ad ipsum exclusivè.* In formula $a : a+d : a+2d : a+3d : a+4d$ termini à primo ad ultimum exclusivè sunt quatuor, exponens seu differentia est d; erit igitur ultimus terminus $=a+4\times d—a+ad$, ut est manifestum. In numeris $1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 : 13$, termini sunt sex, differentia 2 : erit igitur juxta theoriam expositam $2\times6—12$; at $12+1=13$, qui est ultimus terminus; quod adamussìm respondet.

185 Corol. 1. Facilè deduces maximum cujuscumque progressionis terminum, noto exponente seu differentia terminorum, atque ipsorum numero. Si enim excludatur ultimus, seu minuatur unitate terminorum numerus, ac ducatur in differentiam, producto additur primus terminus; ac summa erit ultimus progressionis, ut in numeris supra allatis factum vides. Formula generali æquatio sic institui

tica $5 : 10 :: 10 : 15$, numerus 10, qui est antecedens secundæ, est consequens primæ.

180 Probl. 2. *Datis duobus terminis, medium arithmeticè proportionalem invenire.* Sint termini in proportione arithmetica continua a, x, b: erit $a+b=2x$, et $x=\frac{a+b}{2}$: scilicet semisumma extremorum æqualis est medio proportionali quæsito. Substituatur valor in numeris ad libitum, ex gr. $5+15=20$; hujus dimidium erit terminus quæsitus $5 : 10 :: 10 : 15$.

§. III.

Progressiones arithmeticæ.

181. Defin. Proportio continua per longam terminorum seriem eodem excessu, aut diminutione continuata, dicitur progressio, aut series arithmetica. Si progressio fiat per incrementum terminorum, erit progresio, aut series crescens, seu positiva: si differentia fuerit per decrementum, erit decrescens, et negativa. Quævis progressio arithmetica hac formula generali comprehendi potest: $a : a+d : a+2d : a+3d : a+4d$ etc. Communis differentia est d, quæ signo positivo afficitur, si progressio est crescens; negativo, si termini decrescunt.

182 Theor. 1. *In progressione arithmetica quorumqumque terminorum, summa duorum extremorum æqualis est summæ duorum mediorum ab extremis æquè distantium. Dem.* In formula art. præc. colligatur extremorum summa; ex. gr. $a+a+4d$, et duorum mediorum æquè

distantium $a+d+a+3d$, et reducendo $2a+4d$ in utraque. In numeris 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. addantur duo extremi seriei, et duo medii æquè distantes; summa invenietur par.

183 Theor. 2. *In progressione numerorum imparium summa extremorum, vel etiam duorum æquè distantium ab extremis, æqualis est duplo termini medii. Dem.* In formula $a+a+4d=(a+2d)2=2a+4d$. In numeris series erit 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 etc. $1+13=14=7\times2=14$.

184 Theor. 3. *In omni progressione arithmetica quilibet terminus continet primum terminum et toties exponentem, seu differentiam, quot sunt termini à primo ad ipsum exclusivè.* In formula $a : a+d : a+2d : a+3d : a+4d$ termini à primo ad ultimum exclusivè sunt quatuor, exponens seu differentia est d; erit igitur ultimus terminus $=a+4\times d-a+ad$, ut est manifestum. In numeris $1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 : 13$, termini sunt sex, differentia 2: erit igitur juxta theoriam expositam $2\times6-12$; at $12+1=13$, qui est ultimus terminus; quod adamussìm respondet.

185 Corol. 1. Facilè deduces maximum cujuscumque progressionis terminum, noto exponente seu differentia terminorum, atque ipsorum numero. Si enim excludatur ultimus, seu minuatur unitate terminorum numerus, ac ducatur in differentiam, producto additur primus terminus; ac summa erit ultimus progressionis, ut in numeris supra allatis factum vides. Formula generali æquatio sic institui

posset. Sit primus terminus $=a$; differentia $=d$; numerus terminorum $=2$; terminus ultimus $=z$: erit $z=(a+d)(2-1)$.

186 Corol. 2. Habebitur etiam summa cujuscumque progressionis arithmeticæ, datis primo, atque ultimo progressionis termino, ac terminorum numero. Nam si utriusque summa ducatur in dimidium numerum terminorum, productum æquale erit summæ quæsitæ; tot enim dantur summæ primi, atque ultimi, quot sunt paria terminorum æquè distantium (182). Idem obtineri posset, si dimidium summæ primi atque ultimi duceretur in numerum terminorum: vel summa integra duceretur in numerum terminorum, ac postea per 2 divideretur: aut demum, si termini sint impares, ducendo terminum medium in numerum terminorum imparium. In hac enim serie numerus medius æqualis est semisummæ primi et ultimi, aut duorum quorumqumque ab ipso æquè distantium (183).

187 Schol. Ut brevitati consulamus, reliqua problemata hic innuere sufficiat, quorum solutio ex dictis facilè eruitur. 1. *Datis primo, et ultimo termino seriei, necnon et terminorum numero, differentiam invenire*. Solut. Subtracto primo ab ultimo termino, residuum dividatur per numerum terminorum unitate minutum; quotus erit differentia. 2. *Datis primo termino, differentia, et numero terminorum, ultimum terminum seriei invenire*. Solut. Ducatur differentia in numerum terminorum unitate minutum, ac producto primus terminus addatur: summa erit

ultimus terminus. 3. *Primo et ultimo termino datis, necnon et differentia, numerum terminorum invenire*. Solut. Subducatur primus ab ultimo, ac residuum per differentiam dividatur: quotus plus unitate erit numerus terminorum.

§. IV.

Ratio et proportio geometrica.

188 Defin. 1. Duæ quantitates possunt inter se comparari, ita ut in illis quotus consideretur, seu quoties una contineat alteram, aut in illa contineatur. Hujusmodi relatio in ordine ad quotum dicitur *ratio geometrica*. Modus illa scribendi est hujusmodi $a:b$, aut $2:4$. Exponens autem rationis est quotus. Sic rationis $8:4$ exponens est $=2$.

189 Corol. Rationem geometricam hac generali formula comprehendere possumus: $a:aq$, in qua a est antecedens; quotus vero, qui ex divisione consequentis per antecedentem obtinetur per q significatur. Productum verò ex quoto in antecedentem ducto, est ipse consequens, quia consideratur ut dividendum.

190 Theor. 1. *Valor rationis geometricæ non mutatur dum antecedens, et consequens per eamdem quantitatem multiplicantur, aut dividuntur. Dem.* In casu proposito eodem augmento aut decremento crescunt, aut decrescunt antecedens, et consequens: ergo remanet æqualitas in ratione unius ad aliam: quotus enim idem erit. Sit ratio $a:aq$; multiplicentur termini per m; productum erit am, amq: aut di-

vidantur per d; quoti $\frac{a}{d} : \frac{aq}{d} =$ primæ rationi $a : aq$. Si enim consequens per antecedentem dividatur, prodit quotus q, ut facta divisione patet: $\frac{amq}{am} = q$: et $\frac{adq}{da} = q$: $\frac{aq}{a} = q$.

191 Corol. Ex theor. præcedenti *praxis italica* vulgo dicta emanavit. In quacumque enim ratione geometrica complicatoribus terminis expressa, alia expressio simplicior inveniri potest, quæ loco primæ substituatur. Praxis est hujusmodi: quæratur communis utriusque numeri, aut quantitatis mensura maxima (52), per eamque dividatur tam antecedens, quam consequens: quoti dabunt duos alios terminos, qui in eadem erunt ratione geometrica ac dividendi. Sint numeri 168 : 240; per inventam communem maximam mensuram 24 uterque dividatur; quoti erunt in ratione eadem 7 : 10 = 168 : 240.

192 Defin. 2. Si plures sint rationes, atque earum termini antecedentes inter se, et consequentes pariter inter se multiplicentur, horum terminorum producta erunt in *ratione composita* rationum simplicium. Sint tres rationes $a : b$, $c : d$, $e : f$; facta multiplicatione antecedentium inter se, et consequentium itidem inter se, eorum producta $a\,c\,e : b\,d\,f$, erunt in ratione composita primarum trium rationum simplicium. In numeris 2, 6, 3 : 9, 4, 12; producta antecedentium 24, et consequentium 648 erunt in ratione composita priorum rationum simplicium.

193 Defin. 3. Si ex duabus rationibus sim-

plicibus, et æqualibus ex g. $a : am$, $b : bm$ fiat quædam alia tertia $ab : abm^2$ ex duabus primis composita, hæc erit in ratione composita *duplicata* vel quadrata duarum componentium. Quotus enim in hac ultima est quadratum quoti cujusvis rationis simplicis. Quælibet autem ex his simplicibus $a : am$ erit ad compositam $ab : abm^2$ in ratione *subduplicata* quia ejus quotus m est radix quadrata alterius quoti.

194 Corol. Cujusvis rationis simplicis facilè obtinetur ratio duplicata, elevando utrumque terminum ad secundam potentiam: ex g. ratio duplicata 3 . 9, erit 9 : 81; et vicissim si quæritur ratio subduplicata duorum numerorum, radix quadrata ab utroque extracta erit ratio quæsita; ut 3 : 9 est ratio subduplicata 9; 81. Similiter 2 : 3 est ratio subduplicata rationis 4 : 9.

195 Defin. 4. Quod si tres rationes æquales, et simplices inter se multiplicentur, ratio ex illis composita erit triplicata respectu cujusvis simplicis, et hæc ad compositam erit in ratione subtriplicata. Sint rationes simplices $a : am$, $b : mb$, $c : cm$; ductis antecedentibus, et consequentibus prodit ratio triplicata $abc : abcm^3$. Quælibet autem ex simplicibus erit istius subtriplicata. Quod attinet ad numeros, eadem lex esto atque in ratione duplicata: eleventur nimirum ad cubos, si quæritur ratio triplicata; aut radix cubica extrahatur, dum illorum ratio subtriplicata investigatur. Ratio triplicata 2 : 3 erit 8 : 27; radices autem 2 : 3 in ratione subtriplicata suorum cuborum erunt.

196 Schol. Dantur etiam rationes *incom-*

mensurabiles, *surdæ*, *irrationales*, in quibus quotus nullis numeris exactè exprimi potest. Rationes vero in quibus quotus exactus obtinetur, *rationales*, et *commensurabiles* sunt. Ratio 1: $\sqrt{2}$ est incommensurabilis; nullo enim integro, aut fractione exprimi potest.

197 Defin 5. Proportio geometrica ea dicitur, quæ duas rationes geometricas æquales includit, ita ut antecedens primæ sit ad suum consequentem, ut antecedens alterius ad proprium consequentem est. Nimirum idem quotus in utraque ratione inveniri debet. Termini harum rationum dicuntur *geometricè proportionales*: ex. g. 2 : 4 : 3 : 6. Quum verò idem terminus est consequens primæ, et antecedens secundæ, proportio geometrica erit continua, ut 2 : 4 : 8 : 16; et terminus secundus dicitur medius proportionalis respectu suorum extremorum.

198 Schol. 1. Proportio geometrica frequentiùs scribitur 2 : 4 : : 8 : 16; et sic enuntiatur: *duo sunt geometricè ad quatuor*; *ut octo ad sexdecim*. Nonnumquam etiam sic scriptum invenies: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ quod idem significat atque $a : b : : c : d$; sive $a : b = c : d$.

199 Schol. 2. Proportio geometrica hac formula generali includi potest; $a : aq : : b : bq$: aut si libuerit $aq : a : : bq : b$, quæ eadem est, ac præcedens, terminis loco mutatis. Hæc autem formula proportionem geometricam continet: quotus enim in utraque ratione idem est.

200 Theor. 1. *In proportione geometrica productum extremorum, æquale est producto mediorum. Dem.* Adhibeatur formula generalis proportionem quamlibet geometricam repræsentans, $a : aq : : b : bq$. Ducantur extrema $a \times bq = abq$. Ducantur etiam media $aq \times b = abq$, evidenter æqualia. In numeris 2 : 4 : : 3 : 6, $2 \times 6 = 12$, $4 \times 3 = 12$.

201 Corol. 1. Si productum extremorum æquale est facto mediorum, termini erunt geometricè proportionales. Nam quotus idem esse debet in utraque ratione: ex g. extremorum productum abq habet exponentem q; eoque in altero producto variato jam non erit amplius factum mediorum abq, sed factum aliud, quod ex alio quoto assumpto consurgeret, ut est manifestum.

202 Corol. 2. Factores æqualium productorum sunt geometricè proportionales, aut quod aliis terminis idem est: ex duobus productis æqualibus semper proportio geometrica erui potest. Sint duo producta æqualia $ad = bc$, erit geometricè $a : b : : c : d$; productum enim mediorum æquale est producto extremorum, adeòque habetur proportio geometrica. Deduci etiam posset hæc altera analogia $a : c : : b : d$, aut $b : a : : d : c$; quocumque enim modo statuantur termini, adhuc productum extremorum æquale est facto mediorum, ut prius.

203 Theor. 2. *Si ponantur quator termini proportionales, quocumque modo collocentur, dummodò maneat æqualitas in quotis, adhuc remanet proportio. Dem.* Æqualitate manente in quotis in utraque ratione, productum extremo-

rum adhuc erit æquale producto mediorum: ergo termini sunt geometricè proportionales. En variationes præcipuas in numeris, ut clariùs percipiantur. Sint 2 : 4 : : 3 : 6.

1. Invertantur extrema, intactis mediis, 6: 4 : : 3 : 2; $6\times2=12$; $4\times3=12$.

2. Commutentur media intactis extremis, 2: 3 : : 4 : 6; $2\times6=12$; $3\times4=12$. Duplex hæc mutatio, quæ velut unica considerari potest, dicitur *alternando*.

3. Si antecedentes fiant consequentes, et vicissim consequentes antecedentes, 4: 2 : : 6: 3; hæc mutatio dicitur *invertendo*.

4. Si in utraque ratione antecedentibus consequentes, aut hi antecedentibus addantur; $2+4:4 :: 3+6:6$: scilicet $6:4 :: 9:6$; aut 2: $4+4 : : 3 : 6+6$; nimirum 2 : 8 : : 3 : 12; hæc mutatio dicitur *componendo*.

5. Si in utraque ratione consequentes ab antecedentibus, aut hi à consequentibus subtrahantur, $2:4-2 :: 3:6-3$; aut $2-4:4 :: 3-6:6$: hæc mutatio dicitur *dividendo*.

Manifestum est in litteris easdem mutationes fieri posse, atque eandem obtentum iri productorum æqualitatem. Permutentur quantitates litterales $a:am::b:mb$ eo modo, quo numeri in exemplo adducti; æqualitas in factis, et in quotis remanebit. Nam parum interest in productis utrum primus in ultimum, aut ultimus in primum ducantur, factores enim semper idem sunt. In duabus verò, permutationibus ultimo loco adductis, proportionaliter augentur, aut minuuntur extrema, aut media;

adeòque æqualitas in productis perseverat.

204 Probl. 1. *Datis tribus terminis, quartum proportionalem invenire.* Solut. Sint tres termini dati a, b, c, et x quartus quæsitus; posita proportione erit $a : b : : c : x$, et productum extremorum $ax=bc$, et $x=\frac{bc}{a}$ nimirum productum mediorum dividi debet per factorem notum, quotus erit alter factor incognitus, et quæsitus (139). Hæc est praxis regulæ aureæ, aut trium, de qua infra.

205 Probl. 2. *Datis duobus terminis, medium geometricè proportionalem invenire.* Solut. Ducantur dati termini inter se, atque à producto radix quadrata extrahatur; hæc erit terminus medius geometricè proportionalis inter duos datos. *Dem.* Sint tres termini a, x, c, in proportione geometrica continua: extrema cognita a et c: incognitus quæsitus x. Quoniam supponitur proportio continua, hac formula debet exponi, $a : x : : x : c$; ergo $ac=xx=x^2$: ergo $\sqrt{ac}=\sqrt{x^2}=x$. Erit igitur $\sqrt{ac}$ medium proportionale quæsitum.

206 Schol. In proportionibus termini antecedentes, et consequentes vocantur *homologi*, sivè ejusdem nominis; unde idem est jubere terminos homologos inter se multiplicare, atque antecedentes inter se, et consequentes inter se ducere.

207 Theor. 3. *Si termini homologi duarum proportionum inter se multiplicentur, aut dividantur; producta, aut quoti erunt proportionalia.* Dem.

Sit $a : aq :: b : bq$.
Et $c : cm :: d : dm$.

Multiplicati $ac : acmq :: bd : bdmq$.

Divisi $\frac{a}{c} : \frac{aq}{cm} :: \frac{b}{d} : \frac{bq}{dm}$

In utroque casu productum extremorum æquale est facto mediorum. Quotus etiam in prima ratione est mq: in secunda verò est etiam mq, qui quidem certè sunt æquales. Substituantur numeri, ut clarior res evadat.

1.ª proport. $a : aq :: b : bq$.
$4 : 4\times2 :: 6 : 6\times2$
$4 : 8 :: 6 : 12$

2.ª proport. $c : cm :: d : dm$
$3 : 3\times5 :: 7 : 7\times5$
$3 : 15 :: 7 : 35$

Multipl. $12 : 120 :: 42 : 420$ quotus $\frac{1}{10}$

Divis. $\frac{4}{3} : \frac{8}{15} :: \frac{6}{7} : \frac{12}{35}$ quotus $\frac{2}{5}$

Producta tam extremorum quam mediorum in primo$=5040$; in secundo verò$=\frac{48}{105}$.

208 Theor. 4. *Quum in duabus proportionibus consequentes primæ proportionis æquales sunt antecedentibus alterius, antecedentes primæ ad consequentes secundæ proportionis etiam proportionales erunt.*

$$\begin{array}{lcl} a : b :: c : d & & 8 : 2 :: 12 : 3 \\ b : e :: d : f & & 2 : 6 :: 3 : 9 \\ \hline \text{erit } a : e :: c : f & & 8 : 6 :: 12 : 9 \end{array}$$

Nam facta multiplicatione, per theor. 3, erit

$ab : be :: cd : df$: Et per art. 19 ad simpliciores terminos deducta, erit $a : e :: e : f$.

209 Theor. 5. *Quum termini medii unius proportionis æquales sunt terminis extremis alterius, etiam reliqui perturbatè ex æquo proportionales erunt.* Dem. Sint duæ proportiones

$$\begin{array}{lcl} a : b :: c : d & & 8 : 2 :: 12 : 3 \\ b : e :: f : c & & 2 : 6 :: 4 : 12 \\ \hline \text{erit } a : e :: f : d & & 8 : 6 :: 4 : 3. \end{array}$$

Nam multiplicati $ab : be :: ef : dc$, et facta reductione, $a : e :: f : d$.

210 Theor. 6. *Si termini proportionales sunt, illorum quadrata, cubi, reliquæ potentiæ, proportionalia erunt.* Dem. Sit $a : b :: c : d$, erit $ad=bc$ (200), et $a^2 d^2 = b^2 c^2$, et $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$ (202).

211 Corol. Si quadrata sunt proportionalia, eadem proportio invenietur in radicibus. Nam si $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$, $a^2 d^2 = b^2 c^2$; et $ad = bc$, et $a : b : c : d$ (202). En permutationum schema, quæ in quantitatibus, aut loco mutatis, aut aliis quantitatibus auctis, vel minutis ocurrere possunt mathematica, aut philosophica consideratione digniores. Sit.

$a : am :: b : bm$.

Erit 1. invertendo $am : a :: bm : b$
2. alternando $a : b :: am : bm$
3. componendo $a+am : a :: b+bm : b$
et $a+am : am :: b+bm : bm$
4. dividendo $a-am : a :: b-bm : b$
et $a-am : am :: b-bm : bm$

aut etiam $am-a : a :: bm-b : b$

et $am-a : am :: bm-b : bm$

5. Ex æquo ordinatè : si $a : am :: b : bm$

et $am : amn :: bm : bmn$

erit $a : amn :: b : bmn$

6. Ex æquo perturbatè: si $a : am :: b : bm$

et $am : amn :: \frac{b}{n} : b$

erit $a : amn :: \frac{b}{n} : bm$

7. $a^2 : a^2 m^2 :: b^2 : b^2 : m^2$

8. $a^2 : \frac{a^2}{m^2} :: b^2 : \frac{b^2}{m^2}$

9. $a : amc :: b : bmc$

10. $a : \frac{am}{c} :: b : \frac{bm}{c}$

11. $ac : am :: bc : bm$

12. $\frac{a}{c} : am :: \frac{b}{c} : bm$:

13. $ac : amc :: b : bm$

14. $\frac{a}{c} : \frac{am}{c} :: b : bm$

15. $ac : amc :: bd : bmd$

16. $\frac{a}{c} : \frac{am}{c} :: \frac{b}{d} : \frac{bm}{a}$

17. $ac : amd :: bc : bmd$

18. $\frac{a}{c} : \frac{am}{d} :: \frac{b}{c} : \frac{bm}{d}$

19. Si $a : am :: b : bm$

et $c : cn :: d : dn$

erit $ac : acmn :: bd : bdmn$

20. Si $a : am :: b : bm$

$c : cn :: d : dn$

$f : fr :: g : gr$

$h : hs :: l : ls$

etc.

erit $acfh : acfhmnrs :: bdgl : bdglmnrs$.

In his omnibus permutationibus proportionem remanere facilè quisque precipiet, quum instituta divisione eundem exponentem ubiquè repererit; aut multiplicatis mediis, atque extremis inter se, producta æqualia conspexerit.

§. V.

Progressiones geometricæ.

212 Defin. Series terminorum eodem incremento, aut decremento proportionali crescentes, aut decrescentes, aut quod idem est, eundem quotum habentes, dicitur *progressio geometrica.* Hinc ut in duobus rationibus proportionem geometricam constituentibus, idem quotus obtinetur, idem pariter in progressione observari debet. Series numerorum 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 etc. progressionem geometricam constituunt, in qua exponens, sivè quotus est 2.

213 Corol. Progressio geometrica est proportio continua per plures terminos deducta. Quod si quotus sit numerus integer, progressio erit crescens; si autem pro quoto fractio habeatur, erit series decrescens, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ etc.

214 Schol. Progressio geometrica hac formula generali exprimi potest: $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$ etc., cui substitui possunt quivis numeri, ut aliquod objectum determinatum menti appareat, ut $1 : 2 : 4 : 8 : 16$. Nam assumpto $a=1$, et $q=2$, erit $aq=1\times2=2$, et $aq^2=1\times2\times2=4$, etc. Pari methodo in altera progressione, cujus quotus sit 3, substituere licebit litteris, numeros respondentes $1 : 3 : 9 : 27 : 81$ etc., ut in altera factum est.

215 Theor. 1. *In quavis progressione geometrica primus terminus est ad tertium, ut quadratum primi ad quadratum secundi; et primus ad quartum, ut cubus primi ad cubum secundi. Dem.* Sumatur formula quamvis progressionem representans, $a : aq : aq^2 : aq^3$, per theor. erit $a : aq^2 : : a^2 : a^2\ q^2$, nam productum extremorum æquale est facto mediorum. Propter eamdem rationem erit $a : aq^3 : : a^3 : a^3\ q^3$. Productum extremorum in utroque casu æquale est producto mediorum. In numeris est etiam manifestum. Sit progressio $2 : 4 : 8 : 16$, (à quocumque enim termino series incipi potest); erit $2 : 8 : : 4 : 16$, et $2 : 16 : : 8 : 64$.

216 Corol. Hinc deducitur in quavis progressione geometrica rationem primi ad tertium esse duplicatam rationis primi ad secundum. Et rationem primi ad quartum triplicatam primi ad secundum (195).

217. Theor. 2. *Terminus ultimus cujuscumque progressionis geometricæ æqualis est producto ex primotermino ducto in potentiam quoti, sivè in quotum elevatum ad eam potentiam,*

cujus exponens est numerus terminorum, dempto primo. Dem. Sit formula $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$; terminus ultimus aq^4 æqualis est producto ex $a\times q^4$; quoto scilicet elevato ad quartam potentiam. Nam termini dempto primo sunt quatuor. In numeris sint $1 : 2 : 4 : 8 : 16$; ultimus terminus 16 æqualis est producto $1\times16=16$, quod est potentia quarta quoti 2: tot enim sunt termini excepto primo in progressione.

218 Corol. Si ergo numerus terminorum dicatur, aut repræsentetur per n, terminus ultimus per z, habebitur æquatio $z=aq^{n-1}$.

219 Theor. 3. *In progressione geometrica summa omnium terminorum excepto ultimo, est ad summam omnium terminoram, excepto primo, ut unitas ad communem quotum. Dem.* Sumantur ex formula quotcumque termini $a : aq : aq^2 : aq^3$; erit $a+aq+q^2 : aq+aq^2+aq^3 : : 1 : q$. Nam productum extremorum est$=aq+q^2+aq^3$, evidenter æquale producto mediorum. Patet etiam in numeris; sit $1 : 2 : 4 : 8 : 12$; summa omnium excepto ultimo $=15$: summa omnium excepto primo$=30$. Erit $15 : 30 : : 1 : 2$, quotus progressionis.

220 Corol. Ex theor. præc. potest reperiri formula ad definiendam summam cujusvis progressionis geometricæ. Dicatur summa$=s$; summa terminorum ultimo excluso$=s-z$: summa terminorum dempto primo$=s-a$. Ex theor. præc. oritur æquatio.

$$s-z : s-a : : 1 : q$$

Et per multiplicationem extremorum; et mediorum $sq-qz=s-a$

Et transp. $sq-s-zq=-a$

Et rursus $sq-s=zq-a$

Et resolvendo factores $s(q-1)=zq-a$

Et separando factorem cognitum $s=\frac{zq-a}{q-1}$

In numeris sit progressio $1:3:9:27:81$, juxta formulam $s=\frac{zq-a}{q-1}$ erit $z=81$ $q=3$, et $\frac{zq-a}{q-1}=\frac{243-1}{3-1}=\frac{242}{2}=121=1+3+9+27+81$.

221 Corol. 1. Si æquatio præcedens $\frac{zq-a}{q-1}=s$ cum altera (218) $aq^n-1=z$ conferatur, reliqua progressionis geometricæ problemata resolvi possunt. Nimirum *ex his quinque (termino primo, communi quoto, numero terminorum, termino ultimo, et summa) tribus datis, invenire reliqua.* Verum hæc longiori calamo prosequenda forent, et ad logarithmos recurrendum, de quibus infra.

222 Corol. 2. In quibuslibet rationibus geometricis æqualibus summa omnium antecedentium terminorum est ad summam omnium consequentium, ut unitas ad communem quotum. Sint rationes, $a:aq:b:bq:c:cq$, etc.; erit etiam $a+b+c:aq+bq+cq::1:q$. In numeris $2:4::3:6:4:8$; summa antecedentium, et consequentium erunt $2+3+4:4+6+8::1:2$. Nam $9:18::1:2$.

CAPUT SEXTUM.

USUS PROPORTIONUM.

§. I.

Regula aurea.

223 Defin. Regula trium vulgo dicta, à maxima ejus utilitate *aurea* etiam appellata, est proportio geometrica, in quo tres termini sunt cogniti, et quartus incognitus inquiritur: adeòque jam in problem. num. 204 exposita est. At quum plerumque nonnula ocurrant in praxi, quæ negotium facessant: operæ pretium est ea antevertere, atque explanare. Regula trium, vel est *directa*, vel inversa.

224 Defin. 1. Regula trium *directa* illa dicitur, in qua terminus quartus ignotus tanto major, aut minor est tertio, quanto secundus primo major, aut minor fuerit: ex g. $15:20::25:x$. Evidens est quartum terminum x tanto majorem esse debere tertio 25, quo 20 secundus superat primum 15.

225 Schol. 1. Pronum etiam est animadvertere, saltem duos terminos in proportione homogeneos esse debere, ut proportio servetur. Fiat quæstio: in fodina 10 operæ 30 saccos metalli quotidie exportant: 40 operæ quot saccos ejusdem materiæ exportabunt? Operæ in primo, et tertio termino; metallum in secundo, et quarto homogenei sunt. Minimè autem opus est, ut semper eundem ordinem ser-

Et per multiplicationem extremorum; et mediorum $sq-qz=s-a$

Et transp. $sq-s-zq=-a$

Et rursus $sq-s=zq-a$

Et resolvendo factores $s(q-1)=zq-a$

Et separando factorem cognitum $s=\frac{zq-a}{q-1}$

In numeris sit progressio $1:3:9:27:81$, juxta formulam $s=\frac{zq-a}{q-1}$ erit $z=81$ $q=3$, et $\frac{zq-a}{q-1}=\frac{243-1}{3-1}=\frac{242}{2}=121=1+3+9+27+81$.

221 Corol. 1. Si æquatio præcedens $\frac{zq-a}{q-1}=s$ cum altera (218) $aq^2-1=z$ conferatur, reliqua progressionis geometricæ problemata resolvi possunt. Nimirum *ex his quinque (termino primo, communi quoto, numero terminorum, termino ultimo, et summa) tribus datis, invenire reliqua*. Verum hæc longiori calamo prosequenda forent, et ad logarithmos recurrendum, de quibus infra.

222 Corol. 2. In quibuslibet rationibus geometricis æqualibus summa omnium antecedentium terminorum est ad summam omnium consequentium, ut unitas ad communem quotum. Sint rationes, $a:aq:b:bq:c:cq$, etc.; erit etiam $a+b+c: aq+bq+cq::1:q$. In numeris $2:4::3:6:4:8$; summa antecedentium, et consequentium erunt $2+3+4:4+6+8::1:2$. Nam $9:18::1:2$.

CAPUT SEXTUM.

USUS PROPORTIONUM.

§. I.

Regula aurea.

223 Defin. Regula trium vulgo dicta, à maxima ejus utilitate *aurea* etiam appellata, est proportio geometrica, in quo tres termini sunt cogniti, et quartus incognitus inquiritur: adeòque jam in problem. num. 204 exposita est. At quum plerumque nonnula ocurrant in praxi, quæ negotium facessant: operæ pretium est ea antevertere, atque explanare. Regula trium, vel est *directa*, vel inversa.

224 Defin. 1. Regula trium *directa* illa dicitur, in qua terminus quartus ignotus tanto major, aut minor est tertio, quanto secundus primo major, aut minor fuerit: ex g. $15:20::25:x$. Evidens est quartum terminum x tanto majorem esse debere tertio 25, quo 20 secundus superat primum 15.

225 Schol. 1. Pronum etiam est animadvertere, saltem duos terminos in proportione homogeneos esse debere, ut proportio servetur. Fiat quæstio: in fodina 10 operæ 30 saccos metalli quotidie exportant: 40 operæ quot saccos ejusdem materiæ exportabunt? Operæ in primo, et tertio termino; metallum in secundo, et quarto homogenei sunt. Minimè autem opus est, ut semper eundem ordinem ser-

vent. Quum enim termini servata proportione multimodis variari possint, eo pariter ordine in regula aurea disponi poterunt: ex. g. 10 operæ: 30 sac. : : 40 operæ: x, numerum saccorum, vel 10 operæ: 40 operas:: 30 sacci: x, num. sacc. Hæc methodus postrema disponendi terminos quoddammodò conformior est; nam milla termini homogenei inter se comparantur; atque eodem praxis recidit. Multiplicetur $3\times40=120$, et hoc productum per primum terminum 10 dividatur; 320 erit quartus terminus quæsitus.

226 Schol. 2. Quum primo intuitu apparet proportio inter tertium, et quartum terminum, à multiplicatione et divisione supersedere possumus; sic in exemplo adducto, quum 10 sit quarta pars secundi termini 40; etiam 30 erit quarta pars termini x ignoti: undè multiplicando $30\times4=120$, quartus habebitur.

227 Defin. 2. Regula trium est *inversa*, quum ex terminis in quæstione propositis apparet, quartum terminum ignotum tantò majorem esse debere tertio, quantò secundus minor est primo; aut contrà, tantò minorem quantò secundus major est primo. Hujusmodi est quæstio sequens: 6 operæ 24 horis aliquod opus in fodina expleverunt: quot horis 18 operæ illud explevissent? Dispositis terminis homogeneis inter se collatis, statim apparet num directa, aut inversa sit proportio.

6 operæ: 18 operas:: 24 horæ: x.

Manifestum est quartum terminum x, eo minorem esse debere tertio, quo secundus major

est primo. Duodeviginti enim operæ celerius, quam sex opus debent conficere. Hinc ut ad rectam dispositionem deducantur termini, sic collocari deberent.

6 operæ: 18 operas:: x horæ: 24 horas.

Multiplicatis deindè extremis 6×24, ac producto 144 diviso per terminum secundum 18, quotus 8 erit tertius terminus quæsitus. Si verò disponantur, ut primo loco, multiplicetur primus per tertium, et productum dividatur per secundum.

228 Schol. 1. Quævis proportio inversa facillime in directam converti potest, mutatis directo ordine terminis. Sic antecedens proportio:

6 operæ : 18 operas: : x horæ: 24 horas.

18 operæ : 6 operas:: 24 horæ: $x=8$ hor.

226 Schol. 2. Quando in proportionibus occurrunt termini mixti speciei superioris, et inferioris, ad infimam reducendi sunt, quod pariter in fractionibus faciendum est: ex. g. 4. ped. 5 pol. 2 ped. 4 pol. prius reduci debent ad pollices 53 pol. (28); deindè ad proportionem inquirendam deveniendum. Sint etiam $2\frac{1}{2} : 3\frac{4}{5}$; prius ad fractiones integri reduci debet $\frac{5}{2}, \frac{19}{5}$ (55); ac postea terminus incognitus investigandus erit.

230 Schol. 3. Quod si non omnibus terminis, sed uni, aut duobus tantum adhæreat fractio, integro cum fractione prius ad unicam fractionem reducto, ceteri more fractionum disponendi sunt, unitate supposita. Ex. g. $5 : 2\frac{1}{2} :: 3\frac{4}{5} : x$ sic prius disponi debent $\frac{5}{1} : \frac{5}{2} :: \frac{19}{5} : x = \frac{95}{50}$ (56) $= 1\frac{9}{10}$ (51).

§. II.

Regula aurea composita.

231 Defin. Regula aurea est *composita*, quum ad principales terminos alii accesorii adduntur, qui per multiplicationem cum principalibus admiscentur, ut tandem ad tres reducantur.

232 Probl. 1. Regulam trium compositam ritè adhibere. Solut.

Exemplum. Milites 30, 10 dieb. vallum 20 pedum circunducunt: 50 milit. 4 dieb. quot pedum vallum ducent? Ut prius ad tres principales terminos reducantur, disponantur duæ proportiones.

30 mil: 20 ped. : : 50 mil. : ped. x.
10 dies: 20 ped. : : 4 dies : ped. x

Ducatur jam numerus militum in numerum dierum in utraque parte proportionis $30 \times 10 = 300$, et $50 \times 4 = 200$. Jam ad regulam trium simplicem compositam redacta est, atque ejusdem methodo pertractanda.

$$300 : 20 : : 200 : 13\tfrac{1}{3}$$

Dem. Manifestum est idem opus 30 operarios 10 dies laborantes confecturos, ac 300 unico die: similiter 50 laborantes per dies quatuor, idem opus perficient, ac 200 una die: ergo duæ proportiones in unam coalescunt, regula communi pertractandam.

233 Schol. Quamvis theoria hæc exacta sit,

atque in quantitatibus abstractis ad calculos deducta optimè respondeat, in praxi tamen nonnumquam fallere potest. Nam si domum ex g. 100 operæ unius anni spatio à fundamentis ædificant; malè deduceres 36500 uno die eandem extructuros. Opus enim erat ad calculos etiam reducere impedimenta, quæ sibi ipsis in ducerent tot operæ simul laborantes in constructione ædificii; quæ quidem nullo numero adjuncto superari possunt, nec in supputationem venire. Hoc in mechanica semper præ oculis habendum.

234 Probl. 2. Regulam auream adhibere, quum septem, aut novem termini in quæstione proponuntur. Solut. Eadem est praxis, ac præcedens, quotcumque terminis constet problema. Reducuntur prius termini per multiplicationem ad regulam simplicem, atque hæc de more tractatur: ex. gr. in præcedenti exemplo potest quæstio ita proponi: 30 milites, 10 diebus, 8 horis, 20 ped. vallum duxerunt: 50 milites, 4 diebus, 6 horis quot pedes conficient? Reducantur primum ad infimam speciem horarum dies (35), quæ reductio dabit 248, et 102 horas pro totali producto 10 dierum cum 8 horis, et 4 dierum 6 horarum: deindè prima, et secunda proportio ad unam traducantur, ut in sequenti schemata.

$$\left.\begin{array}{l} 30 \text{ mil.} : 20 \text{ ped.} : : 50 \text{ mil.} \\ 248 \text{ hor.} : 20 \text{ ped.} : : 102 \text{ hor.} \end{array}\right\} : x$$

$$7440 : 20 : : 5100 : x$$

$$x = \frac{10200}{744} = 13 + \frac{22}{31} = 13 - \frac{2}{5} \text{ circiter.}$$

235 Schol. Regula proportionum compo-

sita est regula simplex repetita: undè etiam in duas simplices resolvi potest hoc modo. In prima ponuntur termini principales, ac de more resolvitur. In secunda primus terminus est ille accesorius, qui primo termino principali adhærebat; secundus est quartus proportionalis inventus in prima proportione; tertius est alter accesorius secundæ partis primæ proportionis, ad quos quartus proportionalis inquirendus est. Ex. gr. Tres molæ, 4 horis, 30 modios molunt; 5 molæ, 6 horis, quot modios in farinam convertent? En duplici modo quæstionem resolutam.

3 mol. : 30 mod. : : 5 mol. : x
4 horæ : : 6 horæ
12 : 30 : : 30 : 75

Secundo modo in scholio indicato sic resolvitur.

3 mol. : 30 mod. : : 5 mol. : 50 mod.
4 hor. : 50 mod. : : 6 horæ : 75 mod.

Idem est quartus terminus utrobique; adeòque praxis eodem recidit. Quod si regula proportionis composita inversa fuerit, ut si proponatur problema: 3 mol. 4 hor. 30 modios in farinam convertunt, quot horis 75 mod. 5 molæ convertent? Disponantur termini principales et accesorii ordine conveniente, ut proportio ritè instituatur.

3 molæ : 30 mod. : 4 hor. : :
5 molæ : 75 mod. : x

Deindè multiplicentur invicem primus principalis, tertius, et quintus terminus, ac productum dividatur per secundum et quartum invicem multiplicatos.

$$\frac{3\times4=12\times75=900}{30\times5=\quad 150}=6.$$

Potest etiam in tot regulas simplices rosolvi, ut art. 235 expositum est.

3 molæ : 4 hor. : 30 mod. : : 5 molæ : 4 hor. : x=50
5 molæ : 50 mod. : 4 hor. : : 5 molæ : 75 mod. : hor. x=6.

§. III.

Proponuntur compendia pro regulis proportionum.

236 Comp. I. Quum in proportione, aut regula directa primus terminus continet secundum nullo residuo, aut in ipso continetur, tum reduci potest proportio ad minimos terminos (191), ac regulæ praxis multò facilior evadit: ex. gr. si libræ 4 valent 20 aureos; quid libræ 15? Proportio redacta ad minimos terminos est 1 : 5 : : 15. Duc igitur 15×5=75 erit quartus terminus quæsitus, nam unitas non dividit. Si terminos de more tractaveris, eundem numerum pro quarto termino obtinebis. Pro regula inversa, termini etiam invertendi erunt, ut, quum ad minimos terminos redacti fuerint, regula instituatur. In exemplo adducto ex directa fiat inversa proportio: si 20 aurei dant

libras 4: ad lib. 15 quot aurei requiruntur? Quia 20: 4 sunt reciprocè, ut 15 ad quartum quæsitum; minimi termini 5 : 1 comparandi sunt cum tertio et quarto: ductis igitur $5\times15=75$, habebitur quartus, ut supra.

237 Comp. 2. Plerumquè, maximè quum numeri pluribus notis constant, ad evitandum prolixioris divisionis fastidium, dividatur secundus terminus per primum, et quotus ducatur in tertium, aut tertius per primum, et quotus ducatur in secundum. In exemplo superiori 20 per quatuor dividatur; et quotus 5 ducatur in tertium terminum $15=75$: aut $\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}\times20=60+\frac{60}{4}=60+15=75$.

238 Comp. 3. Potest etiam sola divisione res confici. Dividatur primus terminus per secundum, et per quotum inventum dividatur etiam tertius. Insistendo eidem exemplo 4: 20:: 15, divisis primo termino per secundum, nimirum $\frac{4}{20}$, quotus$=\frac{1}{5}$ (52); per hunc dividatur tertius terminus 15, erit: $\frac{15}{1}:\frac{1}{5}=\frac{75}{1}=75$ (60).

239 Com. 4. Si fractiones afficiant primum terminum tantum, ut si dicatur $12\frac{1}{2}$ dant 4, quid 20? Multiplica per denominatorem 2 tam primum terminum $12\frac{1}{2}$, quàm tertium 20; producta 25 : 40 eandem rationem obtinebunt in secunda proportione atque in prima; 25 : 4 :: 40: $x=6\frac{10}{25}=6\frac{1}{3}$: Si afficiant secundum terminum tantum, veluti si dicatur 12, dant $22\frac{1}{2}$, quid 4? Satis est multiplicare per denominatorem 2 tam 12, quam $22\frac{1}{2}$; producta 24: 45 ::4, eandem ac primam porportionem exhibebunt, et quartum dabunt proportionalem $7\frac{12}{24}=7\frac{1}{2}$.

Pariter si fractiones ejusdem nominis adhæreant primo, et tertio termino, ut $4\frac{1}{4}$: 15:: $7\frac{1}{4}:x$, multiplicentur ambo per denominatorem 4; producta 17 et 29 erunt in eadem ratione ad suos consequentes 17 : 15 : : 29 : $25\frac{10}{17}$. Demum si termini homologi sunt minutiæ ejusdem nominis, ut $\frac{3}{4}$: 20: : $\frac{2}{4}$: x deletis denominatoribus, numeratores fractionibus substituantur; erit proportio 3 : 20 : : 2 : $13\frac{1}{3}$. *Dem.* In omnibus propositis exemplis termini homologi per eundem numerum multiplicantur, aut valores æquales substituuntur : ergo valor non mutatur (47). *Hujusmodi compendia dicuntur italica; vel quia itali, propio commodo semper studentes, illa invenerunt, vel quia ipsis sæpiùs utuntur.*

§. IV.

Regula societatis.

240 Defin. Totum dividere in partes certa quadam proportione, vulgò dicitur *Regula societatis*; eo quod homines mercaturæ addicti, inita societate, solent quasdam pecuniæ summas in commune conferre, ut lucrum, aut damnum ex mercatura proveniens inter ipsos pro rata portione dividatur.

241 Probl. 1. Regulam societatis simplicem adhibere. Solut.

Exempl. Tres mercatores Antonius, Bernardus, Consalvus, inita societate, 800 aureos lucrati sunt: primus in communem sortem contulit aureos 100; secundus aureos 160; tertius 240. Quæritur uniuscujusque lucrum. Ut hoc regula proportionum deducatur, comparentur termini sequenti methodo. Pro primo termino colligatur summa omnium pecuniarum=500: pro secundum lucrum ex negotiatione reportatum; aut si damnum fuisset, summa damni: in casu summa lucri=800: deindè tres instituantur proportiones, ut uniuscujusque lucrum deducatur.

$$500 : 800 :: 100 : x = 160 \text{ A.}$$
$$500 : 800 :: 160 : x = 256 \text{ B.}$$
$$500 : 800 :: 240 : x = 384 \text{ C.}$$
$$\overline{800}$$

242 Probl. 2. Regulam societatis compositam declarare. Solut. Nonnumquam potest evenire, ut societas à diversis mercatoribus inita, non eodem tempore inceperit: tum habenda etiam est ratio temporis, atque hoc in supputationem, ut æquis partibus procedatur, immiscendum.

Exempl. Anton. contulit in communem sortem aureos 50, annis tribus; Bern. aur. 100, annis duobus; Cons. aureos 240, anno 1: commune lucrum, fuit aur. 500. Ad inveniendum singulorum lucrum, ducatur summa uniuscujusque in tempus impensum negotiationi; deindè ex summa trium productorum fiat primus terminus proportionis; secundus erit lucrum, aut damnum, si vice lucri detrimentum contigerit; tertius terminus erit cujusvis summa in tempus ducta; quartus ignotum dabit lucrum, aut damnum ab unoquoque ferendum.

$$600:500::150:125 \quad \text{A.}$$
$$600:500::200:166\tfrac{4}{6} \quad \text{B.}$$
$$600:500::250:208\tfrac{2}{6} \quad \text{C.}$$
$$\overline{500}$$

243 Schol. 1. Pari modo operatio procedet, etiamsi pecuniæ summa à sociis collata æqualis fuisset, tempus verò inæquale: ex g. si omnes 150 aureos contulissent, primus autem ad 6, secundus ad 8, tertius ad 12 menses pecuniam collocassent; primus terminus proportionis erit summa mensium=26: secundus lucrum, aut damnum ex g. 500: tertius menses singulorum: quartus dabit lucrum aut damnum uniuscujusque pro rata portione distribuendum.

244 Schol. 2. Ad hanc regulam reduci potest summa distribuenda inter plures secundum datam proportionem, quod in legatis testamentorum frequenter occurrere solet: v. g. si quis testamento legat 1000 aureos inter famulos distribuendos juxta famulitii tempus, ab unoquoque ipse præstitum, putà 6, 9, 15 annorum: summa omnium annorum erit primus terminus; secundus summa distribuenda; tertius tempus famulatus; quartus portio contingens.

§. V.

Regula mixtionis, seu alligationis.

245 Defin. Sæpissimè occurrit, maximè inter artifices et mercatores, res diversi pretii

simul commisceri, ut deindè ex mixtione, aut alligatione merces victuariæ aut artefacta provenientia emptoribus vendantur. Solet etiam pretium arbitrarium statui, sub quo debeant merces divendi, quæ ex mixtione aliarum conflantur; tuncque opus est prænoscere, quota pars ex componentibus debeat admisceri. In utroque casu regulam *alligationis*, seu *mixtionis* dictam adhibemus. Solutione problematum res clarior evadet.

246 Probl. 1. *Datis partibus componentibus, et pretio earumdem, mixtionis pretium invenire.* Solut. Exemp. Sit mixtio vinorum diversi pretii, v. g. quatuor amphorarum vini, quarum singulæ æstimentur 10 obolis, et sex, quæ singulæ 12 obolis æstimentur: quæritur, quo pretio amphora ex utroque vino mixta vendenda sit? Collige summam quantitatum componentium: deindè summam pretiorum; erit summa rerum commixtarum ad summam pretiorum, uti certa quantitas mixti ad pretium ipsi respondens.

Amphor. summa $= 10$; pretium amphorar. 4 obol. $10 = 4 \times 10 = 40$: pretium amphor. 6 obol. $12 = 6 \times 12 = 72$: utriusque pretii summa $= 112$. Jam $10 : 112 :: 1 : 11 + \frac{2}{10} = 11 + \frac{1}{5}$ pretium unius amphor. mixtæ.

247 Probl. 2. *Ex quantitatibus pretio diversis mixtio facienda est, quæ præfixo pretio vendi debet: quæritur quantitas ex utraque admiscenda.* Solut. Pretia binatim alligentur, his tamen legibus servatis: ut 1. quæ alligantur, unum majus, alterum minus sit pretio arbitrario: 2. excessus majoris pretii dati supra medium adscribatur, minori pretio; defectus autem minoris à medio apponatur majori. His servatis perindè est quocumque ordine alligentur inter se data pretia. Nam potest unum alligari sæpiùs, hoc est cum diversis, modò singula saltem alligentur semel. Undè fit, ut eadem quæstio plures solutiones admittat. Exemplum: 1 libra *caffe* occidentalis stat 24 solidis, orientalis verò 35: ut emptoribus fiat satis, qui 33 tantum volunt emere, quot partes ex utroque debent misceri? Pone alterum pretium sub altero 24 et 35; atque ad sinistram pretium arbitrarium 33; ad dexteram verò differentias inter hoc et illa; ita ut differentia minoris applicetur majori, et majoris minori; nimirum 9 ad latus 35, et 2 ad 24, et differentiarum colligatur summa.

En schema. $$33 \left\{ \begin{array}{ll} 24 & 2 \\ & \\ 35 & 9 \\ \hline & 11 \end{array} \right.$$

Jan instituatur proportio toties, quot erunt differentiæ; quæ in exemplo duæ reperiuntur; pro primo termino erit summa differentiarum: pro secundo unitas libram, aut mensuram repræsentans; tertio loco una ex differentiis dabit tertium terminum: quartus verò inventus indicat mensuram sumendam ex specie cui adhæret tertius: ex. g.

$$11 : 1 :: 2 : \frac{2}{11}$$
$$11 : 1 :: 9 : \frac{6}{11}$$

En jam ex *caffe* occidentali duas undecimas libræ partes esse admiscendas, ex orientali autem $\frac{9}{11}$ at $\frac{2}{11}+\frac{9}{11}=\frac{11}{11}$.

Exemplum 2. Confectio *chocolati* fieri debet, cujus libra 30 solidis veneat: faba *brasiliensis*, *cacao* vulgo dicta, 27 solidis stat *carachensis* verò 39 saccarum mediocre 26; quota pars ex qualibet specie sumi debet? Solut. Disponantur ut primus termini; postea major terminus cum minoribus alligari debet, et differentiæ eodem modo permutentur, atque in exemplo præcedenti; demum ex summa proportio pro quolibet termino instituatur. En typum:

$$30 \left\{ \begin{array}{l} 27 \\ 26 \\ 39 \end{array} \right\{ \begin{array}{l} 9 \\ 9 \\ 3+4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 : 1 :: 9 : \frac{9}{25} \\ 25 : 1 :: 9 : \frac{9}{25} \\ 25 : 1 :: 7 : \frac{7}{25} \\ \text{Summa} \quad \frac{25}{25} \end{array}$$

Nimirum compara 39 cum primo termino, differentias inter utrumque cum pretio medio 30 permutando: ideòque juxta 27 scribo 9, differentia inter 39 et 30, atqui ipsi 39 differentiam alteram 3 abscribo. Deindè 39 iterum cum sequenti 26 confero: eodem modo tranferendo differentias: ideòque 9 dextrorsum 26, et 4 ad latus 39 collocandi sunt. Demum collecta summa $=25$; nam 3 et 4 addendi prius, atque cum cæteris postea in summam redigendi; reliqua procedunt ut in præcedenti exemplo.

248 Schol. Examen, utrum rectè processerit

operatio, erit summa frationum, aut partium totum componentium. Sic in exemplo summa est $\frac{25}{25}=1$; in quo numero libra confectionis exprimitur; in singulis verò fractionibus pars exqualibet specie sumenda. Eodem modo procedi oporteret, si partes plures, quam tres alligari deberent. *Demonstratio*. Summa differentiarum, quibus pretia discrepant per excessum, aut defectum à pretio medio; eam habent rationem ad totum mixtum, quam habent singulæ differentiæ ad singulas mixti partes: quapropter regula porportionum toties iteratur, quot differentiæ reperiuntur: quarum alterna dispositio pretium deficiens in una compensat excessum alterius pretii; ergo portiones in congeriem miscendæ sunt inter se inversè, ut differentiæ à pretio medio.

§. VI.

Regula falsæ positionis seu falsi.

249 Defin. Regula falsæ positionis ea dicitur, in qua assumitur numerus alius à verò, atque ex proportione detecta inter ipsum, et alium inventum, nova instituitur, ut verus detegatur. Et quidem numerus, qui videtur aptus ad solvendum quæsitum, sumitur: deindè examinatur, num rectè procedat inventum: demum ex errore verus numerus elicitur. Res exemplis in problematis proponendis fiet manifesta.

250 Probl. 1. *Cæsar testamento legavit 1000 sestertia ea conditione, ut inter tres fa-*

militares ita distribuantur, ut primus habeat partem duplam secundi, secundus triplum tertii. Quæritur, quota pars cuique obtigit? Solut. Ponamus primum habuisse 300, quum hæc summa supponatur dupla secundi, huic contiget 150, ac tertio 50. Summæ autem horum munerorum non adæquant 1000, igitur falsa suppositio est. Instituatur jam regula proportionum, cujus primus terminus est numerus inventus falsus $300+150+50=500$; secundus erit numerus primo assumptus 300; tertius numerus dividendus: quartus ignotus.

$$500 : 300 :: 1000 : 600.$$

Igitur primus habere debet 600; qua summa comperta, reliquæ inventæ sunt, nam secundus habebit 300, tertius verò 100; partes quæ simul sumptæ adæquant 1000. Algebricè etiam facillimè solvi posset problema. Ponantur unus, qui solum censeri debet terminus ignotus $=x$, et esto tertius: primus $=a$, secundus $=b$: erit

$$a+b+x=1000$$
$$a=2b$$
$$b=3x$$

ergo $a=6x$

et substit. $6x+3x+x=1000$

et reduc. $10x=1000$

et div. $x=\frac{1000}{10}=100$

erit igitur $x=100$, $b=300$, $a=600$. Summa $=1000$.

251 Probl. 2. *Per duplicem falsam positionem numerorum verum invenire.* Solut. Assuma-

tur quilibet numerus, ut in exemplo præcedenti; postea perpendatur, num quæstioni satisfaciat. Error inventus potest esse per excessum aut per defectum, quod signis $+$ aut $-$ notetur. Deinde alius numerus major, aut minor accipiatur, atque eodem modo excessus, aut defectus à vero notetur. Errores erunt *similes*, si ambo sint per excessum aut per defectum, dissimiles vero, quum alter est per excessum, alter per defectum.

Si errores sunt similes, ducatur prima positio in errorem secundæ, et vicissim secunda in errorem primæ. Deinde productorum differentia dividatur per differentiam errorem; quotus erit numerus quæsitus. Quod si dissimiles sint errores, productorum summa dividatur per summam errorem; quotus dabit numerum verum.

Exemp. 1. Tres lusores A, B, C 62 aureos ludo acquisierunt: B obtinuit 6 plusquam A; C 10 plusquam B: inveniendum est singulorum lucrum. Ponatur lucrum $A=4$, erit $B=10$, C verò $=20$: summa 34, quæ à vera deficit per defectum -28. Iterum sit $A=14$, erit $B=20$, $C=30$: summa 64, quæ per excessum 2 abludit à vera. Quum errores sint dissimiles, addantur duo producta $4\times 2=8$, et $14\times 28=392$, et $392+8=400$, quæ summa dividatur per summam errorem $=30=\frac{400}{10}=13\frac{1}{3}$ ut in sequenti schemate.

Prima posit. 4., error — 28 } Summa 30
Secunda posit. 14, error + 2 }
Prim. Prod. $4 \times 2 =$ 8
Secund. Prod. $14 \times 28 = 392$

$$\text{Summa } \frac{400}{30} \Big\} \; 13\tfrac{1}{3}$$

Quotus $13\frac{1}{3}$ erit lucrum A: $19\frac{1}{3}$ erit lucrum B: et $29\frac{1}{3}$ lucrum C: partes quæ simul additæ adæquant numerum datum 62.

Exemplum 2. Esto idem casus sumpta pro secunda positione error per defectum; et sit $A=8$; erit $B=14$; $C=24$ summa 46, quæ à vera deficit iterum per defectum — 16. En typus.

Prima positio 4, error — 28 } Differ. 12.
Secunda posit. 8, error — 16 }
Primum prod. $8 \times 16 =$ 64
Secundum prod. $8 \times 28 = 224$

$$\text{Differ. } \frac{160}{12} \Big\} \text{ quot. } 13\tfrac{4}{12} = 13\tfrac{1}{3}$$

In hoc casu quum errores sint similes, differentia productorum dividitur per differentiam errorum; atque idem est quotus, ut patet in schemate.

252 Schol. Non semper resolvi potest quæstio per unicam positionem. Indicium, quando duplici positione opus sit, est numerus aliquis determinatus, qui afficiat alium. Sic in secundo problemate numeri 6 et 10, qui adduntur numero principali, indicant duplici positione opus esse. Uno verbo: in primo problemate

numerus 1000 tantum exprimitur; ideòque unica positione resolvi potest. In secundo vero adjunguntur 6, et 10, qui indicant duplicem positionem adhibendam esse. Ceterum problemata hujusmodi faciliùs per algebram solvuntur, ut patet in primo exemplo jam per algebram soluto, et in secundo, cujus typum exhibeo. Sit terminus primus$=x$; secundus $=b$; tertius$=c$, erit:

$$x+b+c=62$$
$$b=x+6$$
$$c=b+10$$

Et substit. $x+x+6+x+6+10=62$
Et reduc. $3x+22=62$
Et transp. $3x=62-22=40$
Et divid. $x=\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$

§. VII.

Logarithmorum notio.

253 Defin. *Logarithmi* sunt numeri arithmeticè proportionales, numeris geometricè proportionalibus respondentes. Eorum ope multiplicationes et divisiones transeunt in additiones, et substractiones; adeòque calculus facilior evadit. Inventum hoc Joannis Neperi, natione Scoti, anno 1620 in lucem prodiit maximo rei mathematicæ bono; de qua inter primos optimè meritus censendus est. En typum utriusque seriei:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Logarithmorum species commodior, et familiarior ea est, quæ pro logarith. unitatis assumito, et unitatem cum aliquibus cyphris pro log. denarii etc. ut in sequenti schemate.

1	0.0000000
10	1.0000000
100	2.0000000
1000	3.0000000
10000	4.0000000
100000	5.0000000
1000000	6.0000000
10000000	7.0000000
100000000	8.0000000
1000000000	9.0000000
10000000000	10.0000000

Tot autem adduntur cyphræ, ut calculus facilior evadat, quemadmodum de fractionibus decimalibus dictum est.

254 Corol. 1. Assumpto 0 pro unitatis logarithmo, reliquorum numerorum, qui unitati minores sint, ut sunt fractiones, logarithmi erunt defectivi, seu minores 0: itaque nota subductionis — designari debent. Omnes verò numeri ab unitate ad denarium habebunt 0 pro prima nota logar. A denario, seu à 10 ac 100, prima nota erit. 1. A 100 ad 1000, erit 2, et sic deinceps, ut in schemate videre licet. Reliqui autem numeri inter 1, et 10, habebunt pro logarith. 0 cum aliquot fractionibus decimalibus. Qui inter 10, et 100 interveniunt, nota *characteristica* (sin enim appellatur) erit unitas cum decimalibus respondentibus. Quod etiam ad sequentes numeros, characteristica mutata,

ordine jam dicto extendendum est.

255 Corol. 2. Characteristica logar. sive numerus, qui in logar. puncto separatur à reliquis decimalibus, indicat, quot notis constat numerus, cujus est logar. Semper enim characteristica utitati deficit à numero notarum, quæ reperiuntur in eo, cujus est logarithmus. Hinc dato quovis numero, notisque ejus recensitis, facilè deducitur characteristica ipsi respondens. Sit 56489; quum hic quinque notis constet, ejus characteristica erit 4.

256 Theor. 1. *Si logar. unitatis est 0, erit logarithmus cujuscumque numeri æqualis summæ logarith. suorum factorum. Dem.* Sit numerus 24, ejus logarithmus erit æqualis summæ logarithmicæ numerorum 6 et 4, qui sunt ejusdem factores. Nam ex definit. multiplicationis, 1 : 4 :: 6 : 24; horum autem terminorum logarithmi sunt in proportione arithmetica (253): ergo extremorum summa erit æqualis summæ mediorum (175): additis igitur logarithmis numerorum 4 et 6, habebitur logarith. numeri, cujus sunt factores.

257 Corol. 1. Logarith. numeri cujuscumque plani, aut solidi æqualis est aggregato ex logarth. laterum, seu factorum tale planum, vel solidum componentium: ex. g. numerus 72 resultat ex multiplicatione 3×24, aut etiam et $3 \times 4 \times 6$ vel $2 \times 3 \times 12$: summa igitur horum logarithmorum dabit logarith. numeri 72. Undè obiter nota methodum inveniendi logarith. alicujus numeri esse, illud resolvere in suos factores; tum eorumdem logarith. in summam

collectis, numeri logarithmus quæsitus exurget.

258 Corol. 2. Logarith. numeri quadrati duplus est logar. suæ radicis, et sic de ceteris potentiis quarta, quinta etc. quadruplus, quintuplus etc. Quod enim in potentiis fit per multiplicationem radicis bis. ter, quater in se ipsam, hic obtinetur ope simplicis additionis, adeoque addendo bis, ter, quater etc. logarithmum datæ radicis, obtinetur logarith. datæ potentiæ. Similiter si logarith. cujusvis dignitatis dividatur per ejus exponentem 2, 3, 4 etc., invenietur logarith. radicis talis potentiæ. Sit cubus 8, cujus logarith. ex tabulis est 0.9030900, exponens tertiæ potentiæ seu cubi est 3, per quem diviso prædicto logarith. dat quotum 0.3010300, logarith. numeri 2, qui est radix cubica num. 8. Quod si per eundem exponentem, 3, iterum multiplicaveris prædictum quotum restituitur 0.9030900, qui est logarith. cubi 8, seu tertiæ potentiæ.

259 Theor. 2. *Supossito ut prius zero pro logarith. unitatis; differentia logarith. duorum numerorum æquatur logarith. quoti eorumdem.* *Dem.* Summantur quivis numeri ex. g. 24 et 6, subducantur amborum logarithmi, differentia erit 0.6020600: hic erit logarith. eorumdem quoti, seu numeri 4. Nam quum divisor sit ad dividendum, ut unitas ad quotum; erunt 6 : 24 :: 1 : 4: eorumque logarith. in proportione arithmetica (253): ergo quum in logarith. summa mediorum æqualis sit summæ extremorum (175): idcirco si à summa mediorum, sive à logarith. numeri 24 (nam unitatis logarithmus, est 0) subducatur logarithmus numeri 6, erit logarith. numeri 4.

260 Corol. Ex præc. theor. ovium es deducere, summa logarith. divisoris et quoti, æqualem esse logarithmo dividendi. Quod etiam ex num. 257 planum erat inferre. Ceterum inutile ducimus theoriam constructionis logarithmorum hic inserere, quum jam publici juris sint tabulæ, in quibus logarithmi numerorum naturalium inveniuntur, qui in supputationibus occurrere possunt. Tantum innuere sufficiat usum hujusmodi tabulæ logarithmorum.

261 Probl. 1. *Multiplicare duos numeros datos ope logarimorum.* Solut. Inveniantur in tabulis logarithmicis numerorum datorum logarith. ac inter se addantur; summa logarithmorum dabit logarithmum producti. Ut autem hoc dignoscatur, quærendus est talis logarithmus in tabulis, ad cujus latus numerus producti invenietur. Exemplum. Sint multiplicandi numeri 144, et 64: eorum logarithmi ex tabulis inveniuntur, 2.1583625, et 1.8061800: quibus additis fit 3.9645425: cui in tabulis respondet numerus 9216, factum ex 144×64. Dem. sumitur ex num. 256.

262 Probl. 2. *Numerum per numerum ope logarithmorum dividere.* Solut. Quærantur in tabulis ipsorum logarithmi, ac minor à majore subducatur; residuum erit quotus quæsitus. Insistendo præcedenti exemplo, sit dividendus 9216, divisor 64. Subducatur logarithmus divisoris 1.8061800 à logarith. dividendi 3.9645425;

residuum 2.1583625 dabit numerum quoti, scilicet 144. Dem. eadem est ac num. 259.

263 Probl. 3. *Datis tribus numeris, ope logarith. quartum proportionalem invenire.* Solut. Quærantur in tabulis logarithmi tribus numeris datis respondentes, ac terminorum mediorum logarithmi in summam colligantur; deinde ab hac summa primus terminus subducatur: residuum erit logarithmus quarti termini. Dem. patet ex num. 253. Hinc deducitur regulam trium per logarithmos confici faciliùs posse.

264 Prob. 4. *Dati numeri quadratum, cubum, aut aliam dignitatem invenire.* Solut. Inveniatur in tabulis logarithmus dato numero respondens; hic multiplicetur per exponentem potentiæ, ad quam evehendus est numerus; productum dabit logarithmum talis potentiæ, ac proindè ipsum numerum seu potentiam. Dem. sumitur ex num. 258.

265 Corol. Hinc apparet ad extrahendam radicem cujuscumque potentiæ, satis esse ipsius logaritmum per exponentem dividere, aut sumere dimidium, tertiam, quartam etc. partes dati logarithmi juxta radices extrahendas: deindè in tabulis quærere numerum tali logarithmo respondentem.

266 Probl. 5. *Inter duos datos numeros medium proportionalem ope logarith. invenire.* Solut. In tabulis inveniantur logarith. duorum numerorum; deindè summa colligatur, ac demum semisumma erit logar. numiri medii proportionalis quæsiti Dem. deducitur ex num. 205 et 253.

TRACTATUS III.

GEOMETRIA.

PROLEGOMENA.

267 Defin. 1. Geometria, seu terræ mensura à γέα contractè γῆ terra, et μέτρεω metior composito vocabulo, sic dicta fuit quod primum ad possesionum limites dignoscendos inventa sit. Ad sublimiores deindè cognitiones elevata, omnem quantitatem sibi subjecit, ac penè totius corporeæ naturæ dominata, immensum exercet imperium. Quapropter quæ nunc Geometria vocatur, rectiùs *quantitatis extensæ scientiam* diceres, quæ definitio ipsi optimè quadrat. Ad omne enim corpus extensum, et continuum applicatur, ejusque magnitudinem extensionem, soliditatem metitur. Quamvis autem nihil sit in rerum corporearum natura, quod tres dimensiones in longum, latum, et profundum non habeat, mente tamen separari, atque una seorsim ab alia considerari potest.

268 Defin. 2. *Solidum* est quantitas tribus dimensionibus constans in longum, latum, et profundum. Omne igitur corpus *solidum* est. Potest enim ejus longitudo definiri, crassities, sivè latitudo determinari, et profunditas, sivè

altitudo metiri. Solidum sivè corpus extrinsecùs *superficiebus* terminatur: superficies verò lateribus, sivè *lineis* circumscribitur: lineæ autem extremitas *punctum* est. Quamvis autem hæc tria separari numquam possint, benè concipimus, dum iter agimus lineam quandam à nobis descriptam à puncto unde discessimus, ad locum, quò pervenimus; quin ad ejus crassitiem, aut altitudinem cogitemus. Dum pannum vestibus parandis videmus, ejus altitudinem et longitudinem præ oculis habemus quin ad crassitiem attendamus. Demum in plerisque corporibus omnia simul attendimus, quantum sursum erigatur, et hæc est *altitudo*, sivè *profunditas*: quantum crassum sit, et hæc est *latitudo*: ac demum quod spatium à latere ad latus occupet, et hæc dicitur *longitudo*.

269 Schol. Tres hæc dimensiones à puncto quasi originem ducere concipimus. Punctum enim fluens, sivè unum post aliud positum, lineæ ideam nobis præbet. Lineas similiter juxta et extra se positas, sivè unam ad latus alterius, superficiem generare concipimus. Superficies demum una supra aliam superpositæ solidi compositionem, seu genesim repræsentant. Non quod lineam è punctis, superficiem lineis, solidum superficiebus componi dicamus: sed linea è lineolis semper minoribus, superficies aliis minoribus superficiebus, solida minusculis solidis compingi debent. Attamen lineæ superficierum, superficies solidorum limites sunt. Hinc *Longimetria* dicta est, pars illa geometriæ, quæ linearum; *Planimetria*, quæ superficierum;

Stereometria seu solidometria, quæ solidorum dimensiones pertractat. Et hæc quidem ad inferiorem geometriam, seu elementarem pertinent. Ad superiorem verò seu transcedentem sectiones conicæ, atque omnes aliæ curvæ à circulari diversæ; de quibus in tractatu ultimo sermo erit.

CAPUT PRIMUM.

Longimetria, sivè de lineis.

§. I.

Linearum notio.

270 Defin. 1. Si punctum A (fig. 1. tab. 1.) fluens, et breviori semita procedit ab A in B, *lineam rectam* describit, quæ punctis A et B intercipitur.

271 Corol. 1. *A puncto ad punctum unica recta duci potest.* Quæcumque enim linea à puncto A ad B ducatur, nisi puncta omnia supra rectam AB habuerit, extra eamdem lineam excurrit, adeòque recta non procedet ab *A* in B.

272 Corol. 2. *Linea recta est omnium brevissima, quæ á puncto ad punctum duci potest.* Quælibet enim alia ACB dum inflectitur, recedit à directione punctorum A et B; eoque magis recedit, quo magis incurvatur. Linea enim ADB brevior est altera ACB. Undè linea recta est mensura distantiæ, seu ipsa distantia punctorum A et B.

273 Corol. 3. *Directio lineæ rectæ, datis duobus ejus punctis, innotescit.* Quaproter datis punctis AB, directio ejusdem lineæ AB potest utrinque in infinitum produci, ac reliquæ novæ accesiones in eadem positione AB semper remanebunt.

274 Corol. 4. *Duæ rectæ in unico puncto concurrere possunt.* Si enim duo puncta communia haberent, in eadem directione essent, atque unicam rectam eficerent per corol. 1. Hinc inferes, rectam lineam unicam esse in sua specie, quum ceteræ quæ rectæ non sunt, in infinitum variari possint. Hujusmodi axiomata potius quàm corollaria demonstrare esset oleum, atque operam perdere, quum adeò manifestæ varietatis sint, ut intellectus, statim, atque enuntiata percipiat, in ipsorum veritate conquiescat.

275 Defin. 2. Si punctum A (fig. 1) quòlibet à directione AB deflectat, ut in D aut C, lineam curvam describet. Curvarum tamen celeberrima est circulus, sivè ejus peripheria (fig. 2). Concipiatur linea ABC, aut potius ipsius dimidium BC, ejus puncto B immobili, circumagi ita, ut ad puncta, undè discessit, redeat: lineam ADCE describet, cujus omnia puncta à puncto B æquè distabunt. Spatium ac hac linea comprehensum dicitur *circulus*. Punctum B *centrum* circuli est: linea circumdescripta dicitur *peripheria*, seu *circumferentia* Linea ab uno peripheriæ puncto ad aliud ducta per centrum B, vocatur *diameter* circuli, ut AC. Quæ verò à centro B ad quodvis circumferentiæ

punctum, uti E, ducitur, *radius et semidiameter* appellatur.

276 Defin. 3. Quævis peripheriæ pars, quæ duobus radiis intercipi potest, dicitur *arcus* circuli, ut AE, GE (fig. 2). Portio autem superficiei circularis, duobus radiis et arcu comprehensa, *sector circuli* vocatur. Recta, quæ per centrum non transit, et ab uno ad aliud circumferentiæ punctum ducitur, appellatur *chorda*, ut FG: duæ vero inæquales partes, in quas circulus à chorda dividitur, vocantur *segmenta*: major dicitur *segmentum majus*: altera *segmentum minus*: ut FEG est segmentum majus; FDG segmentum minus.

277 Defin. 4. Commodior circuli divisio ea inventa est, quæ ejus peripheriam in partes 360 dividit, quæ dicuntur *gradus*. Gradus in 60 partes dividitur, quæ *minuta prima* vocantur. Rursus minutum in 60 *secunda* minuta, seu, quomodò jam usus invaluit, *secunda* tantum appellantur: secunda in 60 *tertia* dividuntur, et sic deincps: *Semicirculus* AEC (fig. 2) 180 gradibus constat. Quadrans verò AE 90. Porro gradus sunt pars relativa circuli: totquè gradus numerat parvus circulus ADCE, atque alius quilibet cœli ambitu comprehensus.

278 Corol. 1. Omnes diametri ejusdem circuli sunt æquales; sunt enim eadem recta circumvoluta centro immobili permanente (275). Similiter omnes radii ejusdem circuli æquales sunt, quum sint dimidium ejusdem diametri. Undè circuli æquales diametros, et radios habebunt æquales.

279 Corol. 2. *Linea recta circuli peripheriam in tribus punctis secare non potest.* Nam omnia puncta lineæ rectæ in eadem directione sunt (273): circuli autem puncta continenter directionem mutant. Hinc duo tantum puncta positionem, aut directionem circuli, seu peripheriæ non determinant, quum secari possint tum à recta, tum à curva qualibet. Tria verò puncta directionem circumferentiæ determinant, quum omnia ipsius puncta eamdem habeant curvaturam, ac æquè à centro distent. (Vide infra num. 308.) Quarè notis tribus peripheriæ punctis, (fig. 2) AFG, reliqua omnia determinantur, quum æquè distent à centro B.

280 Corol. 3. *Omnes diametri velut chordæ maximæ circuli concipi possunt.* Quæcumque enim alia chorda à diametro distincta minor ipsa diametro est. Nam quum circulus à diametri, aut potius semidiametri circumvolutione generetur, quæcumque chorda diametro æqualis, diameter est; ac proindè omnes aliæ minores diametro sunt.

281 Corol. 4. *Diameter circulum et peripheriam bifariam secat.* Nam per centrum transiens duas æquales partes peripheriæ debet intercipere, quum omnia ipsius puncta æquè à centro distent. Deindè si concipiatur (fig. 2) pars ADC superimponi parti AEC, perfectè congruent; nimirum omnia puncta semiperipheriæ ADC operient puncta alterius semiperipheriæ AEC: sunt igitur æquales, ac proindè quælibet dimidium totius, seu circuli ADCE.

282 Corol. 5. In eodem circulo æquales

chordæ æquales peripheriæ partes sivè arcus intercipiunt (fig. 3). Superimponatur pars AB parti DC, supposita æqualitate chordarum AB, DC, perfectè congruent, curvatura enim in circulo ubique eadem est: sunt igitur æquales. Similiter arcus æquales ejusdem circuli, æqualibus chordis insistere debent; quod pariter superimpositione manifestum fiet. Hoc geometrarum more dicitur subtendere arcus, aut chordas æquales.

§. II.

Linearum positio respectiva.

283 Defin. Linea *perpendicularis*, aut *normalis* ea dicitur, quæ cadens super aliam, in neutram partem inclinat; seu cujus omne punctum æquè distat utrinque à punctis alterius æquè dissistis ab eo, in quod illa cadit. Linea AB (fig. 4.) est perpendicularis CD.

284 Defin. 2. *Obliqua* linea vocatur, quæ super aliam decidens, in unam magis, quam in aliam partem inclinat. EF (fig. 5) obliqua est respectu AB, CD.

285 Defin. 3. *Lineæ parallelæ* dicuntur, quæ ita sunt positæ è regione altera alterius, ut omnia unius puncta æquè distent ab altera: undè si in infinitum producerentur, numquam concurrerent, sed ubique æquè distarent. Porrò distantia unius puncti ab aliqua recta desumitur à perpendiculari ab eo puncto ad lineam ducta. Lineæ AB, CD (fig. 5) sunt parallelæ.

286 Defin. 4. Lineæ rectæ in aliquo puncto concurrentes, angulum efficiunt. Si perpen-

dicülariter altera super alteram cadat, *angulus erit rectus*, ut in B (fig. 4): quod si obliquè cadat, ut EB, aut EF in E (fig. 5), angulos efficiet hinc *acutum*, indè *obtusum*: qui minor est recto, *acutus* dicitur, *obtusus* verò, qui major est recto. Anguli tribus litteris designari solent; quæ in medio ponitur, verticem anguli, seu locum anguli indigitat; ut ABD (fig. 4) designat angulum, quem in B faciunt duo lineæ AB, DB: BDA indicat angulum, quem in D faciunt lineæ BD, AD. Quando verò in punctum duæ tantum lineæ conveniunt, tunc sublato æquivocationis periculo, angulus unica littera designari potest ad anguli verticem apposita. Vertex porrò anguli dicitur, ubi duæ lineæ conjunguntur, ut in A.

287 Theor. 1. *Recta super rectam cadens, aut duos angulos rectos facit, aut duobus rectis æquales. Dem.* Cadat AB (fig. 4) supra CD; si perpendiculariter cadit, tam angulos ABD, quàm ABC erunt recti (ex defin. 286) si obliquè cadit, ut in EB; anguli EBC, EBD simul sumpti æquales sunt duobus aliis ABD, ABC, qui recti sunt.

288 Corol. 1. Quoties linea perpendicularis est alteri, hæc vicissim perpendicularis illi est: nam invicem faciunt duos angulos rectos. Similiter nequit linea lineæ obliqua esse, quin hæc quoque ipsi obliqua sit: aliter hinc faceret angulum rectum, illinc acutum, qui simul sumpti minores sunt duobus rectis.

289 Corol. 2. Producta linea AB (fig. 4) in F, simili ratione patet, duos angulos CBF, DBF

duobus rectis æquales esse; ac proindè duæ rectæ se invicem secantes faciunt quatuor rectos, si perpendiculariter cadant: si autem obliquè, quatuor rectis æquales. Pariter si duæ rectæ in idem punctum alterius rectæ concurrentes, hinc illinc faciant cum hac recta duos angulos, quorum summa æqualis sic duobus rectis; erunt in eadem directione, atque in unam rectam coalescent: ut GB, EB supra CD cadentes, concurrunt in puncto B, atque angulos EBD, GBD, aut EBC, GBC efficiunt, quorum summa æqualis est duobus rectis (287), in unam rectam EG coalescunt. Jam si centro E ducatur circulus ADFC, mensura quatuor angulorum erit integra circumferentia circuli; quæ 360 gradibus constat (277); qui, si per 4 dividantur, quorum dat 90 pro mensura anguli recti. Reliqui autem singuli in centro facti pro mensura habebunt tot gradus, quot comprehendit arcus ab eorum cruribus interceptus. Omnium enim simul mensura sunt quatuor recti.

290 Corol. 3. Quum recta super alia cadens in unam non coalescant, sed spatium aliquod intercipiant, angulos hinc indè efficiunt: ex his dicuntur ad verticem oppositi, qui sibi invicem (fig. 4) verticibus imminent: ut ABE, FBG: atque etiam EBF, ABG. Manifestum est omnes ad verticem oppositos æquales esse. Nam si perpendiculariter cadit, ut in ABF, facit quatuor rectos, qui omnes æquales sunt. Si verò obliquè, ut EBG, angulus acutus EBA cum obtuso EBF facit duos rectos: similiter GBF, qui illi ad verticem opponitur cum eodem EBF

facit duos rectos: ergo hoc ablato reliqua erunt æqualia. Eodem modo ostenditur angulos ABG, EBF ad verticem oppositos esse æquales.

291 Corol. 4. A puncto ad datam lineam unica perpendicularis duci potest. Nam si à puncto A (fig. 4) alia esse posset perpendicularis CD, ad alterutrum latus caderet respectu AB: ergo jam esset inclinata, neque angulos rectos cum CD faceret, ac proindè perpendicularis non esset contra suppositionem (283).

292 Theor. 2. *Perpendicularis minor est obliqua ab eodem puncto ad datam rectam ducta. Dem.* Sit (fig. 4) AB perpendicularis CD, et AD ipsi CD obliqua: producta AB in F, atque à D in F ducta alia æquali ipsi AD, erit ADF major ABF (272), quum ABF sit recta, ADF obliqua: ergo ablatis BF, DF, quæ dimidia sunt linearum ABF, ADF, reliqua dimidia erunt in eadem inæqualitate, nimirum AD major AB, quum dimidia sit ut tota.

293 Corol. 1. Perpendicularis omnium brevissima est, quæ à puncto ad datam rectam duci posunt: omnibus enim obliquis brevior est. Obliquarum verò ab eodem puncto ad datam rectam ductarum, ea major est, quæ magis à perpendiculari distat, minor quæ ad eam magis accedit. Undè si duæ lineæ ab eodem puncto ductæ æquè distent hinc illinc à perpendiculari, æquales sunt: aut si æquales sunt, æque distant à perpendiculari.

294 Corol. 2. Recta AB (fig. 4) ad rectam CD perpendicularis est, si duo quælibet ipsius puncta, uti A, B, æquè distent à duobus qui-

busvis, sed à concurso perpendicularis æquè dissitis, alterius C, D, quum scilicet AC=AD. et CB=BD. Nam quum duo puncta lineæ rectæ positionem determinent (273), si punctum A æquè à punctis C et D, et punctum B ab iisdem punctis æquè distat, directio totius AB, etiam infinitè productæ, eadem erit, ac proindè angulos hinc indè æquales efficiet.

295 Probl. 1. *Ad datum in recta punctum perpendicularem elevare.* Solut. Sit datum punctum B in linea CD (fig. 4): circino cape hinc indè æquales partes à puncto B; deinde crure circini in quolibet ex punctis æquè distantibus à B, fac decussationes in L; linea à puncto L ad punctum B erit perpendicularis. Nam per constructionem linea LB habet duo puncta æquè distantia à CD: ergo per præcedens corol. erit perpendicularis ipsi CD.

296 Probl. 2. *A dato extra rectam puncto ipsi perpendicularem ducere.* Solut. Sit punctum L (fig. 4), ex quo perpendicularis ad CD duci debeat: circino cape æquales partes à puncto L ad puncta in CD respondentia *a b*; vel duc semicirculum rectam CD secantem in punctis *a b*: deindè ex his punctis fac decussationes in L, H, ducque lineam HL; hæc erit perpendicularis ipsi CD. *Dem.* Duo puncta LB, aut etiam HB æquè distant à punctis *a b* per constructionem: ergo linea ducta est perpendicularis.

297 Probl. 3. *Datam rectam bifariam secare.* Solut. Operatio eadem est ac præcedentis problem. Nam si CD (fig. 4) bifariàm secanda sit, à punctis C, D, aut duobus aliis, *a b* æquè

ab ipsis distantibus, fiant decussationes in L, H: recta per hæc duo puncta ducta bifariàm dividet CD, ut manifestum est ex ipsa operatione.

298 Defin. Linea sivè rectè, sivè obliquè cadens super parallelas (fig. 5) ut EF, quam *secantem* appellavimus, plures angulos cum illis efficit. Alii inter parallelas comprehenduntur, atque *interni* appellantur: alii, quia extra ipsas cadunt, *externi* dicuntur. *Alterni* sunt bini et bini inter se comparati, quorum alter supra ad dexteram, alter infra ad sinistram, aut contrà positi sunt. Quod tam de internis, quam de externis dictum habe. Anguli G, N, et H, O *alterni interni:* E, L, F, M *alterni externi* sunt.

299 Teor. 3. *Secans cum parallelis facit 1. angulos internos, et externos ad eamdem partem appositos æquales. Dem.* Sint parallelæ AB, CD (fig. 5), et secans FE: erunt anguli appositi ad eamdem partem internus, et externus G, M; H, E; F, N, L, O. Jam quum secans ad utramque parallelam eamdem inclinationem servare debeat, idem erit spatium, sive hiatus in partibus G, M etc. à parallela, et secante comprehensus: ergo æquales sunt anguli G, M etc. Superpositione etiam demonstrari potest.

2 *Omnes angulos alternos æquales. Dem.* per præced. Angulus G æqualis est M: at N, qui est alternus respectu G, æqualis est M, quum ipsi ad verticem opponatur (290): ergo æqualis est ipsi G. Hæc demonstratio cum ceteris alternis iterari potest.

3 *Anguli interni ad eamdem partem æquales*

sunt duobus rectis. Dem. G et O sunt interni ad eamdem partem: at O cum M facit duos rectos (287): ergo etiam cum G, qui ipsi M est æqualis per num. 1 theor.

300 Corol. 1. Si angulus externus M æqualis est interno G: aut alterni G, N æquales sunt: vel interni G, O ad eamdem partem æquales duobus rectis; lineæ AB, CD sunt parallelæ. Itaque ex natura parallelismi facilè deducitur, tres has proprietates vinculo quodam necessario inter se connexas esse.

301 Corol. 2. Si duæ rectæ eidem lineæ sunt parallelæ, erunt etiam ad invicem paralelæ. Quam enim positionem respectu alterius habuerint, debent et inter se observare, ut est manifestum.

302 Probl. 4. *Ad datam lineam ipsi parallelam statuere, aut quaslibet parallelas ducere.* Solut. Sit data recta CD (fig. 5): è puncto N quolibet intervallo; ut NA, duc circino arcum DG; postea centro G duc alium arcum ND. interceptis deindè in quolibet arcu æqualibus partibus AG, ND per puncta intercepta ducatur recta AB, quæ erit parallela CD. Pari modo operandum esset, si plusquam duæ parallelæ ducendæ forent. *Dem.* Ducta secante FE, erunt anguli alterni H, O æquales, quum æqualibus arcubus mensurentur per constructionem; ergo sunt parallelæ (300).

§. III.

Linearum positio in circulo.

303 Theor. 1. *Radius* BG (fig. 4) *perpen-*

diculariter dimissus è centro in chordam FD *eam bifariàm dividit, et arcum ab ipsa subtensum. Dem.* Punctum B, quum sit in centro, æquè distat à punctis F, D in circumferentia positis (275): deindè quum recta BG sit perpendicularis FD, omnia ejus puncta æquè distabunt à prædictis punctis FD (294): aliter enim aut perpendicularis non esset, aut punctum B in centro positum non æquè distaret à punctis F, D in circumferentia sitis, contra id quod in theor. ponitur; erunt igitur tam linea FD, quam arcus FGD bifariàm secti.

304 Corol. 1. Recta quælibet per centrum transiens, et chordam æqualiter dividens, eamdem perpendiculariter secat. Nam omnia ejus puncta æquè utrinque distant ab extremitatibus chordæ; erit itaque ipsi perpendicularis (294). Similiter si recta super chordam perpendiculariter cadens, bifariàm dividit, transibit per centrum. Quum enim in æquales partes eam secet, duo illius extrema puncta æquè distabunt à puncto intersectionis; et quum sit ipsi perpendicularis, omnia ejus puncta utrinque ad alterius punctis æquè debent distare: transibit ergo per centrum, quod est unum ex punctis à prædictis circumferentiæ æquè distans.

305 Corol. 2. In eodem, aut æqualibus circulis, chordæ æquales respondent arcubus æqualibus; et viceversa arcus æquales chordas habent æquales: inæquales verò dant tam chordas, quam arcus inæquales. Insuper æquales cordæ æquè distant à centro; inæquales verò inæqualiter.

306 Corol. 3. In eodem, aut æqualibus semicirculis majores chordæ proximiores sunt centro, atque eo majores, vel minores sunt arcus, quo majores, aut minores sunt chordæ, et viceversa.

307 Corol. 4. Chorda diametro parallela intercipit arcus hinc illinc æquales inter ipsam et diametrum comprehensos: hoc ex natura parallelarum, quæ ubiquæ distare debent æqualiter, satis manifestum est. Quod pariter de quacumque circuli portione à parallelis utrinque intercepta dicendum erit.

308 Probl. 1. *Per tria data puncta, non in directum posita, circulum describere.* Solut. Sumantur (fig. 4) tria quælibet puncta A, D, F, quæ duabus rectis AD, FD conjungantur: hæ erunt chordæ circuli describendi. Jam bifariàm dividantur (297): et ex puncto B concursus utriusque lineæ BM, BG bifariàm chordas dividentis, ducatur circulus ACFD; hic transibit per tria puncta data, ut est manifestum.

309 Probl. 2. *Datum arcum bifariàm dividere, sivè dati arcus centrum invenire.* Solut. Ducatur chorda arcum subtendens, eaque bifariàm dividatur per num. 297: recta perpendicularis dividens chordam, bifariàm dividet et arcum, ac per centrum circuli, cujus est arcus, trinsibit. Ut autem in recta punctum centro respondens inveniatur, aliud punctum à duobus diversum sumatur, atque ut in præced. probl. operandum.

310 Defin. angulus, cujus vertex in centro circuli est, vocatur *angulus ad centrum*: quod

si ad peripheriam vertex anguli jaceat à duabus chordis formatus, dicitur *angulus segmenti*, sivè *angulus inscriptus*; nihil tamen vetat quominus *angulus ad peripheriam* vocetur, uti frequentius audit.

311 Theor. 2. *Angulorum segmenti mensura est dimidius arcus, cui insistunt. Dem.* Sit diameter FB (fig. 6) cui ducatur chorda parallela ED. Deindè ducatur secans ACE, quæ cum parallela ED faciat angulum ad peripheriam AED: mensura anguli ACE, qui est ad centrum, erit arcus AB (289): sed angulus ACB æqualis est angulo FCE, utpotè ad verticem opposito (290); et angulus FCE æqualis angulo AED, quippè alterno; ergo omnes habent eamdem mensuram, arcum scilicet AB. Quod autem AB sit dimidium AD, sic demonstro. ED, FB sunt parallelæ per constructionem; ergo arcus BD= FE (307): at FE=AB, quum sit uterque æqualium angulorum mensura, ergo AB=BD; et totus AD duplus AB. Mensura igitur anguli AED ad peripheriam est dimidium arcus, cui insistit. 2. Ne tamen demonstratio singularis videatur ad casum, in quo per centrum transeat, ducantur aliæ rectæ HE, GE eodem intervallo AB, ita ut faciant angulum HEG duplum præcedentis AED. Jam quum mensura anguli AED sit dimidius arcus AD, ejus dupli mensura erit totus arcus AD: at ex constructione arcus HG est duplus ipsius AD; ergo mensura anguli HEG est dimidius arcus HG.

3. Pari methodo ostendam anguli DEG mensuram esse dimidium arcum GD; nam per constructionem DEG=HEA: at hujus mensura est dimidius arcus HA ex num. 1 hujus theor. quum linea ACE per centrum transeat; erit itaque dimidius DG mensura angul. DEG.

312 Corol. 1. Angulus ad centrum eidem arcui insistens, ac angulus ad peripheriam, hujus duplus est. Nam hujus mensura est dimidius, alterius integer arcus, cui insistit.

313 Corol. 2. Angulus diametro insistens rectus est: ejus enim mensura est quarta pars peripheriæ, quæ anguli recti est mensura (289). Angulus verò insistens arcui, semiperipheria majori, est obtusus; semicircumferentia minori, est acutus; ut ex ipsis terminis est manifestum.

314 Defin. Si diameter ACB (fig. 7) semper sibi parallelus ascendat ad extremitatem radii CF, qui ipsi perpendicularis sit, evadet *tangens* DE; quod ad quascumque lineas eodem modo supra radium collocatas extendi debet.

315 Corol. 1. Tangens extremitati radii perpendicularis est; in neutram enim partem inclinat. Deindè quum AB sit parallela DE per constructionem, et ACF, BCF recti sint, etiam DFC, EFC recti erunt.

316 Theor. 3. *Tangens in unico puncto circulum tangit. Dem.* Ducantur rectæ CD, CE, aut quæcumque alia inter ipsas, donec cum FC concurrant; reliquæ omnes sunt obliquæ respectu FC, quæ est perpendicularis; ergo majores ipsa; ac proindè extra circulum cadunt; ergo DE, FC solum in puncto F concurrunt; ac proindè unum tantum est punctum contactus.

317 Corol. 1. *Tangens* circulum non ingreditur: quum enim in puncto solum concurrant, ac veluti deosculentur, alia extra alium est. Hinc inferre licet globum perfectè rotundum, qui sphæra dicitur, si supra planum perfectum jaceat, ipsum in unico puncto contingere; quod hic insinuare suficiat, nondum præmissis notionibus plani, et sphæræ.

318 Corol. 2. Inter circulum, sivè sphæram, et tangentem infinitæ curvæ duci possunt. Hoc quod paradoxum videtur, exemplo ostendi potest. Nam supra tabulam, quæ perfectè plana sit, possunt superponi globi semper majores in infinitum, quin umquam cum plano tabulæ confundantur: globi autem impositi, et tabulæ confundantur: globi autem impositi, et crescentes in infinitum, tot curvæ sunt inter primum globum et planum, seu tabulam ductæ, quæ veluti tangens, et circulus considerari possunt. Magis adhuc sapit paradoxon, angulum à tangente et peripheria factum, qui angulus contactus dicitur, minorem esse quovis minimo angulo rectilineo. Nulla enim recta duci potest inter circulum, et tangentem, ut est manifestum. Nam recta quæcumque ducta inter utrumque circulum secaret, adeòque extra angulum esset: hoc autem à singulari natura curvarum repeti debet.

319 Theor. 4. *Anguli à tangente, et chorda effecti mensura est dimidius arcus à chorda interceptus. Dem.* Sit tangens AB (fig. 8) quæ cum chorda CD faciat angulum BCD; dico hujus anguli mensuram esse dimidium arcus CD. Ducatur ED parallela tangenti AB. Angulus BCD

=CDE, nam alterni sunt: et anguli CDE mensura (311) est dimidius arcus CE=CD, utpotè à parallelis comprehensi (307): erit igitur dimidius arcus CD mensura anguli BCD.

2. Si angulus à tangente, et chorda effectus major esset recto, ut BCF, etiam ostendo illius mensuram esse dimidium arcum CDF. Nam anguli BCD mensura est dimidius arcus CD, ut prius demostratum est: anguli etiam DCF mensura est dimidius arcus DF (311); ergo totius BCF mensura erit dimidius arcus CDF.

320 Probl. 1. *Ad datum in peripheria punctum tangentem ducere.* Solut. Sit datum punctum F (fig. 7.); ducatur radius CF; huic radio ducatur perpendicularis DE (295), hæc erit tangens. Demonstratio deducitur ex num. 314.

321 Probl. 2. *A dato extra circulum puncto ipsi tangentem ducere.* Solut. Sit datus circulus FG (fig. 9.), cui ducenda sit tangens è puncto A. Ducatur à centro C ad punctum A recta AC, quæ bifariàm dividatur. (297) in E. Centro E duc alium circulum AC; hic alterum secabit in punctis F, G: per hæc puncta ducantur rectæ AB, AD; hæ erunt tangentes circuli, FG. *Dem.* Ducantur radii CF, CG; anguli AFC, AGC sunt recti, nam insistunt diametro AC (313): erunt igitur AB, AD perpendicularis radiis CE, CG: ergo et tangentes (315).

322 Theor. 5. *Anguli* A (fig. 10.), *qui fit extra centrum à duabus chordis* BE, CD *se invicem secantibus, mensura est dimidius arcus* BC, *plus dimidium arcus* DE. *Dem.* Ducatur EF parallela AC. Angulus A=E (299), quippe in-

ternus et externus ad eandem partem: at mensura anguli E est semisumma arcus BF; et semisumma hæc æqualis est dimidio arcui BC +CF: et substituendo pro CF æqualem DE (307), erit mensura anguli A, $\frac{1}{2}$BC+$\frac{1}{2}$ DE.

323 Theor. 6 *Anguli* A (fig. 11.), *à duabus chordis extra circulum effecti, mensura est dimidium arcus* BC, *minus dimidium arcus* DF. *Dem.* Ducatur DE parallela BF: angulus EDC =BAC; sunt enim internus, et externus ad eamdem partem inter secantem et parallelas (299): at quum anguli EDC mensura sit $\frac{1}{2}$ arcus EC (311), erit etiam mensura anguli BAC. Rursus $\frac{1}{2}$ EC=$\frac{1}{2}$ (BC—BE), et BE=FD. (307): ergo mensura anguli BAC est $\frac{1}{2}$ (BC—FD).

§. IV.

Linearum conjunctio in figuras.

324 Defin. 1. Lineæ extremitatibus conjunctæ figuram efficiunt. Hinc *figuram* dicimus spatium undique lineis clausum. Evidens autem est duas tantum lineas rectas spatium claudere non posse. Undè tres minimum lineæ ad figuram requiruntur, et hæc figura dicitur triangulum: quatuor habet *quadrilaterum*, quinque *pentagonum*, sex *hexagonum*, septem *heptagonum* etc. *Polygonum* nomen genericum est, quamvis figuram designans pluribus lateribus compositam. Circulum veluti polygonum infinitis lateribus constantem concipimus. In præsentia triangulum considerabimus, et quidem

rectilineum: hoc enim solum ad longimetriam pertinet.

325 Defin. 2. Basis trianguli frecuenter dicitur linea, quæ inferius est. Potest tamen ad libitum quodlibet latus pro basi assumi. Spatium lateribus comprehensum, *area* trianguli appellatur. Angulus basi oppositus *vertex* trianguli est. Linea autem normaliter ducta à vertice ad basim est mensura altitudinis trianguli. Potest etiam extra basim sumi, producta nimirum basi ut è vertice perpendicularis ducatur, quod in triangulis obliquis omninò fieri necesse est.

326 Defin. 3. Triangulum considerari potest vel in lateribus, vel in angulis. Et 1. quidem juxta triplicem diversitatem laterum triplex etiam nomen sortitur. Si latera omnia æqualia sint, dicitur *æquilaterum*: duobus tantum lateribus æqualibus constanti *isosceles* nomen inditum est: *scalenum* verò appellant, quod tria latera inæqualia habet. Ab angulis etiam triplex nomen emanavit. *Rectangulum* dicitur triangulum, quod uno recto constat: *obtusangulum*, quod obtuso: *acutangulum*, quod tres angulos acutos habet. Manifestum erit ex seq. theor. triangulum rectilineum unum tantum angulum rectum, aut obtusum habere posse.

327 Theor. 1. *Tres anguli cujuscumque trianguli æquantur duobus rectis: atque inde eorum mensura est semiperipheria circuli. Dem.* Cuilibet triangulo circumscribi potest circulus (308); adeòque omnes anguli erunt inscripti circulo, totamque peripheriam comprehendent:

at angulorum circulo inscriptorum mensura est dimidium arcus, cui insistunt (311), erit itaque dimidium circuli mensura trium angulorum. Semicircumferentia verò est summa duorum rectorum (289): ergo in omni triangulo angulorum summa æquatur duobus rectis.

328 Corol. 1. Datis duobus angulis in triangulo, tertius manifestè deducitur. Uno autem dato, summa duorum reliquorum est differentia inter datum, et duos rectos. Ideo ex 180 gradibus detracto valore dato, residuum erit valor unius, aut duorum simul angulorum, prout duo, aut unicus cogniti fuerint.

329 Corol 2. Angulus externus (fig. 12.) ABD æqualis est duobus internis oppositis ACB, CAB. Nam ABC cum ABD est duobus rectis æqualis (287): at etiam cum BAC, et ACB simul facit duos rectos: ergo A, et C simul æquantur ABD. Hæc demonstratio iterari potest cum quolibet angulo, producto extra triangulum latere.

330 Theor. 2. *In triangulo. 1. Si duo, aut omnia latera sunt æqualia, anguli his oppositi sunt æquales. 2. Si anguli sunt æquales, latera angulis opposita sunt æqualia. 3. Si inequales anguli, majori angulo majus latus opponitur. Dem.* Triangulo ABC (fig. 13) circumscribatur circulus. 1. Si latus AB=AC, arcus ab ipsis subtensi erunt æquales (305): ergo etiam anguli, qui ipsis insistunt erunt æquales, quum eorum mensura sit dimidium arcum æqualium. Si anguli sunt æquales, æqualibus arcubus insistunt: ac proindè latera, quæ sunt

cerdæ talium arcuum, erunt æqualia. 3. Major angulus majori arcui, minor minori insistere debent: ac proinde chordæ, seu latera, erunt respectivè majores, aut minores.

331 Corol. In triangulo æquilatero omnes anguli sunt inter se æquales; et viceversa, quum anguli sunt inter se æquales, triangulum est equilaterum. Nam si circulus eidem circumscribatur, æquales erunt arcus, quibus insistunt anguli, si chordæ sunt æquales; et contra, si anguli sunt æquales, debent insistere arcubus æqualibus, ac proindè eorum chordæ, seu latera trianguli erunt æqualia. In triangulo autem isoscele anguli lateribus æqualibus respondentes æquales sunt: ac ubi latera æqualia fuerint, anguli ipsis opositi æquales erunt, et triangulum isoscele.

332 Theor. 3. *Si in duobus triangulis latera æqualia sunt, omninò æqualia erunt. Dem.* Si cuilibet triangulo circumscribatur circulus (fig. 13 et 14), latera æqualia erunt chordæ æquales talium circulorum, ac proindè divident circulum in tria segmenta respectivè æqualia (305): ergo circuli circumscripti erunt æquales, et tota triangula æqualia.

333 Theor. 4. *Si duo triangula habuerint duo latera respectivè æqualia,* (quæ homologa dicuntur) *et angulum ab ipsis lateribus æqualibus comprehensum æqualem, tota triangula erunt æqualia. Dem.* Superimponantur trianguli latera æqualia AB super *ab* (fig. 13 et 14), ita ut punctum A incidat in *a*. et B in *b*. Quoniam anguli A, *a* sunt æquales, conversis

triangulis ad eamdem partem, latus AC incidet in ac, quum vero hæc duo latera ponantur æqualia, non poterit unum AC incidere in alterum ac, quin congruente jam puncto A cum a, etiam C congruat cum c: ergo tota triangula congruant necesse est; adeòque æqualia sunt.

334 Theor. 5. *Si in duobus triangulis* (fig. 13. et 14) ABC, *abc duo anguli sint respectivè æquales*, $A=a$, $B=b$, *et unum ex lateribus* AB *angulis respectivè æqualibus comprehensum, lateri alterius* ab *æquale, omnia pariter erunt æqualia. Dem.* Concipiatur latus AB superimponi lateri ab: quoniam æquales sunt, et anguli $A=a$, et $B=b$, alia duo latera AC, BC super ac bc cadere debent: si enim extra aut intra caderent, jam anguli non essent æquales: ergo in eodem puncto c sibi occurrent, atque adeò tota triangula debent congruere; sunt igitur æqualia.

335 Defin. Triangula similia (quod ad alias figuras extendi potest) ea dicuntur, quorum anguli homologi æquales sunt: latera verò diversam habent magnitudinem. Manifestum est, quamvis figuram augeri, aut minui posse; magnitudine tantum proportionaliter variata, quin cetera mutentur. Tunc figuræ erunt similes, non tamen æquales.

336 Theor. 6. *In triangulis similibus, si angulum angulo æquali imponas, latera, quæ his angulis opponuntur, erunt parallela. Dem.* Sint duo triangula (fig. 15) ABC, abC æquiangula; superimponantur in angulo homologo C: lineæ, seu latera AC, aC, BC, bC perfectè congruent;

et angulus $A=a$, et $B=b$: erit igitur AB parallela ab (300). Nam anguli A, a, B, b sunt internus, et externus respectu linearum AB, ab. Eodem modo res procederet, si imponeretur a super A; latera BC, bC essent parallela; quia anguli B, b internus, et externus ad eamdem partem, facti à linea AB cadente super duas alias, essent æquales.

§. V.

Ratio Linearum, sivè Proportiones.

337 Defin. 1. Lineæ sunt proportionales quando prima est ad secundum ut tertia ad quartam, quemadmodum arts. 188, et seq. de numeris jam explicatum est. Hinc inter lineas proportionales productum extremorum æquale est producto mediorum; et vicissim, quum productum mediorum æquale est producto extremorum, inter ipsas invenitur proportio geometrica. Sic linea unius pedis est ad lineam 100 pedum, ut linea unius milliarii ad 100 milliaria.

338 Theor. 1. *Quum duo triangula sunt similia, latera homologa sunt proportionalia. Dem.* 1. Sit triangulum æquilaterum ABD (fig. 15.); basis BC bifariàm dividatur in b; atque à puncto bisectionis ducatur ab parallela AB. Triangula ABC, abC sunt æquiangula; nam angulus $A=a$ et $B=b$ (299); ac tertius C utrique communis. Jam quum latus BC sit duplum bC, erit pariter AC duplum aC: sit $BC=10$ pedibus, aut lineis: erit $bC=5$. Quod

pariter tenet in alio latere AC respectu *a*C quum sit triangulum æquilaterum. Ecce in numeris latera expressa 10: 5:: 10: 5, valores nimirum laterum AC: *a*C:: BC: *b*C. At numeri prædicti sunt evidenter proportionales, quia productum extremorum æquale producto mediorum: ergo etiam latera utriusque trianguli.

2. Fac triangulum non equilaterum sed scalenum esse, ut in fig. 16; et parallelam *ac* secare latera in quacumque ratione, putà 1: 3; ita ut A*a*, C*c* sint tertia pars suorum laterum. Supponatur latus AB=27, et latus BC=18; (quivis numeri substitui possunt, qui trifariàm dividantur) erit 27: 9:: 18: 6. At hi numeri sunt in proportione geometrica: ergo etiam latera parallela divisa sunt in eadem proportione. In hoc secundo casu proportionem transtulimus ad segmenta laterum, quæ à parallela proportionaliter etiam secantur, ut est demonstratum. Perspicuitati magis, quam rigori geometrico in hac demonstratione studuimus, ut sæpe alias, tironum utilitati cunsulentes. 3. Ceterum hoc etiam modo proportio inter latera homologa potest demonstrari, ne assumere videamur, quod probandum est. Quoniam triangula ABC, *a*B*c* ponuntur similia, erit angulus C=*c*, et A=*a*; adeòque AC, *ac* erunt parallelæ (300): ergo AB: BC:: *a*B: B*c*; quæ proportio etiam in reliquis homologis institui potest.

339 Schol. In demonstrationibus præjactis attullimus dimidiam et tertiam partes, ut proportionem genericè demonstraremus. Manifestum autem est cuicumque naturam mathematicarum demostrationum callenti, eas inniti ratione universali quæ ad casum particularem deducitur, ut minus abstracte, et confusè res percipiatur. Quarè ex theor. universim deducendum, in triangulis similibus latera proportionalia eam rationem inter se habere, ut si latus unum respectu alterius tot habeat partes aut *aliquotas*, aut *aliquantas*, scilicet quæ sine residuo, aut cum residuo latus dimetiantur; easdem in altero respectu sui consequentis debere reperiri. Sic triangulum à lineis visualibus ab oculo ad lunam, et solem directis formatum, tot habet partes majores in semidiametris ex g. terrestribus, quot parvulum triangulum, in charta astronomi ad normam alterius descriptum, in punctis minoribus continebit. Pariter in sectionibus à parallelis in eodem triangulo factis; ea ratio inter partes, seu segmenta trianguli invicem comparata reperitur, quæ in partibus proportionalibus totius trianguli invenietur. Exempla adducta satis superque id ostendunt.

340 Theor. 2. *Si triangula latera duo habuerint proportionalia et angulus à lateribus proportionalibus interceptus æqualis utrobique sit; triangula erunt similia.* *Dem.* Sint duo triangula ABC, *ab*C (fig. 15), ubi latera, AB, AC sint proportionalia lateribus *ab*, *a*C, et angulus A=*a*; erunt anguli in C et in *b* æquales, et bases BC, *b*C, proportionales: ac deindè tota triangula similia. Nam anguli in A et *a* ponuntur æquales: erunt igitur AB, *ab* parallela (300), quia angulos internum et externum ad eamdem

partem faciunt æquales, ergo etiam anguli in B, et *b* sunt æquales; atque adeò tertius tertio C æqualis utrobique erit (328), ac triangula erunt æquiangula, et similia, et omnia latera homologa proportionalia (338).

341 Corol. Si recta AD (fig. 17) angulum BAC in duos angulos æquales dividat; eamdem rectam BC, angulo A oppositam, dividet in partes BD, DC lateribus AB, AC proportionales: et si dividit in partes proportionales, angulum bifariam dividit. Etenim producta A in E, ita ut fiat æqualis AC, ducatur EC. Quoniam in triangulo ACE duo latera sunt æqualia, erit isoscele, et anguli in E et C æquales, et angulus BAC, utpote externus, æquatur duobus E et C (329), et suponitur bifariàm divisus: sunt igitur anguli C=E=DAC=DAB; et AD; EC parallelæ (300): ergo AB: AE :: BD: DC: et quum AE=AC, erit etiam AB: AC :: BD: DC.

2. Si ponitur BD: DC :: AB: AC, quum AC=AE, erit etiam BD: DC :: AB: AE, atque AD, EC erunt parallelæ (338): erit igitur angulus BAD=E=C=CAD: ergo angulus BAD =CAD et totus BAC bifariam divisus per AD.

342 Theor. 3. *Duæ chordæ* (fig. 18) *se mutuò secantes in circulo, habent segmenta reciprocè proportionalia.* Claritatis gratia permittendum est proportionem tum esse reciprocam seu inversam, quum duæ primæ quantitates, quæ cum aliis duabus comparantur, non sunt antecedens, et consequens primæ rationis, ut in proportione directa; sed aut extrema aut media proportionis: et similiter quan-

titates secundæ rationis extrema aut media sunt. In casu nostro, ut proportio esset directa, deberet esse AB : BC :: BD : BE; quum sit AB: BD :: BE: BC, in qua sunt BD, BE media proportionis, quæ in directa sunt antecedens et consequens secundæ rationis; et AB, BC extrema, quæ in directa erant antecedens et consequens primæ rationis. *Dem.* Ducatur AE et DC: triangula ABE, CBD sunt similia; nam anguli in B utpotè ad verticem oppositi æquales sunt (290): in C et E sunt etiam æquales, quum insistant arcui AD, quod pariter contingit in D et A, qui insistunt arcui CE (311): latera igitur homologa sunt proportionalia (338): et AB : BD :: BE : BC: et alternando AB : BE :: BD : BC.

343 Corol. 1. In circulo si chorda diametrum perpendiculariter secat, quodlibet segmentum chordæ est media proportionalis inter segmenta diametri. Nam (fig. 18) sit diameter AC: ducatur DE ipsi perpendicularis. Per theor. præced. AB : BD :: BE : BC. At quum BE=BD (303), ipsi substitui potest; ergo AB: BD :: BD : BC. Eadem demostratio in altero segmento BE instituit posset.

344 Corol. 2. Linea quævis, à peripheria in diametrum perpendiculariter demissa, est media proportionalis inter segmenta diametri. Est enim dimidium chordæ, diametrum perpendiculariter secantis, ut in præcedenti corol. Hæc linea dicitur *ordinata* ad circulum, ut BD (fig. 18): pars autem BC, dicitur *abscissa.* Hinc deducitur methodus mediam proportiona-

lem inter duas datas lineas inveniendi. Sint datæ linæ AB, BC inter quas media proportionalis quæritur: jungantur, ut in unam AC coalescant; quæ bifariam divisa dabit centrum circuli ADCE; demum erigatur BD perpendicularis in puncto concursus (295) utriusque lineæ: hæc erit media proportionalis quæsita ex demonstratis.

345 Corol. 3. Quod si à puncto D peripheriæ ducantur DA, DC; duo triangula ADB, BDC erunt similia inter se, et majori triangulo ACD. Nam anguli in B et ADC (313), utpotè recti, æquales sunt: angulus CAD=CDE, quum arcus CE, CD, quibus insistunt, æquales sint (311); quod pariter extendi potest ad arcus AD, AE, quibus insistunt reliqui duo anguli: quamvis ex æqualitate aliorum homologorum satis deducatur reliquorum æqualitas. Hinc deducuntur sequentes proportiones (fig. 23), AD: AG:: AG: AI. Hoc est rectangulum AI×AD seu AB, æquale quadrato AFG. Atque etiam ID: GD:: GD : AD; scilicet rectangulum ID×AD, seu DC=GD^2: productum enim extremorum æquale est facto mediorum. Atque hæc est una ex demonstrationibus celeberrimæ prop. 47, lib. 1. Euclidis; nimirum in triangulo rectangulo quadratum sub hipothenusa AD, æquale esse quadratis laterum AG, DG. Jam enim ostensum est AG^2+DG^2 =AI×AB+DI×DC=AD^2.

346 Theor. 4. *Duæ secantes* AB, AC (fig. 19) *ex puncto* A *ductæ, sunt reciprocè proportionales suis segmentis* AG, AD. *Dem.* Ducantur BD, CG; triangula ABD, ACG sunt æquiangula; nam angulus in A communis, in B et C insistunt eidem arcui DG (311): tertius igitur tertio æqualis erit. Hinc laterum homologorum proportio resultat AB: AD :: AC: AC; et alterando AB : AC:: AD: AG.

347 Corol. Si recta AB sit secans, et AE tangens, erit AB: AE:: AE: AG; adeoque tangens est media proportionalis inter secantem et ejus segmentum. Etenim ductis BE, EG, triangula ABE, AEG sunt equiangula quum angulus A communis sit; et anguli in B atque E æquales (311, 319): resultat ergo proportio sequens AB: AE :: AE: AG. Ex hoc corollario deducitur etiam methodus inveniendi mediam proportionalem inter duas lineas datas, ut est manifestum.

348 Probl. 1. *Datam rectam, aut rectas in partes partibus alterius proportionales dividere.* (fig. 20). Solut. Sit F G ad cujus normam aliæ DE, BC dividendæ sint. Solut. Statuantur parallelæ prædictæ rectæ, ac per earum extremitates ducantur AF, AG, ita ut fiat triangulum AFG; deindè à partibus, in quas divisa est FG, ducantur rectæ ad punctum A: dico partes, in quas divisæ sunt DE, BC proportionales esse partibus in FG respondentibus. *Dem.* Triangula ABı, ADı, AFı sunt similia: nam angulus in A est communis, in B, D, F sunt æquales (299): sunt igitur aquiangula, et latera homologa habent proportionalia; bases nimirum Bı, Dı, Fı. Hæc demonstratio ad cætera ejusdem figuræ triangula communis est.

2 Potest etiam ex num. 339 alia methodus deduci. Sint AF, AG (fig. 20) in partes proportionales altera alterius dividendæ, ut AC, CE, EG. Statuantur ad angulum quemcumque A, et ducatur FG. Ex punctis C, E ducantur BC, DE parallelæ ad FG. Hæ secabunt partes AB, BD, DF proportionales partibus sectionis alterius lineæ; ut constat ex cit. num. 339. Ex hoc problem. derivatur scalæ geometricæ construendæ methodus, cujus usus in Geometria practica frequentissimus.

349 Probl. 2. *Datis tribus lineis, quartam proportionalem invenire.* Solut. 1. Invento in numeris earum valore, facilè per regulam auream quartus numerus proportionalis invenitur. 2. Sint tres lineæ (fig. 20) *a*, *b*, *c*, quibus invenienda est quarta proportionalis: fiat angulus quicumque FAG, et in eo accipiantur pars AB=*a*, et pars AC=*b*, et ducatur BC. Deinde ad latus AB accipiatur pars AD=*c*, atque ex hoc puncto ducatur DE parallela BC: pars AE erit quarta proportionalis quæsita. Nam AB: AC:: AD: AE (338.) Possent etiam intercipi partes ab A in B, et in C; deindè à B in F, atque à C in G, eadem enim proportio resultaret.

CAPUT II.

Planimetria, seu de Superficiebus.

§. I.

Quadrilatera.

350 Defin. *Quadrilaterum* figura est quatuor lineis rectis terminata. Pro diversitate angulorum, et laterum varia etiam nomina sortitur. Nam 1. *Parallelogrammum* dicitur, quod latera opposita habet parallela. 2. *Quadratum*, quod æquilaterum est, et rectos angulos habet. 3. *Rectangulum*, quod rectos habet angulos, et latera opposita tantum habet æqualia. 4. *Trapezium* neque angulos, neque latera habet æqualia. 5. *Rhombus* latera habens æqualia, angulos tantum oppositos habet æquales. 6. *Rhomboides* habet solum latera opposita, et angulos oppositos æquales. Demum, recta inter angulos oppositos ducta dicitur *diagonalis.*

Adnotatio historica. Bonaventura Cavallerius, Mediolanensis, sæculo superiore, ut genesim superficierum, ac reliquarum quantitatum geometricarum explicaret, methodum *indivisibilium* induxit. Concipit enim puncta, aut potiùs lineolas ex quibus lineæ coalescunt, veluti indivisibilia, aut quovis dato minora. Lineas pariter à punctis, seu lineolis tamquam ab elementis compositas, quasi series eorumdem punctorum, ac deindè superficies veluti aggregatum linearum; seu parvarum superficierum contiguarum, quæ quasi ex infinitis punctis, et lineis coalescentes superficiem canstituunt. Demum superficies, quasi superimpositæ eadem contiguitate ac puncta et lineæ, solidum componunt. Ex his principiis, quibus etiam *infinitesimalium* calculus innititur, æqualitatem, aut inæqualitatem figurarum investigat. Evidens namque est, eas figuras æquales esse debere, in quibus totidem elementa, aut puncta indivisibilia reperiantur. Reperientur autem, quum eisdem, aut æqualibus spatiis superficies concluduntur. Nihil enim geometræ diversæ densitatis corporum solliciti, omnia veluti sine poris, atque æquè solida considerant. Jam punctum veluti parvum circulum, aut quadratum, quovis excogitabili minorem considerant, lineam veluti continentia puncta: superficiem continentes lineas in latum extensas: figuras alias, putà circulum, ex infinitis peripheriis concentricis semper minoribus; quadratum ex infinitè minimis quadratis etc. Eamdem hanc methodum usurpasse Archimedem prolixioris exhaustionis, et triangulorum inscriptorum et exscriptorum ambage propositam, consentiunt Cavallerio recentiores geometræ, cum Montucla in historia Matheseos: quod Jacquierius ad infinitesimorum calculum etiam extendit. Sanè hæc recentiorum sors esse videtur, ut si quid inventum ab ipsis sit, uti novitatum auctores refelluntur: quod si ab antiquis quoquo modo usurpatum ostendant, furti arguantur, quod Cavallerio, aliisque contigisse comperimus.

351 Theor. 1. *In parallelogrammo latera opposita sunt æqualia; idcircò quadrilaterum,*

latera opposita habens æqualia, erit parallelogrammum. Dem. Sit (fig. 21) ABCD parallelogrammum; ducatur diagonalis BD: anguli ABD, BDC, utpotè alterni, æquales sunt (299); quod pariter de angulis ABD, DBC dicendum est: duo igitur triangula sunt æquiangula; porrò quum latus BD sit utrique commune, reliqua etiam latera angulis æqualibus opposita erunt æqualia, (334): ergo AB=CD, et AD=BC.

2. Quoniam AD=BC, et AB=CD, et latus BD commune, triangula à diagonali facta erunt æqualia (330), et anguli lateribus æqualibus oppositi ABD, BDC æquales: at hi sunt alterni: ergo AD, BC sunt parallelæ (300).

352 Corol. 1. Omnes anguli quadrilateri quatuor rectis æquantur. Nam per diagonalem in duo triangula dividuntur; et valor angulorum cujusqumque trianguli sunt duo recti (327).

353 Corol 2. Diagonalis parallelogrammum in duo triangula similia, et æqualia partitur. Secans enim parallelas angulos alternos facit æquales (229): et quum diagonalis sit latus commune, cui æquales anguli insistunt, tota triangula erunt æquiangula, et æqualia (334).

354 Theor. 2. *Duo parallelogramma ABCD* (fig. 22.) *BEFC, ejusdem basis, et altitudinis, seu inter easdem parallelas constituta, æqualia sunt. Dem.* Triangulum BCG utrique parallelogrammo commune est: restat igitur, ut duo trapezia ABGD, CFEG ostendantur æqualia. Jam triangula ABE, CDF æqualia sunt; nam latus AB=DC, latus BE=CF, et quum pars

DE sit utrique communis, atque AD=EF; omnia latera, et triangula erunt æqualia (332). Demum ablato triangulo DEG utrique communi, reliqua erunt æqualia.

355 Corol. 1. Triangula sunt dimidium parallelogrammi ejusdem basis, et altitudinis. Nam si eadem basi et altitudine fiat parallelogrammum ABCD (fig. 21), hoc æquale est duobus triangulis æqualibus (353) ABD, BCD. Quodlibet igitur triangulum erit ejus dimidium.

356 Corol. 2. Ob eamdem rationem triangulum parallelogrammo basi æquale, altitudine duplum, aut vice versa, æquale erit ipsi parallelogrammo. Erit enim dimidium alterius parallelogrammi, quod sivè basi, sivè altitudine sit primi duplum. Altitudo autem in figuris geometricis est perpendicularis è vertice ad basim, sivè distantia inter parallelas per verticem, et basim transeuntes. Sic AB, aut DC (fig. 22) mensura est altitudinis utriusque parallelogrammi recti, et obliqui.

§. II.

Superficierum mensura.

357 Theor. 1. *Superficies parallelogrammi æqualis est producto baseos in altitudinem.* *Dem.* Sit cujuscumque parallelogrammi ABCD (fig. 22.) basis BC æqualis sex pedibus, aut hexapedis, et altitudo æqualis octo, manifestum est *aream* totam ABCD haberi, si ducantur $6\times8=48$. Nam tota superficies concipi potest divisa in tot parva quadrata, qualia designata sunt

numeris 1, 2, 3, etc.; et quum pes unus in altitudine producat sex in latitudinem, octo dabunt 48 parva quadrata, seu pedes, ut dicunt *quadratos* in tota superficie. Idem pariter concipi debet, etiamsi basis et altitudo sint incommensurabiles, quod jam num. 339 animadversum est pro triangulis, et ad omnes figuras extendi debet.

358 Corol. 1. Superficies trianguli æqualis est producto basis in dimidiam altitudinem, aut altitudinis in dimidiam basim. Est enim dimidium parallelogrammi ejusdem basis, et altitudinis (355), cujus area æqualis est producto basis in altitudinem, aut vice versa ex num. præced.

359 Corol. 2. Quælibet parallelogramma, adeòque et triangula, super eadem basi, et inter easdem parallelas constituta, æqualem habent superficiem, cujus mensura est productum baseos in altitudinem pro parallelogrammis, et dimidium pro triangulis. Quod quidem extendendum est etiam ad parallelogramma, et triangula quorum inclinationes diversæ sint, quum altitudines sumantur à distantia parallelarum, inter quas comprehenduntur.

360 Corol. 3. Ex hoc theor. deducitur vulgaris demonstratio proposit. 47 lib 1. Euclidis, quam faciliori methodo jam demonstravimus num. 345. Propositio autem euclidæa, est quadratum hypothenusæ cathetorum quadratis æquale esse. En demonstrationis compendium. Esto triangulum rectangulum AGD (fig. 23): sub hypothenusa AD, et super cathetos AG,

DG quadrata describantur; deinde quadratum ABCD in duo rectangula ABHI, CDIH dividatur ope lineæ GH, per angulum rectum G trianguli rectanguli ductæ ac lateribus AB, DC paralellæ, ac demum ducantur rectæ BG, CG, AE, DF. Jam parallelogrammum ABHI est ejusdem basis, et inter easdem parallelas, ac triangulum ABG: erit igitur ipsius duplum ex num. 355. Quadratum pariter AGF, et triangulum FAD habent eamdem basim AF, atque inter parallelas ejusdem quadrati FA jacent; adeòque quadratum FA duplum erit trianguli ejusdem basis et altitudinis AFD. Rursus triangula ABG, ADF æqualia sunt; nam latus AB=AD: latus AG=AF; atque angulus ab his lateribus comprehensus utrobique rectus, et angulus GAI communis utrique (333): ergo eorum dupla etiam erunt æqualia; nimirum AG^2=ABHI. Eadem demonstratione iterata inter rectangulum CDIH, et quadratum DEG, evidenter deducitur $AD^2=AG^2+DG^2$; quum quodlibet quadratum cathetorum æquale sit ei, quod sibi respondet è duobus rectangulis, in quæ hypothenusæ quadratum est divisum. Quod autem tam quadratum FG, quam triangulum ADF sub eisdem lateribus parallelis comprehendantur, patet ex eo quod AG supra lineas G ac D cadens, angulos utrinquè rectos format, atque adeò ambæ in unam rectam coalescunt (289).

361 Corol. 4. Superficies trapezii cujuscumque habebitur, ducta diagonali, ac superficie in duo triangula divisa. Nam si è vertice ad

basim utriusque trianguli demittatur perpendicularis, atque hæc ducatur in basim, dimidium productum erit area trianguli, et duplex dimidium productum dabit integram aream trapezii. Hinc deducta est praxis metiendi agros, provincias etc., divisa superficie in tot triangula, quod opus fuerit, atque eorumdem basibus in altitudinem ductis; dimidium productum mensura est areæ dimetiendæ. In praxi verò aliæ cautelæ, atque instrumenta adhiberi debent, quorum descriptio non est hujus loci.

362 Probl. 1. *Invenire quadratum æquale summæ aut differentiæ datorum quadratorum.* Solut. Latera datorum quadratorum statuantur ad angulum rectum: deindè ducatur hypothenusa; quadratum hujus erit æquale duobus datis. Quod si non summa duorum, sed differentia unius quadrati ab alio invenienda sit, duæ lineæ datæ ita statuantur, ut una sit hypothenusa, et altera cum alia ducenda faciat angulum rectum. Porrò hujusmodi constructio facilè obtinetur, si ad extremitatem catheti jam notæ perpendicularis ducatur (295); atque ex altera extremitate hypothenusa tamquam radio arcus perpendicularem secans describatur: recta sivè radius ab hac extremitate ad punctum intersectionis ductus, dabit hypothenusam hujus trianguli rectanguli, et cathetum ignotam, cujus quadratum erit differentia unius quadrati ab alio; ut ex æqualitate quadrati hypothenusæ cum quadratis laterum manifestum est.

363 Probl. 2. *Invenire geometricè radices*

quadratas numerorum naturalium 2, 3, 4 *etc.* Solut. Quamvis aliquorum numerorum radices arithmeticè inveniri non possint, quæ numeris, aut integris, aut fractis exactè exprimantur, geometricè tamen facillimè inveniuntur. Sit linea indefinita AC (fig. 24): ducatur AB normalis, quæ sit æqualis 1: accipiatur in parte AC, $Aa = AB$, et ducatur hypothenusa Ba: erit $Ba^2 = Aa^2 + BA^2 = 1 + 1 = 2$; et $Ba = \sqrt{2}$. Deindè transferatur Ba in Ab, et ducatur hypothenusa Bb: erit $Bb^2 = Ab^2 + AB^2 = 2 + 1 = 3$; et $Bb = \sqrt{3}$. Eadem praxi Bb transferatur in Ac, et ducta Bc, erit hæc $= \sqrt{4}$: $Bd = \sqrt{5}$ etc.

364 Probl. 3. *Quadratum dato parallelogrammo, aut triangulo æquale construere.* Solut. Quum area parallelogrammi æqualis sit producto basis in altitudinem, quæratur media proportionalis inter utramque (344); quadratum super hanc constructum erit æquale parallelogrammo; quum productum extremorum æquale sit quadrato medii in proportione continua. Idem agendum ocurrit in triangulis, accepta dimidia altitudine, aut dimidia basi inter quas inveniatur, ut supra, media proportionalis, quæ dabit latus quadrati æqualis triangulo dato.

§. III.

Polygona.

365 Defin. 1. *Polygona* dicuntur figuræ pluribus, quàm quatuor, rectis circumscriptæ.

Ceterùm peculiaria habent nomina pro numero laterum, quibus constant. *Pentagonum, Hexagonum, Heptagonum, Octogonum, Enneagonum etc.* figuras 5, 6, 7, 8, 9 lateribus constantes appellant. Polygonum erit *regulare*, si latera, et angulos habeat æquales: alioquin *irregulare* erit. Polygona regularia erunt similia, si et homonima sunt, ut pentagona, chiliogona etc., quantumvis diversæ magnitudinis sint. Circuli verò veluti polygona infinitorum laterum considerantur.

366 Defin. 2. Polygoni *perimeter* vocatur linea ipsum circumscribens, ut peripheria circulum. Undè duo polygona sunt *ipsoperimetra*, seu æqualis perimetri, quum lineæ ipsa circumscribentes sunt æquales. Porrò ad perimetrum duci possunt radii, vel perpendiculares, vel obliqui. Recta normalis à centro ad latus perimetri est radius rectus: obliquus verò à centrum ad angulum ducitur.

367 Theor. 1. *Valor angulorum cujusvis polygoni juxta duplum numerum laterum deducitur, ita ut tot rectis æquivaleant, quot fuerit duplus numerus laterum demptis quatuor.* *Dem.* Sit hexagonum ABCF (fig. 25), cujus duplus numerus laterum est duodecim: dico valorem angulorum hujus figuræ esse æqualem octo rectis. Nam ductis radiis cA, cB, cF etc. dividitur in sex triangula, quorum angulorum valor sunt duo recti (327): valor igitur omnium æquabitur 12 rectis, duplus nimirum numerus laterum. At angulorum in centro c valor, qui quatuor rectis æquator (289) ad hexagonum

non pertinet: ergo valor hujus hexagoni est $12 = 4 = 8$. Eodem modo de quolibet polygono, ejus area in tot triangula divisa quot sunt ipsius latera, ostendetur veritas asserta, ut est manifestum.

368 Corol. Ex demonstratis facilè deducitur valor cujusvis anguli ad centrum, in quos dividitur per triangula centrum polygoni. Etenim omnium angulorum valor quatuor rectis æquatur: tot autem erunt anguli, quod latera habet polygonum, Diviso igitur 360 per numerum laterum, cujusvis anguli valor habebitur per quotientem expressus. Sic in ejemplo adducto, diviso 360 per 6, quotus dat 60 gradus pro mensura anguli *c*.

369 Theor. 2. *Polygonum similium perimetri sunt inter se, ut ipsorum radii. Dem.* Hexagonum (fig. 25) ABCD, et parvum hexagonum *c* divisa sunt in totidem triangula æquiangula, et similia: ergo habent latera proportionalia (338), et singula latera unius ad singula alterius, ut summa omnium laterum unius ad summam alterius (211). At perimeter est summa laterum baseos: sunt igitur inter se ut singula latera, seu radii.

370 Corol. Quum circuli considerentur velut polygona infinitorum laterum, erunt inter se, ut radii. Undè si radius unius est dimidium, aut tertia, quarta, quinta pars alterius, hæc eadem proportio erit inter peripherias. Similiter radii erunt, ut periphæriæ, et ut partes similes periphæriarum, seu ut arcus similes. Eadem etiam proportio cum diametris occurrit. Nam

radii dimidia sunt diametrorum, et quæ proportio radium inter et peripheriam intercedit, inter ipsam et diametrum interveniat, necesse est.

371. Teor. 3. *Hexagoni circulo inscripti latus æquale est radio. Dem.* Sit hexagonum ABC (fig. 25) circulo inscriptum: demittantur radii AC etc. ad angulos hexagoni. Quum latera omnium triangulorum sint radii, erunt isoscelia, et anguli ad basim æquales. Ad angulorum ad verticem mensura sunt gradus 60 (368): ergo duorum ab basim summa est 120: et quoniam æquales sunt, uniuscujusque etiam mensura erit 60. Triangulum igitur est æquilaterum, et basis, quæ est latus hexagoni, æqualis radio.

372 Corol. 1. Hexagoni perimeter sextupla est radii, et tripla diametri. Quum autem peripheria circuli major sit perimetro hexagoni circulo inscripti; luculenter eruitur, peripheriam plus quam ter continere diametrum, adeòque majorem inter ipsas rationem intercedere, quam inter 3 : 1.

373 Schol. Hinc celeberrimum problema *quadraturæ* circuli, ut ajunt, natum est; quod diù sublimiorum mathematicorum ingenia torsit; in præsentiarum autem illorum tantum conatus exercet, qui delirare non gravantur in miscendo quadrata rotundis, eo quod illorum differentiam minimè percipiant. Ad praxim enim nihil solutio problematis conferret, quum facillimum factu sit, quadratum æquale circulo construere. Ad theoriam quod attinet, adeò jam per approximationem geometræ accesse-

runt, ut intellectui humano nulla spes videatur affulgere propriùs accedendi. Archimedes rationem 7 : 22; seu 1 : $3+\frac{1}{7}$ quam proximè statuit. Metius Geometra Batavus 113 : 355 rationem veluti luculentiorem omnibus, quæ numeris integris et non ita magnis continentur, proposuit, atque usu magis à geometris recepta est. In calculis verò qui majorem approximationem requirunt, Ludolphus Coloniensis, seu Vanculen, invenit, supposita diametro 1 cum triginta duobus cyphris, seu zeris, peripheriam fore minorem 314, 159, 265, 358, 979, 323, 846, 264, 338, 327, 950. Addita verò unitate, jam evasum ire majorem.

374 Corol. 2. Ex adductis proportionibus facilè, data diametro, aut peripheria circuli, ipsius peripheria, aut diameter invenitur. Etenim instituta proportione per regulam auream 113 : 355 : : ut data diameter ad ignotam circumferentiam, aut vice versa, 355 : 113 : : ut data circumferentia ad ignotam diametrum; quartus terminus per regulam deductus dabit solutionem quæsitam. Idem cum formula Ludolphiana peragi potest, recisis ad dextram tot cyphris, quot opus fuerit in prima ratione, ex. g. 100,000 : 314,159 : : ut data diameter ad circumferentiam *x*.

375 Theor. 4. *Superficies polygoni regularis æqualis est dimidio producto ex perimetro, et perpendiculari, seu radio recto, in latus polygoni demisso. Dem.* Triangula omnia, in quæ resolvitur polygonum regulare, sunt æqualia; quum æqualibus lateribus homologis, et angu-

lis constent; at superficies cujusque trianguli est dimidium factum ex basi in altitudinem, quæ est radius rectus (358): ergo summa superficierum omnium triangulorum erit dimidium productum ex basibus in altitudinem, seu perimetri in radium.

376 Corol. Superficies circuli æqualis est producto dimidio ex radio in circumferentiam. Jam enim dictum est circulum veluti polygonum infinitorum laterum considerari. Propter eamdem rationem sectoris circuli superficies æqualis est dimidio producto ex radio in arcum sectoris.

§. IV.

Ratio superficierum.

377 Defin. Quemadmodum de lineis dictum est, illarum proportionem esse rationem, qua una aliam continet, aut in illa continetur, sic in superficiebus figurarum similium intelligendum est, eas esse in assignata proportione, quum una continet, aut continetur in alia. Hæc autem ratio potest esse *composita*, aut *duplicata*. Prima est productum duarum rationum inter se ductarum; secunda est productum alicujus rationis ad quadratum elevatæ, ut fusiùs num. 193 explicatum est.

378 Corol. Quum superficies sint productum basium et altitudinum, ab his deducenda est ratio seu proportio inter duas superficies invicem comparatas. Quarè si superficies unius figuræ dicatur S, ejusque altitudo A, ac basis B; erit S=AB. Pariter si alterius superficies

dicatur s, altitudo a, et basis b; erit $s = ab$. Hinc 1.° Si duo rectangula parallelogramma triangula habuerint æquales bases et altitudines, erunt æqualia. Nam $S = AB$, et $s = ab$; quarè $S : s :: AB : ab$; atqui $AB = ab$; igitur $S = s$. 2.° Si habuerint æquales bases, altitudines verò diversas, erunt inter se ut altitudines, sivè unum eodem modo continebit alterum, quo ejus altitudo continet altitudinem alterius. Quod pariter dicendum erit, si altitudines æquales, bases autem inæquales habuerint; ab his nempè eorum diversitas erit repetenda. Nam $S : s :: AB : ab$: undè ablatis æqualibus $A = a$, aut $B = b$, remanet $S : s :: A : a$; sivè etiam $S : s :: B : b$. 3.° Quod si fuerint in ratione reciproca, ita ut unius altitudo æqualis sit alterius basi, et hujus altitudo æqualis vasi primi, aut eamdem servent proportionem, erunt æqualia. Nam si $A : a :: b : B$; erit $AB = ab$ (200), atque adeò $S = s$. 4.° Demum altitudinibus et basibus inæqualibus respondet ratio composita baseon et altitudinum: scilicet ducta cujusque basi in altitudinem, quæ ratio inter producta intercedat, hæc eadem existet inter figuras invicem comparatas. Est enim tunc $S : s :: AB : ab$.

379 Theor. 1. *Omnia triangula similia, atque adeò omnes figuræ similes, quæ in triangula similia resolvi possunt, sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Dem.* Triangula similia latera homologa haben proportionalia (338): ergo $A : a :: B : b$; ergo $S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2$ (221). Nempè si quadratum unius lateris bis, ter, etc. continet quadratum lateris

homologi, superficies figuræ erit bis, ter, verbo toties major altera, et vicissim.

380 Corol. Circulorum superficies sunt in duplicata ratione, sivè ut quadrata radiorum, aut peripheriarum. Sunt enim figuræ similes, et veluti polygona infinitorum laterum considerantur (370). Hæc etiam proportio extenditur ad diametros, et arcus similes, ut ibidem annotatum est.

381 Theor. 2. *Polygonorum circulo inscriptorum majus est, quod plura habet latera minimum triangulum. Dem.* Manifestum est (fig. 25) hexagonum majorem superficiem comprehendere, quam triangulum, aut quadratum, aut pentagonum, quæ eidem circulo inscriberentur: latera enim perimetri horum polygonorum minus accederent ad circumferentiam; adeòque minus spatium occuparent. Deindè si loco hexagoni duodecagonum inscriberetur, $aFbEdF$, latera perimetri, quum minora sint, magis ad circumferentiam accedent: triangula enim duo Fcb, Ecb majora sunt, quam triangulum EcF: illud enim superant toto triangulo FbE, quod inter alterius basim, et circumferentiam clauditur, ergo tota altitudine hujusce trianguli magis accedunt ad peripheriam, quum basis FE communis utrique EcF, et FEb sit.

2. Eadem demonstratio in triangulo ADE (fig. 18) institui potest; quodcumque enim polygonum intra eamdem peripheriam inscribatur, quum plura latera habere debeat, ejus perimeter magis ad circnmferentiam accedet; adeòque majus spatium circumscribet.

382 Corol. Circulus, qui polygonum est laterum infinitorum, majorem superficiem habebit, quam reliquæ omnes figuræ intra ipsum inscriptæ: ejusque peripheria major est quacumque perimetro aliorum polygonorum intra ipsius peripheriam inscriptorum.

383 Theor. 3. *Polygonorum circulo circumscriptorum superficies major est illius, quod pauciora, minor, quod plura habet latera. Dem.* Quò plura habet latera polygonum, magis ad peripheriam circuli, cui circumscriptum est, accedit: contrà, cui pauciora sunt latera, major est ab eadem recessus; ergo et major superficies seu ambitus inclusus. Major etiam erit ejus perimeter, quippè majorem ambitum complectitur. Et ob eamdem rationem minor erit perimeter illius, quod plura habet latera, et minima perimeter seu circumferentia circuli, cui circumscribuntur polygona: triangulum verò omnium circumscriptorum majorem superficiem complectetur, et majorem perimetrum habebit.

§. V.

Plana.

384 Defin. *Planum est superficies, cui aptari potest ubique linea recta.* Talis est superficies speculi plani, saltem ad sensum. Quaquaversus enim illi linea recta accommodari potest, aut norma: quæ vices gerit lineæ rectæ, qua plana vulgò examinantur. Hinc *planum* est superficies omnium brevissima, quæ intra easdem lineas includi potest.

385 Theor. *Tria puncta plani positionem determinant, dummodò in eadem recta non sint. Dem.* Per tria puncta, quæ in eadem recta non jaceant duci potest planum, ut est manifestum: at planum hoc unicum est; nam quodcumque aliud diversum, non esset omnium brevissimum intra easdem lineas contentum; tria igitur puncta, per quæ planum transire potest, ejus positionem determinant.

386 Corol. 1. Duæ rectæ se invicem secantes, sunt in eodem plano. Nam punctum, in quo intersecantur, et duo alia puncta in qualibet ipsarum sumpta, plani positionem determinant ex præc., undè per hæc tria puncta duci potest planum. Quod si tertia alia linea has duas secet extra punctum communis intersectionis, etiam hæc jacebit in eodem plano ambabus communi: quum duo puncta lineæ positionem determinent; et supponitur duo puncta diversa cum aliis habere communia. Secus esset, si tres lineæ in unico puncto se intersecarent: hoc enim positionem lineæ rectæ determinare non potest.

387 Corol. 2. Duorum planorum intersectio est linea recta. Concipiantur duo plana se invicem ad quemvis angulum secare: evidens est, partem aliquam ipsis forè communem. At nulla pars, nisi linea recta, utrique communis esse potest. Sicut enim lineæ rectæ se invicem secantes unicum punctum commune habere possunt, ita plana unicam lineam, seu seriem punctorum in directum positorum communem habere possunt. Si enim aliud punctum, quod

non foret in directum positum, ipsis commune esse posset, tria puncta plani positionem non determinarent.

388 Corol. 3. Planum, sivè linea, cuivis plano perpendiculariter insistens, perpendicularis est omnibus lineis in plano jacentibus, ac sub ipsam transeuntibus: aliter enim, aliqua vel deprimeretur, vel elevaretur, adeòque in eodem plano non esset.

389 Corol. 4. Duo plana, aut lineæ eidem plano perpendicularia aut æqualiter ad eamdem partem inclinato, sunt inter se parallela. Distantia enim utriusque ubique eadem est. Præterea planum cui insistunt, considerari potest velut linea utrumque secans: adeòque suptest velut linea utrumque secans: adeòque supposita utrobique æquali inclinatione, facit angulos internum, et externum ad eamdem partem æquales: sunt igitur parallela (300).

390 Schol. Quæ de linearum positione respectiva num. 283, et sequentibus tradita sunt, ad plana æquo jure transferenda erunt. Nam 1. Planum supra planum cadens aut duos angulos rectos, aut duobus rectis æqualis facit. 2. Quod si plana mutuo secantur, valor angulorum ex utraque parte quatuor rectis æquatur. 3. In hac intersectione anguli ad verticem æquales sunt, 4. A puncto dato intra, vel extra planum, tantum una perpendicularis demitti potest. 5. Distantia à puncto quovis ad planum, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta. 6. Si duo plana parallela alio plano secentur, angulos alternos, internos, et externos ad eamdem partem æquales; et duos internos ad eamdem partem æquales duobus rectis habent. 7. Sectiones planorum parallelorum etiam sunt parallelæ. Nimirum quum duo, aut plura plana parallela alio plano secantur, intersectiones parallelæ remanent. 8. Quotcumque plana parallela alteri, erunt et parallela inter se, et omnibus aliis illis parallelis.

CAPUT III.

Stereometria, sivè de Solidis.

§. I.

Solidorum genesis.

391 Defin. 1. *Solidum* geometricum est corpus quodvis tribus dimensionibus constans; sivè longum, latum et profundum. Superficies autem corporis solidi est summa linearum, quibus ejus externa facies terminatur in qualibet dimensione. Quemadmodum autem lineam punctum continenter fluens concipimus, superficiem verò linearum aggregatum in eamdem directionem jacentium, ita corpus seu solidum continuam superficierum aggregationem imaginamur. Ad rei tamen veritatem magis accesseris, si lineam linearum infinitè minimarum congeriem, superficiem ex areolis linearum, solidum ex parvis areis solidis conceperis.

392 Defin. 2. *Prisma* solidum est pluribus planis terminatum (fig. 26), quæ parallelogramma sunt; æquè latum in tota longitudine, ac

non foret in directum positum, ipsis commune esse posset, tria puncta plani positionem non determinarent.

388 Corol. 3. Planum, sivè linea, cuivis plano perpendiculariter insistens, perpendicularis est omnibus lineis in plano jacentibus, ac sub ipsam transeuntibus: aliter enim, aliqua vel deprimeretur, vel elevaretur, adeòque in eodem plano non esset.

389 Corol. 4. Duo plana, aut lineæ eidem plano perpendicularia aut æqualiter ad eamdem partem inclinato, sunt inter se parallela. Distantia enim utriusque ubique eadem est. Præterea planum cui insistunt, considerari potest velut linea utrumque secans: adeòque suptest velut linea utrumque secans: adeòque supposita utrobique æquali inclinatione, facit angulos internum, et externum ad eamdem partem æquales: sunt igitur parallela (300).

390 Schol. Quæ de linearum positione respectiva num. 283, et sequentibus tradita sunt, ad plana æquo jure transferenda erunt. Nam 1. Planum supra planum cadens aut duos angulos rectos, aut duobus rectis æqualis facit. 2. Quod si plana mutuo secantur, valor angulorum ex utraque parte quatuor rectis æquatur. 3. In hac intersectione anguli ad verticem æquales sunt, 4. A puncto dato intra, vel extra planum, tantum una perpendicularis demitti potest. 5. Distantia à puncto quovis ad planum, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta. 6. Si duo plana parallela alio plano secentur, angulos alternos, internos, et externos ad eamdem partem æquales; et duos internos ad eam-

dem partem æquales duobus rectis habent. 7. Sectiones planorum parallelorum etiam sunt parallelæ. Nimirum quum duo, aut plura plana parallela alio plano secantur, intersectiones parallelæ remanent. 8. Quotcumque plana parallela alteri, erunt et parallela inter se, et omnibus aliis illis parallelis.

CAPUT III.

Stereometria, sivè de Solidis.

§. I.

Solidorum genesis.

391 Defin. 1. *Solidum* geometricum est corpus quodvis tribus dimensionibus constans; sivè longum, latum et profundum. Superficies autem corporis solidi est summa linearum, quibus ejus externa facies terminatur in qualibet dimensione. Quemadmodum autem lineam punctum continenter fluens concipimus, superficiem verò linearum aggregatum in eamdem directionem jacentium, ita corpus seu solidum continuam superficierum aggregationem imaginamur. Ad rei tamen veritatem magis accesseris, si lineam linearum infinitè minimarum congeriem, superficiem ex areolis linearum, solidum ex parvis areis solidis conceperis.

392 Defin. 2. *Prisma* solidum est pluribus planis terminatum (fig. 26), quæ parallelogramma sunt; æquè latum in tota longitudine, ac

duobus planis, seu basibus parallelis, superiore, et inferiore terminatum. Pro numero laterum basis diversa nomina sortitur prisma, nimirum triangulare, quadragulare, pentagonum etc. Omnia enim solida concipi possunt á basi generali; in prismate, si basis sibi parallelá semper ascendat, solidum describet prismaticum triangulare, aut quadrangulare, pro natura baseos: quod etiam ad reliquas figuras extendi potest. Et hoc quidem erit prisma *rectum*, si ejus axis, qui est linea recta ab ejus perimetro æqualiter distans, est basibus perpendicularis. Quod si axis fuerit basibus inclinatus, prisma erit *obliquum*.

393 Defin. 3. Species etiam prismatis sunt *cubus*, et *parallelopipedum*. Cubus est solidum sex planis quadratis terminatum, quales sunt tali lusorii. Parallelopipedum sex etiam planis terminatur, quorum opposita tantum sunt æqualia. Si ad angulos rectos latera formata sint, erit parallelopipedum *rectangulum*; secus *obliquangulum*.

394 Defin. 4. Si planum generans, seu basis circulus sit, solidum erit *cylindrus* (fig. 27). In quo si axis AB sit perpendicularis basi FBC, cylindrus erit rectus: si axis inclinatus sit basi, obliquus. Altitudo, sivè prismatis, sivè cylindri, sivè alterius solidi est perpendicularis à summitate basis superioris ad inferiorem productam, ubi opus sit, ut evenit in obliquis. In rectis verò ipsemet axis mensura est altitudinis.

395 Defin. 5. *Pyramis* est solidum basi polygona et puncto terminatum (fig. 28). Juxta

numerum laterum basis diversis nominibus donatur pyramis. *Triangularis*, si basis sit triangularis; *quadrangularis*, ut est sepulcrum Cestii ad portam Ostiensem quod unicum est antiquitatis monumentum in nativa integritate conservatum, in hoc antiquitatum romanorum nativo solo. Reliqua enim, aut diruta, videmus, ut amphiteatrum Flavium, aut in aliam conversa figuram, ut pantheon Agrippæ. Ceterum pyramis erit recta, si axis à vertice ad basim perpendiculariter cadat; secus obliqua erit, cujus obliquitatis mensura est inclinatio axis ad basim.

396 Defin. 6. *Conus* est pyramis basi circulari (fig. 29). Ejus genesis concipi potest triangulo, sivè plano trianguli ABC integra circumvolutione, supra rectam AB immotam, descriptum. Si axis AB perpendiculariter cadat supra basim CD, conus erit rectus: obliquus autem, si in alterutram partem inclinet. Quod si plano aliquo basi parallelo EF conus vertice AEF mulctetur, reliquum CDEF, dicitur *conus truncatus*.

397 Defin. 7. Si semicirculus (fig. 30) ACB circa immotam diametrum AB circunducatur, donec ad locum, undè discessit, redeat, *sphæram* describet. Diameter immota, circa quam sphæra circumagitur; est illius axis, cujus extrema puncta AB dicuntur sphæræ poli. Circulus maximus à polis distans nonaginta gradibus, seu quadrante, dicitur sphæræ *æquator*. Punctum æquè distans ab omnibus superficiei punctis, est centrum sphæræ: lineæ à centro

ad superficiem ductæ, sunt sphæræ radii. Si aliquo plano HI per centrum transeunte secetur sphæra, hujusmodi sectio erit circulus maximus, atque adeó omnes circuli maximi per centrum sphæræ transeunt. Reliqui circuli eo minores erunt, quo magis à centro distent.

398 Corol. 1. Duo maximi circuli sphæræ necessario se intersecant; eorumque communis sectio est diameter. Quum enim per centrum transeant, in centro se intersecare debent, et in omni linea, quæ per centrum transeat, qualis est diameter.

399 Corol 2. Puncta omnia semiperipheriæ, cujus revolutione sphæra generatur, describunt circulos parallelos; eo majores, quo propiùs ad centrum accedunt; et minores, quo longiùs ab ipso recedunt. Puncta vero á centro æquè distantia describunt circulos æquales. Jam ex circulis, maximus est, qui per centrum transit; reliqui ab ipso utrinque æquè distantes, æquales sunt. Quarè in sphæra cœlesti, et in globo terrestri tropici, et circuli polares æquales sunt: quod postea in Astronomia physica, et in Geographia usui erit. Demum ultimus circulorum parallelorum in punctum abit.

§. II.

Mensura superficierum in solidis.

400 Defin. Omnes mensuræ superficierum duplici dimensione coalescunt, latitudine nimirum, et longitudine. Undè nihil de profunditate cogitantes, externam tantum solidorum faciem hic considerare debemus.

401 Theor. 1. *Superficies prismatis, cujus latera rectilinea sunt basi perpendicularia, est productum ex perimetro basis in altitudinem, seu latus rectum prismatis, addita dupla basis superficie. Dem.* Singulæ facies prismatis sunt rectangula, quorum mensura est productum basis in altitudinem (357): collecta igitur summa rectangulorum superficiem prismatis componentium, habebitur ejus superficies, demptis basibus. At hæc summa est perimeter basis, ducta in altitudinem, seu latus rectilineum, ut est manifestum: habemus igitur superficiem lateralem prismatis, ducta perimetro in basim. Jam superficies basis, quum sit polygonum regulare, habebitur ex dimidio producto radii recti in perimetro (375): et quum duæ bases superior et inferior prismatis sint æquales, utriusque superficies habebitur ex integro producto radii in perimetrum.

402 Corol. 1. Cylindrus considerari potest tamquam prisma *infinitilaterum*; adeòque ejus superficies æqualis erit producto perimetri, seu circuli in ejus altitudinem, additis superficiebus utriusque basis, seu duorum circulorum (376).

403 Corol. 2. Superficies cubi constat sex quadratis æqualibus; unde ejùs superficies æqualis est superficiei unius ex quadratis sexies sumpti. Quum verò parallelopipeda sex superficiebus terminentur, quorum bina æqualia sunt; inveniatur summa trium superficierum inæqualium, et hæc bis sumpta, dabit totam superficiem parallelopipedi.

404 Theor. 2. *Superficies pyramidis rectæ æqualis ex dimidio producto, ex perpendiculari ducta ex vertice ad unum ex lateribus basis, et perimetro basis; addita superficie ejusdem baseos. Dem.* In pyramide tot sunt triangula isoscelia, quot latera seu facies pyramidis: aut superficies trianguli æqualis est dimidio producto ex perpendiculari ducta in basim (358): ergo si summæ horum triangulorum addatur superficies baseos (375), habebitur tota superficies pyramidis.

405 Corol. 1. Conus considerari debet veluti pyramis *infinitilatera*, quemadmodum de cylindro dictum supra est, quum utriusque basis circulus sit. Hinc superficies coni recti habebitur ex dimidio producto perimetri, seu circuli basis ducti in latus coni; addita superficie circuli, cui insistit.

406 Corol. 2. Pyramidis plano basi parallelo truncatæ superficies concipi potest, veluti divisa in tot trapezia æqualia, quot sunt facies pyramidis. Singula autem trapezia dividi possunt in duo triangula inæqualia, quorum bases sunt latus sectionis, et latus basis pyramidis: altitudo verò utriusque distantia. Quarè ducta uniuscujusque basi in altitudinem, dimidium productum dabit *aream*, ut ajunt, seu superficiem, cujusque trianguli, atque earumdem summa trapeziorum superficiem: quibus additis superficiebus utriusque baseos, propter inæqualitatem seorsim dimetiendis, habebitur tota superficies pyramidis truncatæ.

407 Schol. Brevius, superficies pyramidis

truncatæ æqualis est dimidio producto ex distantia perpendiculari, et utriusque basis perimetro, plus duabus superficiebus utriusque basis.

408 Corol. 3. Si eodem modo tractetur conus, at dictum est modò de piramide; quum conus concipiatur velut pyramis *infinitilatera;* coni truncati superficies æqualis erit dimidio producto ex peripheria utraque in latus, seu *apothema* coni truncati; plus duabus utriusque circuli superficiebus, inter quas continetur conus.

409 Schol. Brevius, deducitur superficies lateralis coni truncati, accipiendo peripheriam circuli, æquè distantis ab utraque basi superiori, et inferiori coni truncati, eamque ducendo in latus seu apothema coni. Nam quum hæc peripheria sit media arithmetica proportionalis inter superiorem, et inferiorem basis peripheriam, æqualis est semisummæ utriusque circumferentiæ (179). Quod autem circulus GH (fig. 29) seu ejus peripheria, sit media proportionalis inter peripherias EF, DC coni truncati CDEF, sic demonstro. Ducantur perpendiculares Em, Fn; Gr; Hs: triangula EGm, GDr sunt similia: nam anguli in m et r sunt recti; in G et D, ut potè interni ad eamdem partem inter parallelas, sunt etiam æquales (299): Ergo Em: Gr :: Gm: Dr (338): at $Em=Gr$ ex suppositione: ergo etiam $Gm=Dr$. Eadem demostratio tenet in triangulis FnH, CsH ad alteram partem formatis. Idem igitur excessus est inter diametros EF, et GH, atque inter ipsam GH et DC:

ergo EF, GH, GH, DC (179. In circulis verò peripheriæ sunt in ratione diametrorum (370): sunt igitur peripheriæ in eadem ratione arithmetica, ita ut extendi valeat proportio modò enuntiata ad circunferentias trium circulorum.

420 Corol. 4. Segmentum sphæricum A*no* (fig. 30) considerari potest velut genitum à revolutione infinitarum minimarum tangentium, quarum singulæ minimum conum truncatum describunt.

411 Corol. 5. Eodem modo concipi potest *zona* sphærica, duobus circulis parallelis *lm*, *no* conclusa, velut genita à revolutione infinitarum minimarum tangentium, quarum singulæ minimum conum truncatum describunt et composita ex duobus conis truncatis HI*on*, H*lm*I per communem basim HI simul conjunctis.

412 Theor. *Si sphæræ* LH (fig. 31), aut AB (fig. 30) *circumscribatur cylindrus* EGIF, *cujus axis* LH *æqualis sit sphæræ diametro, et basis æqualis circulo maximo ejusdem sphæræ, hujus superficies æqualis erit superficiei laterali cylindri eidem circunscripti. Dem.* 1. Concipiatur particula quævis *ns* circuli genitoris infinitè minima, ita ut cum particula *s* lineæ tangentis A*s* hujus puncti confundatur: hæc tangens producta usque ad punctum A, et circa axem HL, productum in A, circumvoluta, generabit conum A*rs*, et particula *ns* conum truncatum *mnrs*. Superficiei hujus coni truncati mensura est, dimidium productum lateris *ns* in peripherias circulorum, quorum radii sunt *q n*, *ts*; seu

in peripheriam radii *po* ab utraque æquè distantem (409).

413 2. Ducatur radius C*o*=LF=D*t*, quum sint radii æqualium circulorum. Triangula omnia A*qn*, A*po*, A*ts*, *op*C sunt similia (335 et 345); et quoniam *qn*, *ts* sunt radii paralleli, erit $qt : ns :: At : As$; atque eadem proportio erit inter reliqua latera homologa (338): ergo $qt : ns :: op : Co$; et $qt \times Co = ns \times op$ (200.) Hæc producta æqualia exprimunt superficiem sectionis cylindri DK*qt*, et coni truncati *nq ts*, Nam *qt*=DK, et D*t*=C*o*: at superficies cylindri est productum perimetri in altitudinem: ergo quum circuli sint ut radii (370) eadem est proportio; sive ducatur in radium, sivè in perimetrum. Demum jam ostensum est aream coni truncati, qualis est *nqts*, esse æqualem producto $ns \times op$ (409). Demonstratum igitur est superficiem segmenti *nstq*=DK*qt*, quæ est segmentum superficiei lateris cylindri.

414 3. Si hæc demonstratio iteretur in quolibet segmento sphæræ comparato cum reliquis portionibus cylindri, tota superficies sphæræ æqualis erit superficiei laterali cylindri eidem circumscripti. Tirones animadvertant portionem *nqts* in figura satis adspectabilem exhiberi, ut oculis partes in demonstratione assignatæ discerni possint. Mente tamen ad particulas minimas reduci debet ut num. 350 exposuimus.

415 Corol. 1. Superficies sphæræ æqualis est producto axis, sivè diametri, in circulum sphæræ maximum; adeòque est quadrupla superfi-

ciei ejusdem circuli; quum hæc sit productum ex peripheriæ in dimidium radium, seu quartam partem diametri (376).

416 Corol. 2. Quum superficies lateralis cylindri æqualis sit superficiei sphæræ, additis duabus basibus, quæ sunt duo circuli maximi, tota superficies cylindri sextupla erit areæ circuli maximi; et cum superficie sphæræ erit, ut 6: 4, sivè ut 3: 2.

417 Corol. 3. Ad habendam superficiem sphæræ, cujus nota diameter, inveniatur primum periphæria circuli maximi juxta proportiones (n. 373) enuntiatas inter diametrum et periphæriam: hac inventa, ducatur in notam diametrum; productum dabit totam superficiem sphæræ. Manifestum est hæc omnia in tot problemata converti posse, quæ brevitatis gratia, contractiùs exposita sunt.

§. III.

Ratio superficierum.

418 Defin. Duo solida similia sunt, quum lateribus numero æqualibus, et similibus constant: ex. gr. duo cubi, duo parallelopipeda, quantumvis magnitudine differant. At pyramis, et cylindrus, prisma triangulare, et pentagonum, aut alia, quorum altitudines non essent basibus proportionales, solida simila non sunt.

419 Defin. 2. factores superficierum sunt latera, ex quibus superficies veluti creari concipitur. Sic factores lateralis superficiei cylindri, et prismatis sunt periphæria et altitudo:

pyramidis dimidium latus perpendiculare ad basim, et ipsa perimeter baseos; quod etiam ad conum extendendum est: sphæræ factores sunt axis, et circulus maximus.

420 Theor. 1. *In omnibus solidis superficies sunt, ut fractorum producta. Dem.* Superficies cujuscumque solidi veluti creari concipitur ex elementis, ex quibus componuntur factores: ex gr. sint $A \times B$ factores unius, et $a \times b$ factores alterius; altitudines nimirum et bases, patet superficies fore ut $AB : ab$; quum hæc producta exprimant facta, sivè superficies: ergo $S : s :: AB : ab$, sivè superficies ut factores (378).

421 Theor. 2. *Superficies, que factorem unum habent æqualem, sunt in ratione alterius factoris. Dem.* Sint S, s duæ superficies comparandæ; quorum factores sunt $A \times B$, $a \times b$; si $A = a$, diferentia inter ipsas intercedens erit ea, quæ inter B et b reperitur: hoc est $S : s :: B : b$. Contrà verò si $B = b$, erit $S : s :: A : a$; hoc est, ut alter factorum, in quo inæqualitas reperitur; quemadmodum de figuris planis dictum est num. 378. Quarè duæ superficies solidorum habentium æquales bases aut perimetros, erunt ut altitudines, seu latera: quod si hæc sint æqualia, erunt ut perimetri: denique si utraque inæqualia sint, erunt in ratione composita, sivè ut producta $AB : ab$, scilicet altitudinum, et basium.

422 Theor. 3. ***Solidorum superficies, quorum factores sunt invicem proportionales, erunt inter se, ut quadrata dimensionum homologa-***

rum. Dem. Superficies solidorum regularium reducuntur ad figuras planas rectangulas, quarum factores sunt bases, et altitudines: at figuræ similes, quarum scilicet latera homologa sint proportionalia, sunt in ratione duplicata laterum homologorum (379), ergo etiam superficies factorum proportionalium erunt, ut quadrata dimensionum homologarum.

423 Corol. Sphæræ omnes: cujuscumque magnitudinis, sunt solida similia: quæmadmodum omnes circuli sunt figuræ planæ similes (380): ideòque earum superficies erunt in duplicata ratione diametrorum, et peripheriarum, aut radiorum; sivè ut quadrata harum dimensionum.

§. IV.

Soliditas corporum.

424 Defin. Ad definiendam solditatem corporum, opus est aliqua mensura, in qua tres dimensiones reperiantur, quemadmodum ad superficies dimetiendas, mensura duplici dimensione constante opus est. Quapropter uti superficierum dimensio ad quadratum exigitur, ita etiam solidorum ad cubum reducitur. Opus igitur est, ad dimetiendum corpus triplici dimensione donatum, mensura etiam ad triplicem extensionem deducta, putà leucas, milliaria, decempedas, hexapedas, pedes, pollices, lineas, juxta uniuscujusque corporis dimetiendi indolem adhibendas. Mensura verò cubica ea dicitur, quæ sex lateribus quadratis datæ dimensionis constat. Sic pes cubicus est, cujus sex latera sunt pes quadratus; spatiumque ab

his superficiebus inclusum, est pes cubicus. Rursus si in pede cubico partes componentes considerentur, tot pollices cubici invenientur, quot continet pes quadratus in suum latus, seu radicem ductus, nimirum $12 \times 12 = 144 \times 12 = 1728$. Quod pariter ad lineas respectu pollicis applicandum est.

425 Theor. 1. *Soliditas prismatis æqualis est producto basis; seu superficiei ejusdem, in altitudinem ductæ. Dem.* Juxtà dicta de genesi solidorum, prisma gignitur à motu perallelo basis per totam altitudinem; ducta ergo basi in altitudinem, habebitur soliditas prismatis. Sit ex. gr. basis$=10$, altitudo$=100$; erit soliditas tota prismatis$=1000$: nempè si ponantur pedes, erunt 1000 pedes cubici soliditas prismatis; et hæc differentia inter mensuram superficierum, et soliditatum intervenit, quod productum in dimensionem superficierum enuntiat pedes quadratos, in solidorum verò mensura dat pedes cubicos.

426 Corol. 1. Soliditas cylindri est etiam productum basis in altitudinem; quum cylindrus tamquam prisma *infinitilaterum* consideretur. Hinc duo prismata, aut duo cylindri ejusdem basis, et altitudinis sunt perfectè æqualia.

427 Corol. 2. Cubi soliditas est productum lateris; seu altitudinis in superficiem basis (424). Parallelopipedi etiam soliditas invenitur, ducta altitudine in superficiem bassis; concipi enim possunt hæc solida tamquam prismata quadrangularia, et revera talia sunt; quamvis ad par-

ticulares classes solidorum referantur, ob peculiares in ipsis propietates, geometrica speculatione dignas.

428 Theor. 2. *Soliditas pyramidis æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis: seu tertiæ parti producti ex altitudine in basim. Dem.* Sit (fig. 32) pyramis altitudinis BP, quæ sit dimidium altitudinis cubi AB; et ejusdem basis CDEF cum eodem cubo: manifestum est ex cubo AB sex oriri pyramides ejusdem basis et altitudinis ac BP: erit igitur quælibet illarum sexta pars ejusdem cubi. At mensura soliditatis cubi est productum basis in latus sivè altitudinem: ergo illarum pyramidum soliditas erit productum ex basi in sextam partem altitudinis AB; aut in tertiam partem altitudinis BP; seu arit tertia pars cubi ejusdem basis, et altitudinis ac ipsa. Quum verò eadem sit mensura soliditatis prismatis, et cubi; generalior regula statui potest, pyramidis soliditatem esse tertiam partem soliditatis prismatis ejusdem basis, et altitudinis: ut patet etiam ex sequenti.

429 Theor. 3. *Prisma triangulare potest dividi in tres pyramides perfectè æquales. Dem.* Secetur (fig. 26) prisma AB, plano triangulari ADF, et ACF; habebuntur duæ pyramides ADEF, et AFBC æqualis basis ADE, BCF; atque æqualis altitudinis AB, EF. Residuum erit alia pyramis ADFC; quæ quidem ita collocetur, ut pro basi habeat triangulum ADF communis sectionis cum altera ADFE, pro cujus basi etiam assumi potest idem triangulum ADF. Sic

inversæ pyramides habent easdem bases, ut est manifestum: enimverò altitudines etiam æquales sunt, quum omnia opposita latera sint æqualia in prismate: sunt igitur tres pyramides interse æquales; et simul sumptæ æquales toti prismati AB. Mechanica demonstratio hujus theorematis argilla aut cera ob oculos proponi potest.

430 Corol. 1. Omnia prismata quorumcumque laterum dividi possunt in tot prismata triangularia, quot fuerint anguli in prismate: et quum omnia prismata triangularia sint tripla pyramidis ejusdem basis; et altitudinis, evidenter eruitur, quodcumque prisma esse triplum pyramidis ejusdem ac ipsum basis, et altitudinis; aut quod in idem recidit, pyramidem esse tertiam partem prismatis ejusdem basis, et altitudinis. Pyramis etiam polygona dividi potest in tot pyramides triangulares, in quot triangula polygonum basis resolvi potest.

431 Corol. 2. Conus pyramis infinitorum laterum (405): undè erit etiam tertia pars prismatis infinitilateri, qualis est cylindrus, ejusdem ac ipse basis, et altitudinis.

432 Corol. 3. Sphæra considerari potest veluti coalescens ex infinitis pyramidulis, quarum communis vertex est centrum sphæræ, bases autem ejusdem superficies. Mensura vero soliditatis pyramidis est tertia pars producti altitudinis in basim: erit igitur soliditas sphæræ æqualis $\frac{1}{3}$ producti ex radio in supeficiem, seu tertiæ parti radii ducti in superficiem, aut hujus tertiæ parti ductæ in radium. At sphæræ su-

perficies quadrupla est superficiei circuli maximi ejusdem sphæræ (415): soliditas ergo sphæræ habebitur, ducendo tertiam partem radii in superficiem circuli maximi quater sumptam.

§. V.

Ratio solidorum.

433 Defin. Quum soliditas sit productum superficierum in altitudines, triplex mensura in soliditate investiganda considerari debet. Nimirum superficies est productum longitudinis in latitudinem; soliditas verò profunditatis in productum harum dimensionum. Undè in comparatione solidorum triplicis hujus mensuræ habenda ratio est.

434 Theor. 1. *Cylindri, et prismata, recta, vel obliqua, ejusdem basis, diversæ tamen altitudinis, sunt inter se ut altitudines. Dem.* Ejusmodi solida æqualis basis, et altitudinis sunt æqualia (426): ergo quum bases sint æquales, altitudines verò differant, illorum diferentia ab his est desumenda.

435 Corol. Coni, et pyramides, quæ basibus æquales sunt, si altitudine differant, illorum diversitas ab hac desumetur. Sunt enim tertia pars prismatis, aut cylindri ejusdem basis, et altitudinis (430, et seq.)

436 Theor. 2. *Prismata et cylindri (idem etiam dicendum de pyramidibus et conis) quorum altitudines tantum sunt æquales, erunt inter se ut bases. Dem.* Eadem est ac theorematis præcedentis. Quod si fuerint in ratione reciproca

basium, et altitudinem: nimirum basis unius, alterius altitudini æqualis, et contra, erunt æqualia. Et vice versa omnia prismata æqualia habent altitudines, et bases reciprocè proportionales.

437 Theor. 3. *Solida similia sunt in ratione triplicata laterum homologorum, sivè sunt ut cubi prædictorum laterum. Dem.* Solida similia ea dicuntur, quorum latera homologa, tres nimirum dimensiones, ex quibus coalescunt, sunt proportionalia. At soliditas est productum altitudinis, vel axis, in superficiem, quæ ex duabus aliis dimensionibus est productum. Solida igitur sunt in ratione composita trium dimensionum homologarum; ac proindè in ratione triplicata cujuslibet: quemadmodum de superficiebus dictum est (379), esse in ratione duplicata laterum homologorum.

438 Corol. 1. Ut hactenus dicta in præcedentibus articulis generali formula comprehendamus, quæ ad solida invicem comparanda extendatur, eorum soliditates dico S, s; et A, B, C, a, b, c, eorum factores: erunt igitur $S : s :: ABC : abc$. Hinc 1.° Si $A = a$, $S : s :: BC : bc$; 2.° Si $A : a :: bc : BC$, $S = s$ (378 n. 3). 3.° In solidis similibus $S : s :: A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: C^3 : c^3$. Sit ex g. cubus $A = 27$, et cubus $a = 8$: quum sint in ratione triplicata dimensionum homologarum, et omnes dimensiones in cubo sint æquales, erit latus $A^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$; et latus $a^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$: et $A^3 : a^3 = A \times A \times A : a \times a \times a$: quæ ratio luculentissimè est triplicata laterum homologorum A et a, sivè 3

et 2; eruntque prædicti cubi in ratione triplicata 3: 2; nimirum $27 : 8 = 3\times3\times3 : 2\times2\times2$.

439 Corol. 2. Sphæræ sunt in ratione triplicata diametrorum, aut radiorum, peripheriarum, aut arcuum similium. Nam quum sphæræ sint in solida similia, earumque factores seu dimensiones sint diametri, aut radii, et peripheriæ (432), sivè earum partes aliquotæ, erunt inter se ut cubi harum dimensionum. Sint duæ sphæræ S et s, quarum diametri, aut radii sint $D=3$, et $d=2$; erit $S : s :: D^3 : d^3$, sivè $S : s :: 27 : 8$. Etenim soliditas sphæræ habetur, ducto radio in superficiem circuli maximi (432); adeòque quum superficies circuli sint in ratione duplicata radiorum (379), sphæræ erunt in triplicata eorumdem.

440 Theor. 4. *Sphæra æqualis est duobus tertiis partibus cylindri eidem circumscripti, seu cujus basis circulus maximus, altitudo verò sphæræ diameter sit.* *Dem.* Esto (fig. 33) ACD quadrans circuli, qui quadrato ABDC includatur: ducta diagonali BC, et radio CG, concipiatur volvi circa immotum radium AC; planum est; integra circumvolutione descriptum iri cuadrato ABDC cylindrum; radio CD hemisphærium AD, et diagonali BC conum ABC: omnia hæc solida habebunt pro basi circulum maximum sphæræ, pro altitudine ejusdem radium.

Jam ducatur mr æqualis, et parallela AB et CD, et perpendicularis lateribus AC, BD: erit $CA : AB :: Cm : mn$ (338); at $CA=AB$; ergo $Cm = mn$. En radios triplices sectionis: nam mr est

radius sectionis cylindri; mG sphæræ, et mn coni. Rursus in triangulo rectangulo CmG est $CG^2 = Cm^2 + mG^2$ (345): at $CG = CD = mr$: ergo $mr^2 = Cm^2 + mG^2$: sivè substituendo pro Cm^2, ejus æqualem mn^2, erit $mr^2 = mn^2 + mG^2$; nimirum circulus, cujus radius CG = summæ circulorum, quorum radii mn, et mG (370), seu secti cylindri æqualis est summæ sectionum hemispherii, et coni. Hæc demonstratio iterari potest in aliis sectionibus infinitè parvis, et proximis, ut ab, usque ad exhaustionem cylindri (350); ubique invenietur CG^2 seu mr^2 = quadratis sectionum sphæræ et coni; adeòque totus cylindrus ABDC æqualis hemisphærio AD, et cono ABC simul sumptis. At conus est $\frac{1}{3}$ cylindri ejusdem basis et altitudinis (431): ergo reliquæ $\frac{2}{3}$ sunt dimensio hemisphærii AD. Demum si his omnibus corporibus altitudo AF dupliciter, evidens est proditura tria solida, nimirum cylindrus, cujus basium radius AB, et FH, axis AF, sphæra, cui diameter est eadem atque axis cilindri, radius AC = AB generans circulum maximum æqualem basi cylindri; et denique conus, cujus basis radius sit eadem AB; altitudo verò, sivè axis, diameter sphæræ, æqualis axi cylindri. Quæ quidem solida etiam erunt in proportione superius assignata; scilicet conus $\frac{1}{3}$, sphæra $\frac{2}{3}$ cylindri eidem circumscripti.

TRACTATUS IV.

TRIGONOMETRIÆ LINEAMENTA.

CAPUT I.

Notiones Trigonometricæ.

441 Defin. 1. Trigonometria est ars metiendi triangula calculo arithmetico, sivè triangula resolvendi, arithmeticam geometriæ applicando. In triangulo autem tres anguli, et tria latera inveniuntur, ex quibus tota triangulorum resolutio dependet. Quum verò innumera triangula æquiangula fieri possint, lateribus semper majoribus, aut minoribus, planum est, nec tres angulos tantum, nec aliquot latera sine angulis sufficere ad resolutionem trianguli. Porrò angulo eodem permanente, latus oppositum decrescere, vel augeri in infinitum potest. Undè nulla ratio geometrica inveniri potest inter angulum, et latus oppositum, ex qua trianguli resolutio erui valeat. Quam tamen rationem non dicunt anguli ad latera habent sectiones parallelæ (338), ad quas reduci possunt sinus, ut mox videbimus: atque ideò *functiones* ab aliquibus auctoribus appellantur, eo quod vices angulorum et laterum fungantur in proportionibus.

442 Schol. Triangula, non solum lineis re-

ctis, verum etiam curvis formari possunt: ex. g. si in sphæra tres arcus se mutuò intersecant, triangulum curvilineum formari debent. Hinc divisio trigonometriæ in *planam*, et *sphæricam* ortum duxit. Primam in hoc tractatu, brevitate nobis præfixa, trademus; alteram tantum delibabimus.

443 Defin. 2. Sit angulus BCT (fig. 34) cui radio CT circumscribatur circulus ATE*t*. 1. Perpendicularis BG à puncto B ad radium CT ducta, vocatur *sinus rectus* anguli BCT, seu arcus BT, qui talem angulum metitur: pars verò radii GT, inter sinum rectum, et arcum intercepta, dicitur *sinus versus* ejusdem anguli, et arcus. 2. Si ad punctum T radii CT ducatur perpendicularis ST, tangens circulum in puncto T, et producta ex altera parte donec occurrat CB productæ in S; ST dicitur *tangens*, CS secans ejusdem arcus BT, et anguli BCT.

444 Corol. 1. Angulus BCT, vel arcus BT ad complendam semiperipheriam deficit toto angulo obtuso BC*t*, arcu BA*t*, hic dicitur *supplementum* tam anguli, quam arcus BCT; isque est obtusi suplementum, scilicet ad 180 grad. ex quibus componitur semiperipheria circuli. Hinc idem sinus rectus BG communis est utrique angulo, et arcui BCT, et BC*t* ex quibus coalescit tota semiperipheria. TA*t*. Nam ut habeatur sinus rectus cujuscumque anguli, vel arcus, debet duci perpendicularis ad radium sivè diametrum TC*t* ex puncto concursus lateris anguli, et peripheriæ; et hæc solum potest esse BG; ea igitur communis est utrique angulo obtuso, et

acuto. Rursus tangentes, et secantes eorumdem arcuum, et angulorum etiam æquantur inter se. Ducantur enim tangens, et secans ad punctum t: erunt st, Cs (443): at in triangulis CST, Cst anguli in C, utpotè ad verticem oppositis, sunt æquales; quod pariter dicendum de angulis T et t, qui recti sunt, ac demum latus seu basis $CT=Ct$, supra quam æquales anguli jacent: ergo tota triangula æqualia sunt, ac proindè latera homologa $ST=st$, et $CS=Cs$ (334) nimirum tangentes, et secantes utriusque anguli æquales sunt.

445 Corol. 2. Si latus BC anguli BCT magis ac magis recedat à latere CT, angulus in C, et arcus BT semper crescent, donec BC confundatur cum AC: tunc ACT erit rectus, sector ABTC quadrans, et sinus rectus BG continenter augescens fiet radius AC. Hic dicitur *sinus totus*, quia major quocumque alio sinu recto. Pariter sinus versus GT eadem proportione crescens, æquabitur radio CT. Demum CS, antea secans tangentem ST, evadet ipsi parallela, adeòque numquam concurrent, sed erunt infinitæ.

446 Corol. 3. Omnes circulorum chordæ sunt duplus sinus rectus dimidiæ partis arcus ab ipsis subtensi. Nam sinus BG, productus usque ad punctum D, fit integra chorda arcus BTD; at radius CT, quum sit perpendicularis chordæ BD, eam bifariàm secat (303). ergo tota BD dupla est BG, seu sinus recti. Deindè in triangulis BCG, DCG, $BC=DC$; at anguli in G sunt recti (443); ergo $BC^2=BG^2+CG^2$ et $CD^2=DG^2+CG^2$; ergo detracto communi quadrato CG^2, quæ remanent $BG^2=DG^2$, et $\sqrt{BG^2}=\sqrt{DG^2}=BG$, et DG: et BD dupla BG, seu sinus recti (345).

447 Corol. 4. In triangulo rectangulo BCG, si hypotenusa BC assumatur pro radio circuli, seu pro sinu toto, cathetus BG erit sinus rectus anguli sibi oppositi: similiter altera cathetus CG esset sinus rectus alterius anguli B; quod manifestum erit, si centro B radio BC describatur circulus alter. Quod si non jam hypothenusa, sed una ex cathetis pro radio circuli describendi assummatur, altera cathetus erit tangens circuli ejus lineæ, quæ sinus rectus est anguli assumpti pro centro, quum sit ad ejus extremitatem perpendicularis: ex. g. si CG indicetur pro radio, BG erit tangens anguli BCG, et hypotenusa BC secans ejusdem. Idem eveniret in altera catheto CG, BG desumpta pro radio.

448 Defin. 3. Si angulus non est rectus, alter angulus, in quo deficit à recto, vel per defectum, vel per excessum, dicitur ejus *complementum*. Talis est angulus ACB (fig. 34) respectu utriusque BCT, et BCt; in primo per defectum in altero per excessum; quia primus deficit à recto parte ACB, secundus eadem quantitate ipsum superat. Deindè sinus rectus anguli complementi dicitur *cosinus*: tangens anguli complementi dicitur *cotangens*, atque ejusdem secans *cosecans* respectu utriusque anguli tam obtusi, quam acuti, cujus est complementum. Sic perpendicularis Bb ad radium AC

est cosinus angulorum BCT, et BCt; quia sinus est rectus anguli complementi ACB, atque ejusdem anguli tangens, et secans est cotangens, et cosecans prædictorum angulorum.

449 Corol. 1. Pars radii CG à sinu recto BG divisa, est æqualis cosinui angulorum, quorum est sinus BG. Nam anguli ACG, et BGC sunt recti, quum ACT sit quadrans circuli, et BG sinus rectus; at etiam in b, et B anguli sunt recti; sunt enim Bb, et CG perdendiculares AC, et BG: est igitur BbCG parallelogrammum, cujus latera opposita sunt æqualia (351); ergo CG=Bb.

450 Corol. 2. Si in triangulo rectangulo BCG hypothenusa BC sumatur pro radio, cathetus BG erit sinus rectus, atque altera cathetus CG erit cosinus ejusdem anguli BCG: et contra centro B descripto circulo, CG erit sinus rectus, atque alterum perpendiculum BG cosinus anguli B.

451 Schol. Frequentiùs sinus rectus simplici nomine sinus inuitur. Brevitatis gratia sic scribi solent sin. pro sinu: r. pro radio: tang. pro tangente: sin. v. pro sinu verso: cos. et cos. pro cotangente, et cosecante.

CAPUT II.

Trigonometriæ fundamenta.

452 Theor. 1. *Retento eodem angulo, lineæ trigonometricæ, quas functiones vocant, sunt radiis proportionales.* Nimirum quæ pars respectu sui radii fuerint, sinus, cosinus, tangens, cotangens, secans, cosecans etc. in circulo majori eadem etiam erit in circulo minori respectu ejusdem radii minoris. *Dem.* Describantur (fig. 35) omnes lineæ trigonometricæ arcuum similium AF, Gl sub angulo ABF: AT sit tangens arcus AF; BS secans; FE sinus rectus; BE cosinus; CS cotangens. Et similiter in arcu Gl lineæ respondentes Gt, Bs, el, e; B, Ds. Triangula omnia ABS, EBF, GBs, eBl sunt similia: nam angulus in B communis, in A, E, G, e rectus: ergo omnia triangula sunt similia, et latera homologa proportionalia (338). En proportiones laterum.

$$BF : Bl :: EF : el :: EB : eB$$
$$BA : BG :: AS : Gs :: BT : Bt$$
$$BC : BD :: CS : Ds :: BS : Bs$$

In quibus proportionibus continetur ratio linearum trigonometricarum cum proprio radio, ut attentè eas inspicienti manifestum erit.

453 Corol. Ex dictis patet linearum trigonometricarum absolutas magnitudines, à magnitudinibus radiorum, non angulorum pendere: augeri enim possunt vel minui, angulis intactis, ut in exemplo adducto factum est. Angulo namque in B eodem semper manente, sinus, et reliquæ functiones crescere infinitè possunt, radiis continenter adauctis. Magnitudines verò *respectivæ* seu *comparativæ* ab augmento radiorum minimè desumuntur. Etenim quæ pars est sinus EF (fig. 35), etiam est et sinus el in calculo trigonometrico; quum uterque sinus sit anguli 45°, seu dimidii quadrantis.

Atque hæc quidem relativa magnitudo ea est quæ spectari debet in functionibus; ita ut major, aut minor sinus ille dicatur, qui major, vel minor fuerit in graduum enumeratione. In casu figurato uterque sinus æqualis erit, est enim sinus 45°, tam in majori, quam in minori arcu. Contrà verò sinus totus BD in minori quadrante dimidio graduum numero major est altero EF; qui est sinus 45°; quantumvis hic attenta magnitudine absoluta alterum duplo, excedat.

454 Theor. 2. *In triangulo latera sunt ut sinus angulorum, qui ipsis opponuntur. Dem.* Sit (fig. 13) triangulum ABC: per angulorum vertices circumscribatur circulus; erit latus AB ad AC, ut sin. ang. C ad sin. ang. B. Nam chordæ circulorum sunt duplus sinus angulorum, sivè arcuum ab ipsis subtensorum (446); ergo chorda AB est duplus sinus anguli C; et altera AC etiam duplus sinus anguli. B. est igitur AB : AC :: 2. sin. ang. C : 2 sin. ang. B. Et quum dimidia etiam sint ut tota, erit AB : AC :: sin. ang. C : sin. ang. B. nimirum latera ut situs angulorum, qui ipsis è regione sunt.

455 Corol. Quum in triangulo majori angulo opponatur majus latus, minori minus, æqualibus æqualia (330); tum etiam sinus majoris anguli major, minoris minor, æqualium æquales erunt. Neque tamen indè arguere licet, angulos esse in ratione sinuum: jam enim ostensum est (441) angulos minimè rationem laterum sequi; et quum sinus laterum rationem sequantur, et theor. præced. demonstratum est,

horum non angulorum sinus rationem servabunt. Verum tamen est, angulo decrescente, sinum etiam minui; evanescente, evanescere: at nulla constans ratio invenitur inter ipsos et sinus, quemadmodum nec inter angulos et latera.

456 Theor. 3. *In quovis quadrilatero circulo inscripto duo rectangula ex lateribus oppositis, æquantur rectangulo ex duobus diagonalibus ejusdem. Dem.* Sit quadrilaterum ADCE (fig. 18) circulo inscriptum; dico rectangulum $AD\times CE+AE\times CD=AC\times DE$. Fiat angulus $m=n$. Triangula AEF, CDE angulos habent in m et n æquales per constructionem; in A et D etiam æquales, quippe eidem arcui CE insistentes: sunt ergo similia, atque adeo AE : DE :: AF : DC. Est igitur $AE\times DC=AF\times DE$ (200): nimirum rectangulum sub DE et parte AF alterius diagonalis, æquale rectangulo sub AE et DC.

Deinde triangula ADE CEF sunt similia: nam angulus $AED=CEF$: quum pars $m=n$, et altera utrique communis: angulus $ADE=ECF$: insistunt enim eidem arcui AE (311); ergo AD : CF :: DE : CE; et $AD\times CE=CF\times DE$; scilicet aliud rectangulum $AD\times CE$ æquale est rectangulo sub eadem DE et parte altera FC: et reducendo $DE\,(AP\times CF)=DE\times AC=AE=DC+AD\times CE$; rectangulum nempè sub diagonalibus æquale est duobus rectangulis laterum oppositorum quadrilateri.

457 Schol. Ex hoc theoremate deductæ sunt tabulæ sinuum, cujus usus in trigonometria frequentissimus. Chorda enim 60 graduum æ-

qualis est radio: eo igitur diviso in quot placuerit partes, ad normam hujus divisionis reliquæ chordæ deducuntur; et dimidium chordæ dat sinum quæsitum. Inutile esset singillatim omnia tradere problemata, quæ ad constructionem tabularum inventa sont: jam enim in plerisque libris matematicis tabulæ confectæ reperiuntur, undè labor iste prorsus inutilis foret. Nobis satis est ea tradere, quæ tironi philosopho maximè conducunt ad physicas veritates condiscendas.

CAPUT III.

Usus sinuum in calculo trigonometrico.

458 Schol. Plerùmque sinus ope tabularum habentur, in quibus gradus, et minuta prima, deindè sinus inveniuntur. Animadvertendum tamen, non omnes eadem methodo procedere. Sunt qui gradus, minuta, sinus tantum proponunt, quum ex his deduci possint reliqua. Alii sinibus sinus logarithmicos substituunt, ut facilitati et brevitati consulant. Prolixiores alii opus singulare excuderunt, in quo òmnia in columnis separatis, et sibi respondentibus, concinnata sunt. Novissimè Gardiner Anglus, et Toaldus Venetus hujusmodi tabulas absolutissimas evulgarunt, in quibus omnia, quæ ad calculos trigonometricos necessaria sunt, collecta invenies. Tabularum usus ex resolutione problematum manifestus fiet. Animadvertendum tamen radium = 10, 000, 000, 000 usurpatum

fuisse in constructione tabularum: nunc verò tres ultimæ cyphræ omittuntur: quoniam hæc omissio nullum errorem sensibilem inducit.

459 Problema 1. *Anguli, aut arcus quadrante minoris functiones in tabulis invenire.* Resol. Sint ex. g. inveniendæ lineæ trigonometricæ anguli 30°, 10′: invento in tabularum prima columna numero graduum, et minutorum 30°, 10′, aut alterius dati, in secunda columna, linea ipsa currente, invenietur sinus = 50251. 70: in tertia tangens = 58123: 53: in quarta secans = 115664. 80. Quod si adsint logarithmi in tabulis, ut nonnumquam solet, in columna quinta et sexta eosdem reperies: qui quidem unicè apponuntur, ut si aliqua ex lineis trigonometricis per aliam multiplicanda, aut dividenda sit, logarithmi præsto sint. In aliis verò logarithmos, omissis sinibus, reperies; quod nullam ad praxim difficultatem addit.

460 Probl. 2. *Anguli, aut arcus quadrante majoris sinum atque alia invenire.* Solut. Quum jam præmonitum sit angulo obtuso, atque acuto ejusdem supplemento communes sinus, atque alias fractiones esse (444); dato angulo obtuso, nil aliud quærendum restat, quam ejusdem supplementi numerum graduum, et minutorum; quibus inventis, hujus anguli functiones erunt, et alterius. Sit datus angulus, aut arcus 149°, 50′, cui inveniendus sit sinus: subtrahe à 180°, 149°, 50′, residuum erit 30°, 10′: hujus anguli sinus est etiam alterius 149°, 50, ut et reliquæ lineæ trigonometricæ, quæ pro illo acuto designatæ sunt.

461 Probl. 3. *Cosinum, cotangentem, et cosecantem dati anguli invenire.* Solut. Quæratur ejusdem anguli complementum (448); hujus sinus, tangens, et secans erit alterius cosinus, cotangens, et cosecans. Inveniendæ sint anguli 30°, 10′, reliquæ functiones: dic 90°—(30° +10′)=59+50′; hujus anguli sinus tangens, et secans erunt et lineæ alterius quæsiti sinus, tangens, et secans. Quod ut facilius, et brevius obtineretur in tabulis, ita artificiosè dispositi sunt gradus, ut minoribus è regione eorum complementa respondeant; atque adeò omnes functiones præ oculis semper habeantur: uti in exemplo adducto gradui 30 completo immediatè respondet gradus 60: minuto verò adaucto, respondet gradus 59, 59′ et sic deinceps, altero crescente, altero minuente eadem proportione.

462 Probl. 4. *Dato sinu, aut aliqua ex cæteris functionibus, invenire angulum ipsi respondentem.* Solut. Facilis negotii res erit, si datus sinus reperiatur in tabulis; inibi enim et angulus, sivè gradus ipsi conveniens invenietur. Quod si datus sinus non sit notatus in tabulis, signum est ad minuta secunda pertinere. Jam verò notetur differentia, quæ inter duos sinus proximè majorem, et proximè minorem, ex his quì in tabulis reperiuntur, intercedit: deindè inter datum, et proximè minorem: demum instituatur proportio inter duas inventas differentias, 60, et numerum x inveniendum. En exemplar: sit datus sinus logarithmicus 9.9030900: quæsito in tabulis proximè majore

sinu logarithmico 9.9031084, et proximè minore 9.9030136; eorumdem differentia est =948. Differentia vero inter 9.9030900, ac 9.9030136=764. Jam instituatur sequens analogia: 948 : 764 :: 60″ : x=48″, neglecta minutia $\frac{336}{948}$, quæ vix tertiam partem minuti secundi adæquat. Quum vero sinus logarithmici prædicti respondeant, major 53°, 8′, minor 53°, 7′; datus erit 53°, 7′, 48″.

463 Schol. In tabulis vulgaribus minuta secunda non reperiuntur; quippè ad calculos geometricos minus necessaria. Ad supputationes verò astronomicas omninò secundorum habenda est ratio; quandoquè etiam minutorum tertiorum. Ex dictis numero superiore facilè eruitur methodus supputandi minuta secunda, inveniendi nimirum sinum, aut logarithmum ipsi respondentem. Sit datus angulus 36°, 52′ 12″, Subducatur differentia inter sinus logarithmicos angulorum 36°, 53′, et 52″: deindè instituatur sequens analogia 60 : 10 :: ut differentia inventa ad x. En typum

Sin. log. 36°. 53′=9.7782870
Sin. log. 36°. 52′=9.7781186

Differ.=1684

Jam 60 : 12 :: 1684 : x=336+$\frac{48}{60}$; quod ad 337 quam proximè accedit: itaque hic numerus addatur (67) sinui logarithmico
gradus 36°.52=9.7781186
237

habebitur sinus 36°, 52′, 12″=9.7781523.

Eadem est praxis, si loco logarithmorum, sinus inveniatur, aut sinus, et logarithmi, ut in tab. Ulacquii, Gardineri, er Toaldi.

CAPUT QUARTUM.

RESOLUTIO TRIANGULORUM.

§. I.

Resolutio trianguli rectanguli.

464 Defin. Resolutio trianguli est, ejus partes incognitas medio cognitarum deducere. Jam præmonitum fuit tres angulos ad resolutionem trianguli non sufficere; undè opus est aut aliquot latera, et angulos; aut unum angulum, atque aliquot latera cognoscere, ut cetera deducantur. In triangulo rectangulo notus est angulus rectus, cujus sinus æqualis est radio: hinc sufficit ad ejus resolutionem, duas alias ex partibus præcognoscere; nimirum latus, et angulum.

465 Probl. 1. *Datis cathetis, invenire reliquas partes trianguli rectanguli.* Solut. Sit triangulum (fig. 36) ABC rectangulum in B, cujus perpendicula AB, BC, cognita sunt: ex gr. in proportione 2 : 3. 1. Hypothenusa AC etiam sine trigonometria invenire potest; etenim $AC^2 = AB^2 + BC^2$; ergo $AC^2 = \sqrt{}$ ($AC = \sqrt{}$ (AB^2 BC^2) 2. Ut inveniatur angulus C, assumpto BC in radium, AB erit tangens (447): ergo BC : AB :: sin. tot. : ad tang. ang. C (452). At BC : AB :: 3 : 2 :: 1000000 : $x = 6666666$ neglecta minutia; cui res-

pondet in tabulis gradus 41°, 48′ proximè. 3. Cognito angulo C = 41°, 48′; angulus A ejus complementum facilè innotescit = 90 − 41°, 48′ = 48°, 12′. 4. Hypotenusa etiam hac analogia deducitur.

Sin. A : BC :: sin. tot. : AC.

466 Probl. 2. *Latere, et angulo datis in triangulo rectangulo, invenire reliqua.* Solut. Inveniatur alter angulus metodo supra enuntiata; deindè sinus hac proportione deducentur; alterutrius anguli sinus ad datum latus, ut sinus totus ad latus inveniendum. Sic ex gr. datus angulus A, et latus AB, angulus C erit complementum ad 90°. Deindè ut inveniatur latus AC, fiat

Sin. ang. C : AB :: sin. tot : AC.

Demum cathetus altera BC hac proportione deducetur:

Sin. ang. C : AB :: sin ang. A : BC.

467 Probl. 3. *Hypothenusa, et angulo acuto cognitis, reliqua ignota investigare.* Solut. Altero acuto, ut supra invento, latus angulo dato oppositum hac analogia deducitur: radius ad sinum dati anguli, ut hypothenusa ad latus quæsitum. Sit datus angulus C (fig. 36), præter hypothenusam AC; analogia erit:

R : sin. ang. C :: AC : AB.

Quod si datus sit angulus A fiat.

R : sin. ang. A :: AC : BC.

468 Schol. Ex methodo hactenus tradita facilè deduces, ad resolutionem triangulorum, prius inveniendos esse angulos, deindè latera investiganda. A sinibus enim angulo-

rum pendet proportio inquirenda laterum, et sinuum, ut his cognitis, latera innotescant.

§. II.

Resolutio trianguli non rectanguli.

469 Probl. 1. *In quocumque triangulo non rectangulo cognitis duobus lateribus, atque uno ex angulis oppositis, invenire reliqua.* Solut. Sint cognita latera AB, BC (fig. 13), et angulus quicumque oppositus alterutri ex duobus lateribus, ut A. Primum anguli; deindè latus ignotum debet inquiri. Quod ad angulos attinet, sequenti analogia invenientur:

BC : sin. ang. A :: AB : sin. ang. C.

Ex hac proportione innotescit sinus anguli C; quo cognito, et angulus C, et tertius statim apparet. Demum latus ignotum hac proportione eruetur:

Sin. ang. A : BC :: sin. ang. B : AC.

470 Probl. 2. *Datis duobus lateribus, et angulo acuto ab ipsis intercepto, invenire reliqua.* Solut. Hujus problematis solutionem plerumque methodo nimis tironibus implicata tradunt auctores per semisummas et semidifferentias tangentium angulorum ignotorum. Ut faciliore via incedamus, quæ etiam pro resolutione cujuscumque trianguli sivè acuti, sivè obtusi indicari potest, en compendium resolutionis. Sit cognitus angulus C (fig. 12), et latera AC, BC illum intercipientia: reliqua investiganda sunt. Ducatur perpendicularis BE ab uno ex angulis ignotis ad latus oppositum; remanebit triangu-

lum, quod resolvi debet, in duo triangula rectangula divisum; methodo superius indicata tractandum. Ut latus BE cognoscatur, hac analogia utendum erit, in qua tres primi termini noti sunt:

Sin. ang. E : BC :: sin. ang. C : BE.

Latus deindè CE hac etiam instituta proportione eruetur.

Sin. ang. E : BC :: sin. ang. B : CE.

Angulus enim B, complementum C, supponitur notus ex methodo num. 466. Rursus quum hypothenusa BC data sit, latus $BC=\sqrt{(CB)}=\sqrt{(BE^2+CE^2)}$; atque adeò $CE=\sqrt{(BC^2-BE^2)}$.

2. Deveniendo ad alterum triangulum, latus AE facilè invenietur, subtrahendo partem CE cognitam à tota AC etiam cognita. Sunt igitur notæ catheti hujus trianguli; ipsarum autem quadratorum summa æqualis est quadrato hypotenusæ; et radis æqualis lateri AB: adeòque triangulum totum resolutum manet. Præterea deduci etiam possent sinus angulorum A, et B sequenti analogia.

AE : BE :: sin. tot. : tang. ang. A.

BE : AE :: sin. tot. : tang. ang. ABE

(447, et 464).

471 Probl. 3. *Datis duobus lateribus et angulo obtuso ab ipsis comprehenso, reliqua invenire.* Solut. Sit ABC (fig. 37) angulus obtusus interceptus à lateribus cognitis AB, BC: demittatur perpendicularis AD in latus BC productum in D. Angulus ABD cognitus est in novo triangulo, utpotè supplementum ad duos rectos

anguli dati B; adeòque et tertius DAB, quum D sit rectus: latus etiam AB datum est: quarè per nom. 466 reliqua nota erunt. Rursus latus BD addatur BC; utrumque jam notum; subindè et AC innotescet, quæ hipothenusa est respectu totius trianguli ADC; adeòque $AC=\sqrt{(AD^2+DC^2)}$, quoniam $AC^2=AD^2+DC^2$.

472 Probl. 4. *In triangulo non rectangulo datis duobus angulis, et latere, reliqua invenire.* Solut. Ex dictis tertius angulus manifestus est, duobus præcognitis. Ut duo latera detegantur, hæc proportio instituenda est. Sint dati anguli A, C (fig. 37), et latus BC, erit

Sin. ang. A : BC :: sin. ang. C : AB.
Sin. ang. A : BC :: sin. ang. B : AC.

473 Schol. Cognitis tribus angulis, cognoscuntur sinus angulorum, adeòque et ratio laterum, quæ est ipsa sinuum. Hæc est magnitudo comparativa, quæ omninò ab absoluta diversa est (453): eisdem enim angulis, atque adeò sinubus, ad infinitum variari potest magnitudo trianguli. Undè nisi unum saltem latus innotuerit, reliqua determinari non poterunt. Datis verò tribus lateribus tantum, anguli cognosci poterunt, si prius triangulum, ad rectangulum revocetur: ut articulis 470 et 471 indicavimus; deindè resolutio procedet uti supra 465.

474 Schol 2. Quum idem sinus communis sit angulo acuto, et ejus supplemento, dato sinu, angulus cognosci determinatè non poterit. Hinc aliundè notum esse debet genus anguli, cujus sinus inventus est: quod etiam

ad reliquas lineas trogonometricas extendi debet (444).

CAPUT QUINTUM.

Notiones trigonometriæ sphæricæ.

475 Defin. 1. Præter ea, quæ numero 404 de sphæra tradita sunt, hic recolenda, sequentes definitiones addimus. Trigonometria sphærica est scientia, quæ triangula in sphæræ superficie á circulis maximis se mutuò intersecantibus formata, metiri docet. Dixi ab circulis maximis, reliqua enim triangula à minoribus circulis designata, trigonometria non considerat. Porrò in hac circulorum maximorum intersectione tria genera triangulorum cognoscenda ocurrunt: *rectilinea* à duobus radiis, et chorda circuli maximi effecta, *mixtilinea* à duodus radiis et arcu, lineis partim rectis, partim curva formata: ac demum *curvilinea* à tribus arcubus se mutuò intersecantibus descripta. De rectilineis nihil addendum ad ea, quæ superiùs tradita sunt; easdem enim proprietates intra sphæram habent, atque in reliquis superficiebus. Anguli mixtilinei mensura est arcus à duobus radiis interceptus.

476 Defin. 2. *Angulus sphæricus rectus* est, quem duo arcus circulorum maximorum, ad angulos rectos se dividentium, formant: *acutus*, qui recto minor; *obtusus*, qui recto major ab iisdem arcubus conformatur; quæ notiones cum angulis rectilineis ipsis communes sunt, sicut

et reliquæ triangulorum divisiones.

477 Defin. 3. Triangulum sphæricum erit æquilaterum, si tres arcus ipsum componentes æquales sunt: isoscele, si duo arcus, seu latera æqualia: scalenum, quolibet arcu diversæ magnitudinis existente. Similiter triangulum sphæricum rectangulum erit, si aliquem angulum rectum contineat; obtusangulum, si obtusum; acutangulum, si omnes acutus habeat.

478 Defin. 4. Arcus metientes angulos trianguli sphærici plerumquè non sunt, qui ipsis opponuntur; sed produci debent crura arcuum angulum formantium ad nonaginta gradus: pars circuli ab ipsis intercepta, atque ab angulo nonaginta gradibus distante, erit mensura anguli. Hinc inferes, circulum, cujus arcus dat mensuram anguli sphærici, polos habere in ipso anguli vertice. Poli enim sunt extrema axis in sphæra, atque ab ipsius æquatore 90 gradibus distantes (397). Hinc si angulus fuerit rectus, ejus arcus erit quadrans; si obtusus, quadrante major; si acutus quadrante minor.

479 Corol. 1. Si duo maximi sphæræ circuli sunt invicem perpendiculares, axis unius est diameter alterius. Nam duo plana circulorum se secabunt ad angulos rectos, atque indè duæ lineæ per centrum transeuntes talium circulorum, distabunt invicem nonaginta gradibus; adeòque quæ est diameter in uno, erit polus alterius, et vice versa (397). Undè etiam deducitur inversa propositio antecedentis; nimirum si in duobus circulis axis unius est diameter alterius, erunt perpendiculares, ac poli eorumdem quadrante distabunt.

480 Corol. 2. Quum duo circuli maximi sunt invicem inclinati, inclinationis dimensio est arcus circuli maximi 90° distantis ab eorumdem intersectione. Nam mensura talis inclinationis est angulus, cujus dimensio in triangulis sphæricis desumitur ab arcu circuli 90° remoti ab angulo (478). Præterea anguli sphærici crura magis ac magis continenter divaricantur, donec ad 90° deveniant; deindè inversa inclinatione magis semper accedunt, eo usque post alterum quadrantem denuò ad angulum conjungantur; quod simplici cujuscumque sphæræ inspectione, circulis maximis distinctæ, videre licet. Hinc circulus mensurans angulum duorum circulorum se invicem secantium debet per utriusque polos transire.

481 Corol. 3. In sphæra cœlesti, et terrestri omnes meridiani sunt æquatori perpendicularis; transeunt enim per ejusdem polos, qui et poli mundi vocantur. At sunt obliqui *eclipticæ*, quæ ad angulum $23°\frac{1}{2}$ æquatori inclinata est; nisi duos meridianos nonaginta gradibus à punctis intersectionis eclipticæ, et æquatoris distantes excipias. Nam hæc linea, communis utrique plano eclipticæ, et æquatoris, est diameter utriusque circuli, atque adeò axis respectu meridiani.

482 Corol. 4. Spatium quodvis duobus circulis parallelis in sphæra interceptum, dicitur *zona*. Hujus latitudo est arcus circuli ipsis perpendicularis: hic enim eorumdem minimam

distantiam metitur. Atque hæc pauca de trigonometria sphærica dicta sufficiant, quatenus ad tractatus astronomiæ, et geographiæ physicæ conducentia: reliqua nimis implexa, et tironi philosopho parum necesaria, quæ ad resolutionem triangulorum sphericorum pertinent, illustrium auctorum vestigia sequuti libenter dimittimus.

TRACTATUS V.

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM.

CAPUT PRIMUM.

Notiones preliminares.

483 Defin 1. SECTIONES CONICÆ ita appellatæ sunt, quod à plano conum secante diversis directionibus formentur. Si planum à vertice A (fig. 38) perpendiculariter aut obliquè ad basim secat conum ADC, hujusmodi sectio erit triangulum; nimirum duæ internæ facies coni ita divisi triangulum representabunt. Quod si planum secans basi sit parallelum, ut EH, FI, sectio erit circulus. De his duobus sectionibus nihil addendum occurrit ad ea, quæ in inferiori geometria tradita sunt, tironi philosopho necessaria.

484 Defin. 2. Sectiones, quæ antonomasticè *conicæ* vocantur, sunt sequentes. Applicetur planum directione ad quodvis coni latus parallela, ut in *ab* ad latus AC. Sectio hæc erit *Parabola*, sic dicta, quod græcis, queis dedit ore rotundo musa loqui παρα'βολη idem sonet, quod latinis æqualitas, similitudo; optimè desumpto nomine ex genuina parabolæ proprietatè; quam postea dabimus. Jam si planum

distantiam metitur. Atque hæc pauca de trigonometria sphærica dicta sufficiant, quatenus ad tractatus astronomiæ, et geographiæ physicæ conducentia: reliqua nimis implexa, et tironi philosopho parum necesaria, quæ ad resolutionem triangulorum sphericorum pertinent, illustrium auctorum vestigia sequuti libenter dimittimus.

TRACTATUS V.

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM.

CAPUT PRIMUM.

Notiones preliminares.

483 Defin 1. Sectiones conicæ ita appellatæ sunt, quod à plano conum secante diversis directionibus formentur. Si planum à vertice A (fig. 38) perpendiculariter aut obliquè ad basim secat conum ADC, hujusmodi sectio erit triangulum; nimirum duæ internæ facies coni ita divisi triangulum representabunt. Quod si planum secans basi sit parallelum, ut EH, FI, sectio erit circulus. De his duobus sectionibus nihil addendum occurrit ad ea, quæ in inferiori geometria tradita sunt, tironi philosopho necessaria.

484 Defin. 2. Sectiones, quæ antonomasticè *conicæ* vocantur, sunt sequentes. Applicetur planum directione ad quodvis coni latus parallela, ut in *ab* ad latus AC. Sectio hæc erit *Parabola*, sic dicta, quod græcis, queis dedit ore rotundo musa loqui παρα'βολη idem sonet, quod latinis æqualitas, similitudo; optimè desumpto nomine ex genuina parabolæ proprietatè; quam postea dabimus. Jam si planum

directione qualibet utrumque latus attingente, ac secante dividat conum, ut in EG; sectio hoc modo facta dicitur *ellipsis*, quod latinè *defectio* redderetur: idem enim est græcis ἐλλείπω, quod latinis *deficio*. Nimirum sectio hæc, contra ac parabola, ab æqualitate deficit, uti infra videbimus. Producta autem sectione extra planum, eadem directione EG, basim coni DC, sive planum basis similiter productum attinget, ac secabit in K. Demum si sectio extra verticem A, quacumque alia directione fiat, quæ alterutri laterum AC, AD parallela non sita; ac basim DC intra conum secet, *hyperbola* dicitur hujusmodi sectio, ut in H*h*. Crura videlicet hyperbolæ excedunt, atque ampliora sunt parabolæ cruribus: undè nomen factum huic sectioni, eo quod ὑπερβάλλω excedere significet: excesus verò in ejus æquatione palàm fiet. Breviùs; *parabola* oritur, quando unum tantum latus in cono asignari potest, cui planum secans sit parallelum: *ellipsis* quum nullum ex lateribus assignari potest, cui parallelum sit planum secans, quoniam omnia secat: demum *hyperbola* nascitur, quando duplex invenitur latus, quibus planum secans sit parallelum.

485 Defin. 3. Ad indolem curvæ investigandam, aut in plano describendam, ducantur rectæ MM, *mm* (fig. 40), quæ *ordinatæ*, sivè ordinatim applicatæ ad diametrum dicuntur. Diameter verò VX *axis* vocatur, atque ab ordinatis perpendiculariter dividitur: ac vicissim axis ordinatas perpendiculariter, atque insuper bifariàm patitur. Reliquæ diametri extra axim jacent, eique sunt parallelæ. Pars inter verticem seu supremum curvæ punctum, et ordinatas intercepta, dicitur *abscissa*: partes verò, in quas axis dividit ordinatas, *semiordinatæ* dicuntur, aut brevitatis gratia etiam *ordinatæ* á nonnullis solent nominari. Algebricè abscissa littera x, semiordinata verò y solet denotari; nisi plures occurrant abscissæ atque ordinatæ in eodem calculo, quæ tunc litteris aliis confusionis vitandæ gratia notantur.

486 Schol. Quum circulus una ex curvis sit, quæ tironibus familiarior est, non abs re fuerit prædictas notiones ad eumdem transferre. Sit AMB (fig. 39) semicirculus insistens diametro AB: perpendicularis PM erit semiordinata; AP abscissa; vertex A; axis AB. Jam verò ex geometria notum est, MP perpendicularem ad diametrum esse mediam proportionalem inter ejusdem segmenta (344): scilicet MP est media proportionalis inter segmenta AP, BP; atque adeò $MP^2 = AP \times BP$. Fiat $AB = a$; $AP = x$; $MP = y$; quum sit $AP = x$; erit $BP = a - x$; adeòque $x : y :: y : a - x$, et $ax - x^2 = y^2$. En æquationem ad circulum, per quam hujusmodi curva circularis à quacumque alia discerni potest. Omnia enim puncta peripheriæ circularis, quæ hanc curvam perficiunt, eandem rationem ad diametrum dicunt. Nam à quovis peripheriæ puncto ductis diametro et abscissis, ratio constans erit. $ax - x^2 = y^2$. Undè circulus est *curva*, *in qua rectangulum sub abscissa, atque altera diametri parte*; *aut quod*

idem valet, sub abscissa et diametra abscissa mulctato, æqualis est semiordinatæ quadrato: quæ definitio traderetur, si circulus tamquam sectio conica deberet explicari; atque ádeo inter ellipses computandus foret.

487 Defin. 4. *Quantitates constantes* in curva dicuntur, quæ semper manent invariatæ, crescentibus, aut decrescentibus aliis. In circulo diameter, et radius erunt ejusdem mensuræ, quacumque varietate occurrente inter abscissas, et ordinatas; quæ idcircò quantitates variabiles vocantur, quod augmenti, aut decrementi capaces sint. Augetur enim quantitas AP (fig. 39), crescente ordinata MP; eaque minuente à centro ad circumferentiam minuitur, ita ut, in puncto A concurrentibus, utraque deveniat $=0$, sivè evanescat. Hoc itidem in aliis curvis evenit respectu abscissarum atque ordinatarum.

488 Defin. 5. Inter quantitates constantes recensétur *parameter*. Hæc est recta quædam invariabilis, ad quam referuntur abscissarum augmenta, vel decrementa in ordine ad æquationem cum semiordinatis. Parameter æquatur ordinatæ per focum transeunti *Focus* vero est punctum constans in axe sumptum, ad quod refertur curvæ cujuscumque ductus. Curvæ MVM (fig. 40) parameter æquatur rectæ MFM: punctum verò F focus est, undè deflectio curvæ MVM definitur.

CAPUT SECUNDUM.

Parabola.

489 Defin. Parabola est *curva, in qua semiordinatarum* PM, PM (fig. 40) *quadrata æqualia sunt rectangulo ex parametro et abscissa.* Hæc propietas modo demonstranda, charasteristica est parabolæ notio. Apollonius Pergæus, celebre inter antiguos mathematicos nomen, hanc curvam maximè illustravit, undè *Apolloniana* à nonnullis solet appellari.

490 Problema. *Parabolam in plano describere.* Solut. Sumatur extra curvam quædam recta ED (fig. 40), quæ *directrix* appellatur, eo quod ad conformationem curvæ dirigat. In recta ED sumatur quodvis punctum G, ad quod ducatur perpendicularis VX: hæc erit axis parabolæ. In hoc axe punctum sit quoddam F, ad placitum sumendum: pars axis inter FG intercepta bifariàm dividatur in V: hic erit vertex parabolæ, atque in F focus ipsius. Per punctum F ducatur perpendicularis MFM, ad axem VX, atque utrinquè æqualis rectè FG, seu dupla ejusdem FG: hæc erit æqualis parametro curvæ describendæ (488). Ducantur deindè aliæ perpendiculares MM, *mm* ad axem VX, et parallelæ MFM, quæ erunt ordinatæ parabolæ: sicut et VF, VP etc. ejusdem abscissæ, à quibus curvæ ductus determinari debet (488). Ut vero punctum semiordinatæ, per quod curvam describere oportet, inveniatur

intervalum cujusvis abscissæ PV à directrice ED, sivè distantia PG circino transferatur à puncto F ad semiordinatam, in qua punctum P abscissæ sumptum est uti in Fm factum vides: puncta omnia in semiordinatis hoc modo inventa designabunt parabolæ ductum à curva VMmM utrinquè describendum. Demonstratio ex dictis numero superiore, et sequenti patebit.

491 Theor. 1. *In parabola modò descripta, quadrata semiordinatarum æquantur rectangulo ex abscissa in parametrum. Dem.* Semiordinatam Pm voco y: ejus abscissa dicatur x: GV=FV dico a. Quum GV+FV=FM, erit GV=½MFM, quæ dupla est FM (per præced). Jam in triangulo rectangulo FPm, Fm^2=FP^2+Pm^2 (345); et Pm^2=Fm^2—FP^2; ac FP^2=Fm^2—Pm^2. Traducantur valores ad formulas algebricas; Fm=GP=$a+x$; adeòque F$m^2=(a+x)(a+x)=a^2+2ax+x^2$ (129): P$m^2=y\times y=y^2$. FP=$x-a$; ac proindè FP$^2=(x-a)(x-a)=x^2-2ax+a^2$ (132). Comparando igitur valores erit:

$$a^2+2ax+x^2=y^2+x^2-2ax+a^2$$

Et transp. $y^2=a^2+2ax+x^2-x^2+2ax-a^2$

Et reducen. $y^2=4ax$.

At $4a$=MFM: nam GV=a, et GF=$2a$=FM, adeòque tota MFM=$4a$, quæ est parameter curvæ descriptæ. Rectangulum itaque $4ax$, ex abscissa in parametrum, æquale est semiordinatæ quadrato. Hæc demonstratio in qualibet ex semiordinatis iterari potest.

491 Corol. 1. In parabola, quadrata ordinatarum sunt ut abscissæ. Nam parameter est

semper quantitas invariata in eadem parabola; adeòque, quum ordinatæ crescant, aut decrescant juxta proximiorem, aut remotiorem à foco distantiam, atque æquatio $y^2=4ax$ constans sit; uno ex factoribus eodem semper manente, scilicet $4a$, alter nempe x debet variari; ad eumque referri incrementa, aut decrementa ordinatarum, seu quadratorum earumdem.

492 Corol. 2. Quoniam crescente axe, abscisse pariter concrescunt, eodem proportionali incremento quadrata ordinatarum augebuntur; atque adeò eorumdem radices. Parabola igitur non est curva in se rediens, ut circulus atque ellipsis: promoto enim axe, parabolæ crura, quæ ab ordinatis determinantur, juxta earum incrementa divaricabuntur, ac semper recedent.

493 Corol. 3. Axis parabolæ VX ordinatas bifariàm secat: est enim utrinquè $y^2=4ax$; sivè dicta parametro p, $y^2=px$; ergo $\sqrt{y^2}=y=\sqrt{(px)}$: semiordinatæ æquales eidem radici px.

494 Corol. 4. Parameter est tertia proportionalis ad abscissam, et semiordinatam. Etenim deducta ex æquatione $y^2=px$ proportione: erit $x:y::y:p$ (402). Nam $\frac{y^2}{x}=p$. Quod si per alterum factorem dividas $\frac{y^2}{p}=x$, proportio erit; $p:y::y:x$; abscisa videlicet est tertia proportionalis ad parametrum, et semiordinatam, atque hæc ubiquè media proportionalis inter utramque.

495 Corol. 5. Si in parabola $x=p$; erit $y^2=p^2$; atque $y=p$. In puncto nimirum, in quo abscissa est æqualis parametro; semiordinata, parameter, atque abscissa æquales sunt.

496 Corol. 6. Assumpta $x=\frac{1}{2}p$, erit $y^2=\frac{1}{2}pp=\frac{1}{3}p^2$; et $y=\sqrt{}\ (\frac{1}{2}p^2)$; ac deducendo proportionem (202), $\frac{1}{2}p : y :: y : p$. Quamdiù abscissa fuerit dimidium parametri, semiordinata erit media proportionalis inter semiparametrum, et parametrum. Quid si non jam abscissa, at semiordinata æqualis sit semiparametro? Respondeo, tum fore abscissam quartam partem parametri. Nam $y=\frac{1}{2}p$; et $y^2=\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}pp=px$, ergo $x=\frac{1}{4}p$. Quùm verò in foco semiordinata semiparametro æqualis sit, abscissa erit quarta pars parametri; et hæc tertia proportionalis ad parametrum, ac semiordinatam in foco sumptam (494).

497 Theor. 2. *Quadratum semiordinatæ cujuscumque quadruplum est rectanguli ex abscissa illi respondente in distantiam foci á vertice.* *Dem.* Sit abscissa VP (fig. 40), et semiordinata Pm: dico Pm^2 quadruplum fore VP×VF. Nam VF$=\frac{1}{4}p$ (496), et PV$=x$; quarè PV×VF$=\frac{1}{4}px$. At Pm^2 $y^2=px$: ergo Pm^2 quadruplum rectanguli ex abscissa in distantiam verticis à foco.

498 Corol. Distantia foci á vertice est tertia proportionalis ad abscissam, et dimidiam semiordinatam. Quoniam $y^2=px$; erit $\frac{1}{4}y^2=\frac{1}{4}px$: et $\frac{1}{4}\frac{y^2}{x}=\frac{1}{4}p$: deductaque proportione $x : \frac{1}{2}y :: \frac{1}{2}y : \frac{1}{4}p$. Abscissa ad dimidiam semi-

ordinatam, ut hæc ad distantiam foci à vertice.

499 Theor. 3. *Recta ex foco parabolæ ad extremitatem semiordinatæ cujuscumque, æqualis est abscissæ illi respondenti, plus distantia foci à vertice.* *Dem.* Sit VP (fig. 40) abscissa cui respondet semiordinata Pm: dico $Fm=$ PV+FV. Etenim VF$=\frac{1}{4}p$ (496), et PV$=x$; idcircò FP$=x-\frac{1}{4}p$. Jam verò.

$Fm^2=Pm^2+FP^2$ (345) $=y^2+x^2-\frac{1}{2}px+\frac{1}{16}p^2$.

Et substituendo $y^2=px$, erit $Fm^2=px+x^2-\frac{1}{2}px+\frac{1}{16}p^2$.

Et reducendo $Fm^2=x^2+\frac{1}{2}px+\frac{1}{16}p^2$.

Et extracta utrinquè radice: $Fm=x+\frac{1}{4}p$. Recta ex foco ad extremitatem semiordinatæ æqualis abscissæ, plus distantia foci à vertice.

500 Corol. Quum distantia foci à directrice sit dupla distantiæ foci à vertice, intervallum inter directricem, et verticem æquale erit distantiæ foci à vertice; atque adeò æquale rectæ ductæ à foco ad punctum concursus semiordinatæ cum parabola. En quomodò inventa sit methodus parabolam in plano describendi.

501 Probl. 2. *Ad quodlibet parabolæ punctum tangentem ducere.* Solut. Sit datum punctum m semiordinatæ Fm, ad quod ducenda sit tangens (fig. 40). E foco F ad datum punctum ducatur recta Fm; atque ex eodem puncto altera $Dm=Fm$, et ad directricem AD perpendicularis. E foco F ad punctum D ducatur recta FD, eaque bifariàm secetur in n; per duo puncta nm ducatur recta Anm; hæc erit tangens parabolam in puncto dato m. *Dem.* Linea

Anm curvam tangit in puncto m; reliqua ejusdem puncta extra curvam sunt. Primum ex constructione manifestum est; alterum oportet demostrare. Triangulum DFm est isoscele: nam Dm=GP=Fm (500): quumque basis DF bifariàm divisa sit in n; triangula Fmn, Dmn æqualia erunt, et rectangula ad n (294). Ducantur DM, FM: triangula FMn, DMn, erunt etiam æqualia, ob Fn=Dn, latus Mn utrique commune, et angulos ad n rectos (333). Quapropter si ducatur LM ad directricem perpendicularis, DM erit hypotenusa trianguli DLM, atque idcirò major LM cujus quadratum superat toto quadrato DL (345). At FM=DM; ergo FM major LM: et punctum M extra parabolam: quum LM mensura sit distantiæ á foco ad punctum in linea FM à parabola intercipiendum (499). Clariùs; curva parabolica debet transire per punctum, in quo linea FM æqualis sit LM (500); quumque FM major sit LM, ejus extremitas extra parabolam est.

502 Corol. Linea, seu diameter Bm axi parellela, concurrens in puncto contactus m cum Fm, facit angulum BmM=Fmn. Est enim ad verticem oppositus Dmn=Fmn (501); atque adeò Fmn æqualis (290). Ex hac proprietate parabolæ deducitur phænomenon speculorum parabolicorum, in quibus omnes radii paralleli, uti Bm, Km, ad focum F reflectuntur facientes angulum reflexiones, angulo incidentiæ patem, uti constanti lege in physicis observatur.

CAPUT TERTIUM.

Ellipsis.

503 Defin. 1. Ellipsis est *curva, in qua semiordinatarum quadrata eam inter se rationem dicunt, quam habent rectangula partium abscissarum, sive segmentorum axis.* Nimirum in ellipsi EG (fig. 41 et 42), $my^2 : MY^2 :: Ey \times Gy : EY \times GY$. Hoc discrimen circulum inter atque ellipsim intercedit, quod in circulo quadrata semiordinatarum æqualia sunt rectangulis respondentium abscissarum: in ellipsi verò proportio tantum reperitur. Quod si ellipsis curvatura adeò inflecteretur, ut quadrata semiordinatarum non jam proportionalia, verum æqualia segmentis axis in rectangulum erectis forent, ellipsis abiret in circulum.

504 Defin. 2. Quum verò inæqualis sit ellipseos curvatura, ut maxima à minima inflexione discerneretur, duo axes inventi sunt, qui se ad angulos rectos invicem secantes, alter *axis major*, vel *transversus*, secundus verò et *minor* et *conjugatus* audit. Major quidem Ab (fig. 42) per centrum ellipseos transiens, ejus longitudinem metitur, conjugatus autem DE, alterum perpendiculariter ad centrum secans, latitudinem seu minimam inflexionem designat. Undè ab utroque axe in quatuor partes æquales, atque similes ellipsis dividitur.

505 Defin. 3. Diameter ellipseos est quæcumque recta ab una in alteram perimetri par-

tem per centrum ducta: undè diametri in ellipsi plures; axes verò duo tantum assignari possunt. Quod si ita diameter una super aliam cadat, ut parallelas altera alterius bifariàm dividat, diametri conjugatæ vulgò dicuntur.

506 Defin. 4. Duo sunt in ellipsis axe majore puncta, quæ focorum vice funguntur. Peculiaris eorundem proprietas est, ut ductis rectis è duobus prædictis focis ad quodlibet perimetri punctum, harum rectarum summa æqualis sit axi majori, veluti infra demonstrabitur. Hinc facilè est invenire ellipsis focos; diviso nimirum bifariàm axe majore AB (fig. 42), ductoque minore DE, atque intervallo AC, aut BC è punctis D, aut E, rectis FE, E*f* designatis; puncta F, *f* ellipseos focos indicabunt.

507 Defin. 5. Parameter in ellipsi est tertia proportionalis ad utrumque axem: undè quum duo sint axes in ellipsi, et duæ parametri in eadem invenientur. Si axem majorem in primum proportionis terminum assumpseris, tertia proportionalis erit ejusdem parameter: quod si primum terminum posueris axem conjugatum, parameter ipsi repondens est tertia proportionalis ad axes minorem et majorem.

508 Theor 1. *In ellipsi quadrata semiordinatarum sunt, ut rectangula sub segmentis axis ipsis respondentibus.* *Dem.* Sint in cono ACD (fig. 41) FH, BL circuli paralleli; EG ellipsis; MY, *my* applicatæ tam circulo, quam ellipsi comunis in triangulis EH*y*, EBY, H*y* : BY :: E*y* : EY (338): atque ob eamdem rationem in triangulis GLY, GF*y*, F*y* : LY :: G*y* : GY. In

circulis vero $my^2 : MY^2 :: Fy \times Hy : LY + BY$ (370, 486).

2. Si ducantur invicem duæ primæ proportiones, producta adhuc erunt proportionalia (207): en proportiones, et producta:

$$Hy : BY :: Ey : EY$$
$$Fy : LY :: Gy : GY$$
$$Fy \times Hy : LY \times BY :: Gy \times Ey : GY \times EY.$$

At $my^2 : My^2 :: Fy \times Hy : LY \times BY$

Ergo etiam $my^2 : MY^2 :: Gy \times Ey : GY \times EY$. (209).

Quadrata nimirum semiordinatarum, ut rectangula sub analogis axis partibus, quæ semiordinatis respondent.

509 Corol. 1. Quadratum dimidii axis minoris est ad quadratum dimidii axis majoris, ut quadratum cujuscumque semiordinatæ ad rectangulum ex abscissis analogis illi respondentibus. Nam (fig. 42) $MP^2 : DC^2 :: AP \times BP : AC \times BC$; at $AC = BC$; ergo $MP^2 : DC^2 :: AP \times BP : AC^2$; et invertendo $DC^2 : MP^2 :: AC^2 : AP \times BP$; et alternando $DC^2 : AC^2 :: MP^2 : AP \times BP$; in qua proportione continentur quadratum dimidii axis minoris, majoris, semiordinatæ, ac rectangulum abscissarum ipsi respondentium. Quum verò dimidia sint ut tota, eadam proportio erui potest inter quadrata integrorum axium: ergo $DE^2 : AB^2 :: MP^2 : AP \times BP$.

510 Corol. 2. Proportionem inventam ad formulas algebricas translaturis, esto axis major $AB = 2a$; minor $DE = 2b$: semiordinata de more $= y$; abscissa à vertice computata AP, aut $BP = x$: idcircò $AC = a$; $DC = b$; $AB - BP = 2a$

$-x$, et rectangulum $AP \times BP = 2ax - x^2$. Erit igitur $MP^2 : AP \times BP :: DC^2 : AC^2$, facta denominatione.

$$y^2 : 2ax - x^2 :: b^2 : a^2;$$

et mediis, atque extremis ductis; $a^2y^2 = 2ab^2x - b^2x^2$

et dividendo per a^2; $y^2 = \frac{2ab^2x - b^2x^2}{a^2}$

Habes æquationem ellipsis, referentem proportionem ordinatas inter atque abscissas à vertice computatas.

511 Corol. 3. Deducta ex equatione $y^2 = \frac{2ab^2x - b^2x^2}{a^2}$ proportione (202), erit $a^2 : b^2 :: 2ax - x^2 : y^2$; sivè multiplicando primos terminos per 4 : $4a^2 : 4b^2 :: 2ax - x^2 : y^2$. Atque extracta radice $2a : 2b :: \sqrt{(2ax - x^2)} : y$. Nimirum semiordinata in ellipsi est quarta proportionalis ad axem majorem, conjugatum, et semiordinatam circuli descripti in axe majore, cui etiam inscripta sit ellipsis, habeantque communes abscissas. (486) En igitur ex præsenti corollario unam ex methodis ellipsis describendæ. Esto diameter circuli axis major ellipsis: datus sit, aut eligatur ad placitum axis conjugatus, qui in circulo perpendiculariter ad axem majorem ipsum bifariam dividens, atque ab ipso pari æqualitate divisus designetur: ducantur deindè semiordinatæ ad circulum, ad quas inquiratur singillatim quarta proportionalis (349) assumptis pro tribus terminis proportionis dimidio axe majore, minore, atque semiordinata circuli; quartus terminus in qualibet analogia erit semiordinata ellipsis, præter cujus extremitatem perimeter ellipseos inflecti debet.

512 Corol. 4. Ponamus $a = b$: erit $a^2 = b^2$; factaque divisione præcedentis æquationes $y^2 = \frac{2ab^2x - b^2x^2}{b^2}$, emergit $y^2 = 2ax - x^2$, quæ est æquatio ad circulum. Undè eruere licet circulum speciem ellipseos esse, in qua axis conjugatus axi transverso æqualis est. Atque eidem axium comparationi insistendo; quò magis axis minor ad majorem accesserit; eò minor erit differentia circulum inter, atque ellipsim. Contra verò decrescente axe conjugato, prolixior ellipsis evadet, atque ab æqualitate cum circulo plus recedet.

513 Schol. Ex hac diversitate in figura elliptica, quæ à differentia minima inter ipsam, et circulum, ad confusionem ferè cum linea recta potest deduci, orta est *excentricitas* ellipseos, quæ est diferentia inter focos, et centrum ejusdem. Excentricitas littera c solet designari. Hæc autem propter rationem nuper allatam in ellipsibus valde compressis ad perimetrum maximè accedere debet; quò verò plus ad similitudinem cum circulo accesserint, excentricitatem minui necesse est.

514 Theor. 2. *Quadratum excentricitatis ellipseos, æquatur differentiæ quadratorum semiaxis majoris, et conjugati*: videlicet $c^2 = a^2 - b^2$. *Dem.* In triangulo rectangulo ECf (fig. 42) $Ef^2 = EC^2 + Cf^2$ (345); et $fC^2 = Ef^2 - EC^2$. Enimverò $Ef = BC$ (506): ergo $fC^2 = BC^2 - EC^2$: nimirum $c^2 = a - b^2$

515 Corol. 1. Excentricitas, sivè differentia foci à centro est media proportionalis inter semiaxium summam, eorumque differentiam. Nam si ducatur $(a+b)$ $(a-b)$, productum est a^2-b^2, et quum $c^2=a^2-b^2$ erit $c=(a+b)$ $(a-b)$; et deducta proportione, $a+b : c :: c : a-b$ (202).

516 Corol. 2. Axis minor est media proportionalis inter segmenta axis majoris in alterutro foco secti; sivè inter alterutrius foci distantiam ab utroque vertice. Est enim $c=a^2-b^2$: ergo $a^2=b^2+c^2$; et $b^2=a^2-c^2=(a+c)$ $(a-c)$. Deducta igitur proportione (202), $a+c : b :: b : a-c$. Enimverò $a+c=AC+Cf=Af$ (fig. 42); et $b=EC$; atque $a-c=Bf$; ergo $Af : EC :: EC : Bf$; segmenta videlicet axeos in foco sunt extrema proportionis, axis minor utrumque medium.

517 Teor. 3. *Ordinata* MfmC (fig. 42) *per focos ellipsis transiens, æquatur ipsius parametro. Dem.* $Mf : EC^2 :: Af\times Bf : AC\times BC$ (508): at $Af\times Bf=EC^2$ (516); ergo $Mf^2 : EC^2 :: EC^2 : AC\times BC$. Rursus $AC=BC$: igitur $Mf^2 : EC^2 :: EC^2 : AC^2$; et permutando extrema $AC^2 : EC^2 :: EC^2 : Mf^2$; et multiplicando per 4; $4AC^2 : 4EC^2 :: 4EC^2 : 4Mf^2$. Ad demum extrahendo radicem $2AC : 2EC :: 2EC : 2Mf$, sivè Mfm; ordinata scilicet per focos transiens tertia proportionalis ad axem majorem et minorem, quæ est parametri definitio (507).

518 Corol. 1. Ex dictis facilè est, datis axibus, invenire parametrum. Nam instituta proportione axis majoris et minoris, tertia propor-

tionalis erit parameter axis majoris: nimirum $2a : 2b :: 2b : p$, littera p designante parametrum; sivè divisa per 2 prima ratione, adhuc erit, $a : b :: 2b : p$; ac $p=\frac{2b^2}{a}$.

519 Corol. 2. Quum axes in ellipsi constantes sint, nec augmentum, aut decrementum patiantur, uti abscissæ, atque oidinatæ, parameter etiam quantitas constans erit in ellipsi.

520 Schol. Abscissæ in ellipsi posunt etiam à centro computari. Esto CP (fig. 42) abscissa ab centro computata, quam assumis cum reliquis ellipsis lineis comparandam; erit $AP=a-x$, $BP=a+x$; $AP\times BP$ $(a-x)$ $(a+x)$: et multip. ac reductione facta a^2-x^2. Quamobrem superius (510) inventa proportio $MP^2 : AP\times BP :: DC^2 : AC^2$ in hanc abibit:

$$y^2 : a^2-x^2 :: b^2 : a^2;$$

ductisque extremis et mediis, $a^2\ y^2=a^2\ b^2 - b^2\ x^2$

et transp. $y^2=\frac{a^2\ b^2 - b^2\ x^2}{a^2}$

En alteram æquationem inter semiordinatas atque abscissas à centro computatas.

521 Probl. 1. *Ellipsim motu continuo describere.* Solut. Esto datus, vel ad libitum assumptus axis AB (fig. 42), in quo foci F, f, sivè dati, sivè delecti sint: filium longitudinis AB in duobus punctis F, f, ab extremitatibus ritè affigatur, ut possit stilo probè tenso utrinquè circumduci; linea sivè perimeter ADEB sic descripta erit ellipsis. *Dem.* Si ostendero in curva

modò designata æquationem ad ellipsim inveniri, extra dubium erit ellipsim descriptam fuisse: quod sic præstabo. 1. Positio fili tensi curvam describentis in quocumque puncto designetur, ex gr. FM, Mf? quum verò filum sit æquale AB, erit FM+Mf=$2a$; differentia autem inter FM, et Mf dicatur $2d$; adeòque F M$=\frac{2a-2d}{2}=a-d$; et M$f=\frac{2a+2d}{2}=a+d$ (110). Ducatur semiordinata MP$=y$, dividens FMf in duo triangula rectangula FMP, MPf recta Pf=PC+Cf erit$=c+x$; et FP$=c-x$ (515, 520.)

2. In triangulis prædictis Mf^2=MP^2+fP^2= MP^2+(PC+Cf)^2: et FM^2=MP^2+FP^2= MP^2+(FC—CP)^2 (345). Valoribus algebricis linearibus substitutis, erunt

M$f^2=a^2+2ad+d^2$=MP^2+(PC+Cf)$^2=y^2+c^2+2cx+x^2$

FM$^2=a^2-2ad+d^2$=MP^2+(FC—CP)$^2=y^2+c^2-2cx+x^2$

Subtracta utrinquè inferiore ab superiore æquatione, factaque reductione; quas operationes brevitatis gratia sedulitati studiosi perficiendas committimus;

deducitur $4ad=4cx$; et $d=\frac{cx}{a}$ et $d^2=\frac{c^2x^2}{a^2}$.

Substituatur hic valor in prima æquatione; emerget $a^2+2a\frac{cx}{a}+\frac{c^2x^2}{a^2}=y^2+c^2+2cx+x^2$ (104).

sive deleto a; $a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx=y^2+c^2+2cx+x^2$;

et delendo utrinque $2cx$; $a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}=y^2+c^2+x^2$(104, 2):

ac tollendo fraction. $a^4+c^2x^2=a^2y^2+a^2c^2+a^2x^2$(104, 3):

et transp. $a^2y^2=a^4+c^2x^2-a^2c^2-a^2x^2$

et divid. utrinquè per a^2-c^2; $\frac{a^2y^2}{a^2-c^2}=a^2-x^2$ (ibid. 4.)

Rursus $a^2-c^2=b^2=$EC^2 (516): adeòque si substituatur $b^2=a^2-c^2$, erit $\frac{a^2y^2}{b^2}=a^2-x^2$:

exterminata fract. $a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$.

Demum transp. $y^2=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a}$

Habes æquationem ad ellipsim superiùs traditam in curva modò circumducta.

522 Corol. Summa rectarum ductarum à duobus focis ad idem perimetri punctum æqualis est axi majori: adeòque tam FM+Mf, quam FE+Ef, aut quæcumque aliæ similiter ducendæ, æquales erunt AB. Et vicissim si summa prædictarum linearum æqualis est axi majori, punctum concursus erit in perimetro.

523 Prob. 2. *Ad ellipsim tangentem ducere.* Solut. Esto punctum M, ad quod ducenda sit tangens: producatur fM ultra M in S, donec sit MS=MF, et ducta FS, bifariàm dividatur; punctum bisectionis, et M directionem dabit lineæ TMr, quæ erit tangens ellipsis ad punctum M. *Dem.* Quoniam omnia latera homologa triangulorum FMT, SMT æqualia sunt cons-

tructa, erunt æqualia (332): ergo et rectangula ad T (294): quapropter omnia puncta T*r* æquè distant utrinque à S, F. Ducatur S*r*=F*r*; latera S*r*, *fr*, in triangulo S*fr* majora sunt quam S*f* (272): at *f*S=M*f*+MF=AB (522): ac demum *fr*+S*r*, sive æquale F*r* majora sunt *f*S=FM+M*f*=AB: ergo punctum *r* extra ellipsim est (521, 522). Omnia igitur puncta lineæ T*r* extra ellipsim sunt, præter assignatum M, in quo ellipsim tangit.

524 Corol. Recta FM, ab uno ex focis ad punctum contactus M ducta, facit angulum FMT=*f*M*r*, quem altera recta, ab respondente foco ducta ad idem M, punctum contactus format cum eadem tangente T*r*. Nam ex praxi superius assignata ad tangentem cuilibet puncto (M) ducendam SMT=FMT: at *f*M*r* est ad verticem oppositus SMT=FMT: ergo et *f*M*r* æqualis erit (290).

CAPUT QUARTUM.

Hyperbola.

525 Defin. 1. Quum hyperbola sit *sectio coni plano axi parallelo, aut alia directione, quæ alterutri laterum parallela non sit, ac basim intra conum secet* (484); concipiamus conos duos verticibus oppositos CBV, EDV (fig. 43) ita ut recta AVF communis axis utriusque sit. Enimverò si planum GL directione ad hyperbolam composita latus utrumque conorum se-

cuerit, evidens est duas hyperbolas utrinquè factum iri; quæ hyperbolæ conjugatæ apud geometras audiunt.

526 Defin. 2. Axis hyperbolæ extra curvam sumitur; estque illa distantia, quæ inter ejusdem, atque alterius conjugatæ verticem intercedit MN axis hyperbolæ GM erit; alterius vero LN idem intervallum ab N in M sumptum: atque hic quidem primus axis dicitur. Secundus autem est linea VO alteri perpendicularis, ipsum bifariàm dividens, atque itidem ab eodem bisectus. Ordinatæ perindè atque in aliis curvis computantur: abscissæ etiam sunt partes interceptæ inter verticem et analogam ordinatam. Et hæc quidem intra curvam: alias verò abscissas et ordinatas infra dabimus.

527 Defin. 3. Si triangulum EVD, in quod conum derivetur directione à vertice ad basem perpendicularis bisectum, ita constituatur, ut hyperbolam MG intra crura intercipiat, ambo sub eodem plano respondentia; latera duo trianguli VE, VD, hyperbolæ asymptoti dicuntur.

528 Corol. Quum ED sit basis trianguli EVD, cujus latera sunt asymptoti hyperbolæ; atque etiam diameter sit circuli EFD; major erit quam chorda *ab*, quæ basim, ut ita dicam, hyperbolæ metitur (280). Concipiamus conum in infinitum produci: proculdubiò asymptoti, atque hyperbola continenti proportione crescent, manente tamen eadem ratione inter diametrum ED, et chordam *ab*. Intervallum nimirum asymptotorum ED pari casu

crescet, quo chorda *ab* distendetur: ergo semper invicem accedent, quin unquam coincidant; quod asymptotis nomen præbuit; perindè quasi non *coincidentes* dicerentur. Hinc ortum est theorema paradoxo simile; quod nimirum hyperbolæ crura semper propiùs ad asymptotos accedunt, quin unquam possint cum iisdem concurrere.

529 Defin. 4. Ordinatæ, atque abscissæ hyperbolæ in asymptotis pariter sumi possunt. Sumpto AB, AE (fig. 44) asymptoti descriptæ, aut describendæ hyperbolæ: in his sumantur AD, AF æquales, compleaturque parallelogrammum ADVF: deindè in asymptotis accipiantur ad libitum partes, uti AC, AE, AG, AB ea lege, ut latus AD=DV parallelogrammi sit semper media proportionalis inter partem in asymptoto abcissam, atque aliam parallelam alteri asymptoto ducendam: ex gr.

AC : DV :: DV : CL
AG : FV :: FV : GK
AE : DV :: DV : EN etc.

linea per puncta NLVKM transiens, erit hyperbola: ejus abscissæ in asymptotis, erunt AD, AC, AG etc.: ordinatæ autem EN, CL, GK etc.

530 Corol. 1. Esto abscissa de more $=x$, ordinata$=y$, latus DV aut FV vocetur d; quum sit $x : d :: d : y$; erit $xy=d^2$; ergo quæcumque demum sit abscissa in asymptoto capta, semper rectangulum ex ipsa in respondentem ordinatam, æquale erit quadrato DV, aut FV, sive

parallelogramo ADVF eidem æquali (354).

531 Corol. 2. Comparando abscissas abscissis, atque ordinatas ordinatis, esto AC, aut AG$=x$; CL, aut GK$=y$; AE$=$X; EN$=$Y; quum sit $xy=d^2$; $XY=d^2$; erit $XY=xy$; et $X : x :: y : Y$ (202). Nempè abscissæ sunt in ratione inversa, aut reciproca ordinatarum, et vice versa.

532 Corol. 3. Considerando rectam AD veluti abscissam in asymptoto AE, erit AD: DV :: DV : y. Verum AD=AF (530): et quum AD, VF sint parallelæ, AF=DV (351): ergo etiam y æqualis AD: sivè ordinata huic abscissæ respondens, est ipsum potentiæ latus AD: atque idcircò punctum V est in hyperbola. Sumendo aliam abcissam AF huic æqualem in asymptoto AB, eadem methodo demonstratur, ordinatam illi respondentem fore ipsum latus potentiæ AF: ergo crura hyperbolæ in puncto V concurrere debent; ipsumque est vertex prædictæ curvæ, è quo ejusdem crura divergere incipiunt.

533 Corol. 4. Quoniam reliquæ ordinatæ oK, pM ulterioribus abscissis Ao, Ap respondentibus supra verticem V in asymptoto AE æquales sunt respondentibus abscissis alteriu- asymptoti AB (354): eadem proportio, quæ inter abscissas, latus constans hyperbolæ, atque ordinatas illic invenitur; hic etiam ordine permutato reperietur: nempè quæ hic ordinata illic abscissa, et vice versa vocabitur. Est igitur Ao : DV :: DV : oK, sivè $x : d :: d : y$: ac rursus Ap : DV :: DV : pM; seu X : d :: d : Y, et

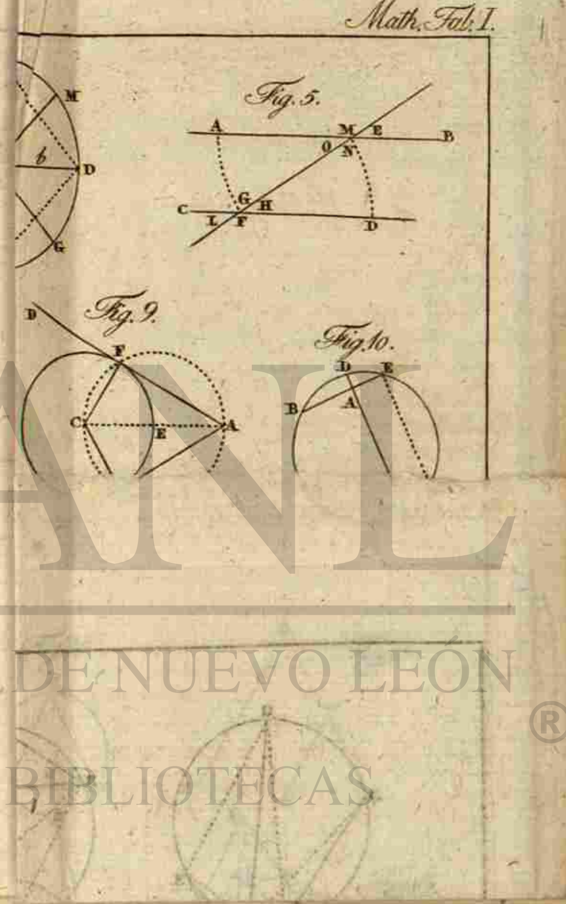
$xy = XY$; deductaque proportione $x : X :: Y : y$. En iterum inversam rationem inter abscissas, atque ordinatas supra verticem positas.

534 Corol. 5. Ordinatæ asymptoti AE perpetuò decrescunt, recedendo à vertice V versus E: nam crescentibus abscissis, eodem medio remanente, opus est ordinatas decrescere, ut constans sit proportio assignata num. 530. Quum verò datis duabus lineis, tertia proportionalis semper reperiri queat (344); evidenter deducitur, asymptotorum latera, atque hyperbolæ crura continenter accedere, quin umquam ad contactum deveniant. Habes alteram demonstrationem theor. num. 528 indicati.

535 Corol. 6. Contra atque de ordinatis infra verticem ostensum est, evenit in aliis ordinatis supra verticem sumptis: hæ videlicet jugiter increscunt juxta majorem accessum à D versus A, ea lege ut nulla ordinata assignanda sit; cujuscumque demum magnitudinis supponatur, qua major inveniri non possit. Etenim crura hyperbolæ ad contactum asymptotorum devenire non valent (528, 534): poterit igitur inter utrumque duci linea finitè in infinitum, uti vulgò ajunt, quin assinari possit punctum *non plus ultra* ordinatis definiens: sivè è quo duci non possit aliqua ordinata. Hoc item est alterum paradoxo simile in hyperbola. Quod in uno latere ostendimus, dictum habe de altero hyperbolæ crure cum sibi respondente asymptoto: in qua adamussim comprobantur omnia, quæ ad unum tantum latus demonstravimus. In adducta verò hyperbola asymptoti angulum rectum formando, rectum pariter faciunt angulum cum sibi respondentibus ordinatis; atque adeò perpendiculares ipsis sunt. Manifestum autem est, quemcumque angulum in asymptotis supposueris, eumdem et in ordinatis ad asymptotos comparatas repertum iri: quum ordinatæ unius asymptoti, alteri asymptoto sint parallelæ (299).

536 Schol. Hyperbola hactenus descripta, quæ et apolloniana audit, est curva secundi gradus, quippè æquationem $xy = d^2$ tantum continens. Quod si alteram hyperbolam descripseris, in qua $x^2 : d^2 :: d : y$, hæc erit tertii gradus; quoniam $x^2y = d^3$, sive tertiam potentiam includens. Exemplo tamen clariss. auctorum, qui philosophicas institutiones tradiderunt, à prolixiori curvarum investigatione libenter supersedemus; quum hactenus tradita, satis superque sint ad ea, quæ in physicis exponentur, dilucidanda.

INDEX CAPITUM.



Math. Tab. I.
Fig. 5.
Fig. 9.
Fig. 10.

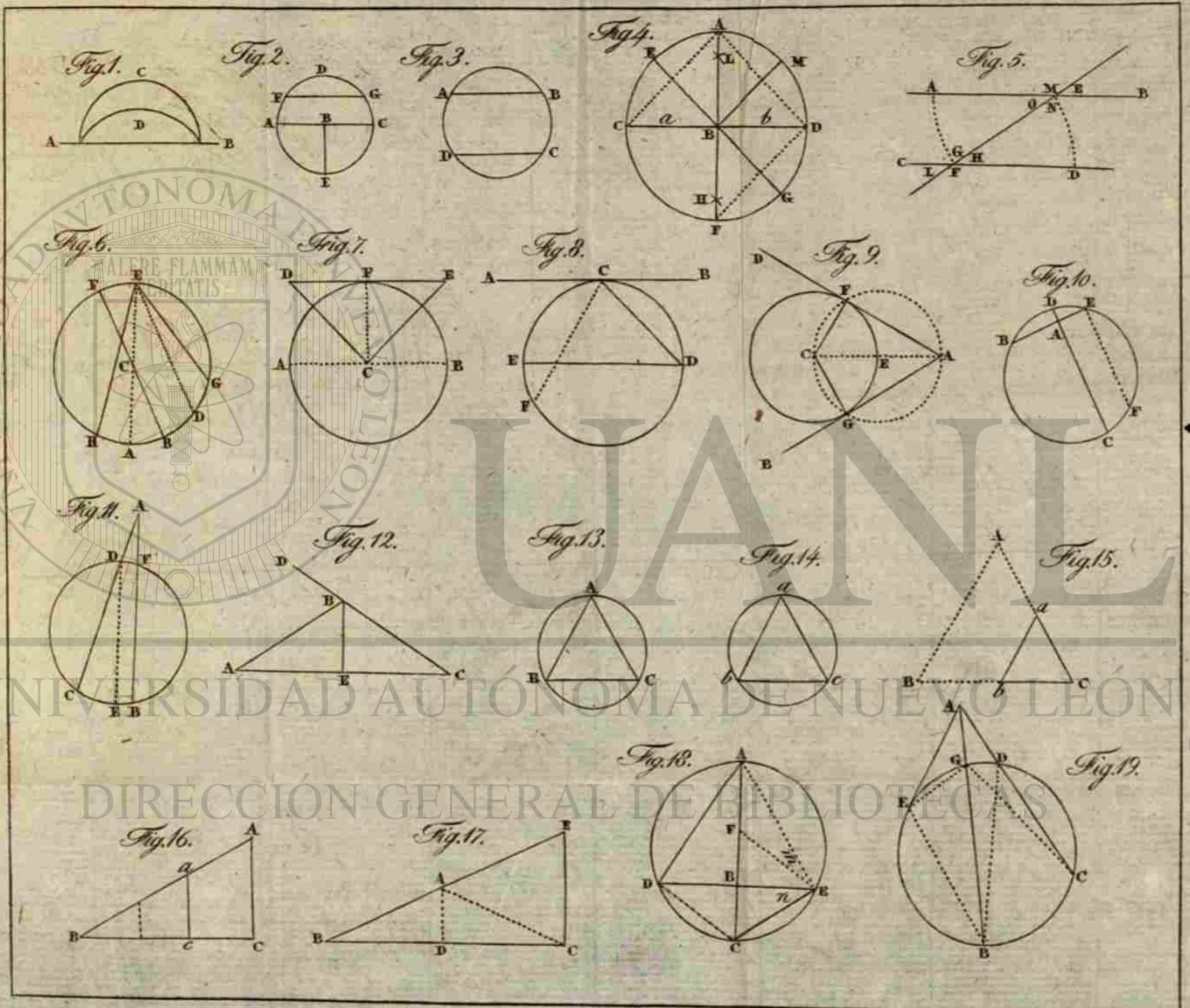


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.

Fig. 20.

Fig 20

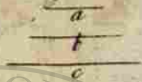


Fig. 21.

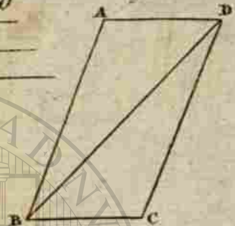


Fig. 22.

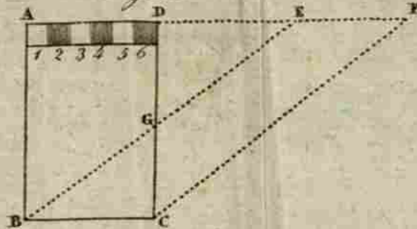


Fig. 23.

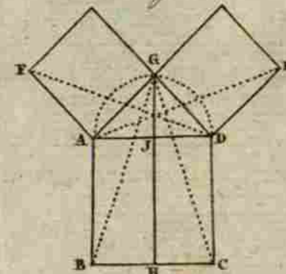


Fig. 24

Fig. 25.

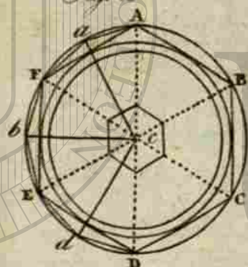


Fig. 26.

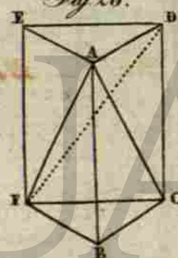


Fig. 27.

Fig. 28

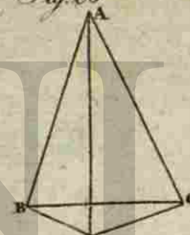


Fig. 29.

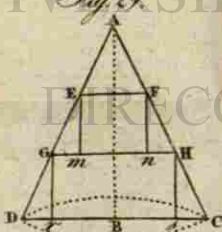


Fig. 30.

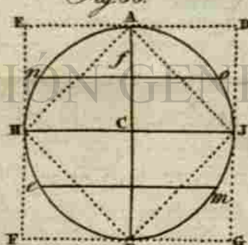


Fig. 31.

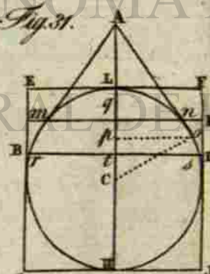


Fig. 32.

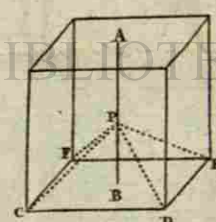
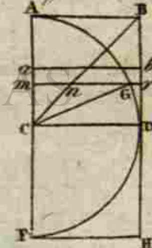


Fig. 33.



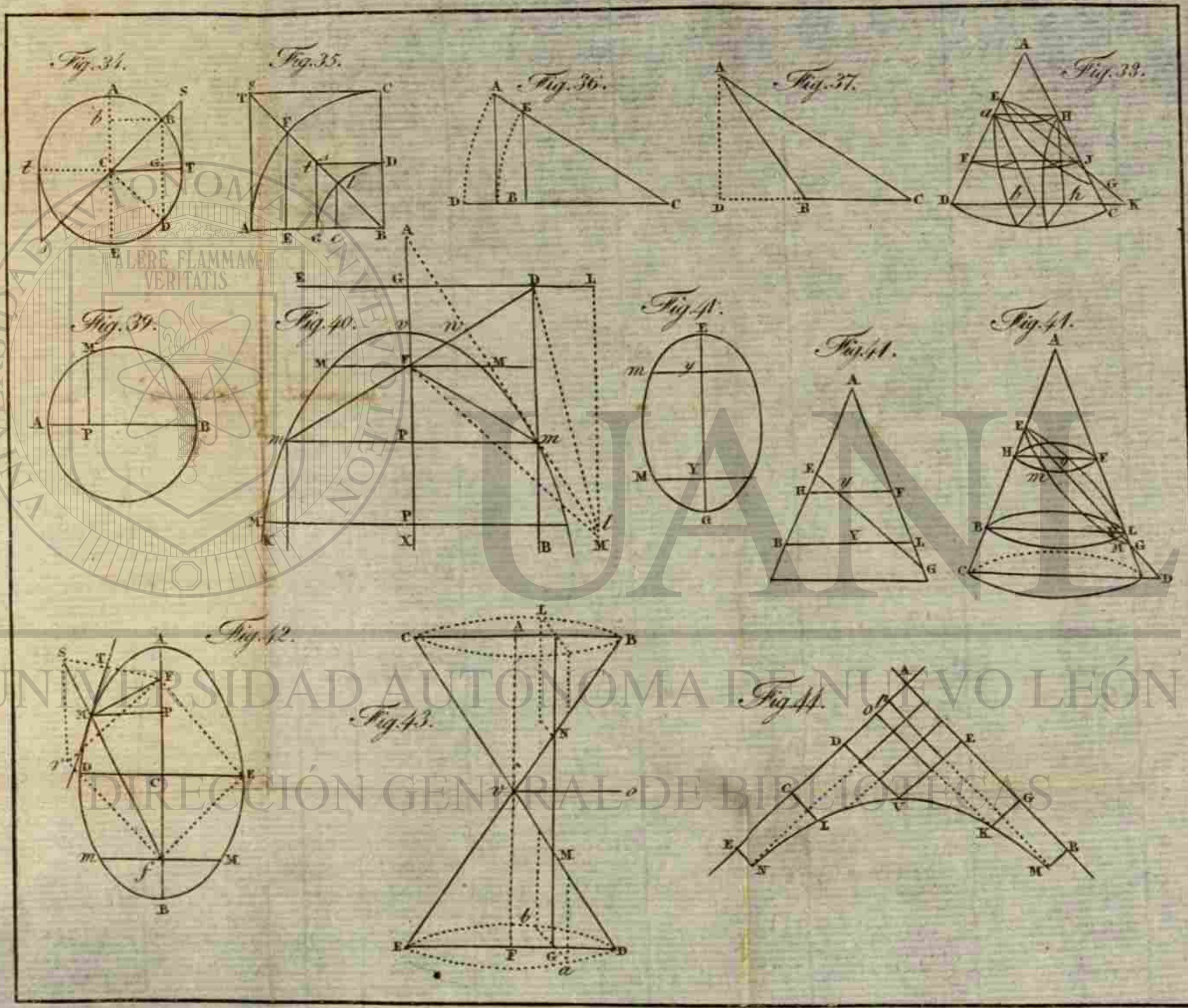


Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 48.
Fig. 41.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.