TRACTATUS II.

ARITHMETICA SPECIOSA, SIVE LITTERALIS, ALGEBRA VULGO NUNCUPATA.

CAPUT PRIMUM.

Notiones prævia.

73 Defin. 1. *Algebra* est scientia quantitatis signis litteralibus expressa, quorum significatio à signis non determinatur. Jam usus obtinuit quantitates notas primis alphabeti litteris, ignotas postremis designare.

Annotatio historica. Diophantes primis æræ christianæ sæculis plurima ad analysim pertinentia in suis quæstionibus arithmeticis usurpavit. Non leve hoc fundamentum est apud Græcos: Diophantis ætate, jam notam fuisse *algebram*, à quibus Arabes hanc scientiam postea exceperint. Nonnullis tamen placet Arabes hujus inventionis auctores facere, antequam Græcis innotesceret. Quod verò apud omnes convenit, est Arabes, notis vulgaribus ab ipsis inventis, sivè ab Indis mutuatis, quod aliis placet, in calculo usos fuisse. Franciscus Vieta, Gallus, anno 1590, primus alphabeti litteras ad quantitates exprimendas invexit; eo successu,

ut ferè jam nullus ad Mathesim tractandam accedat, qui Vietæ vestigiis non insistat. Quibus verò hujusmodi ars Ægyptianis hieroglyphicis intricatior videtur, hi pari jure musicas notas inter Isidis, et Osiridis arcana collocent, necesse est. Sanè benè perceptis algebræ fundamentis, reliqua non majorem difficultatem habent, quam si arabicis notis pertractarentur. Quare præcipua nobis cura erit prænotiones algebricas, quam dilucidè explanare, ut tironum mens ideas, ac distinctas concipiat, quibus, veluti face prælucente, tuto pede ad penitiora analysis arcana ingrediatur.

74 Defin. 2. *Terminus algebricus* est una, aut plures litteræ collectæ, sine ullo signo + aut — conjunctæ. Ex. g. a, b, ab, abc. *Termini positivi* sunt, quos præcedit signum +. Negativi, quos signum subtractionis — antecedit. Quum verò nullo signo afficiuntur, intelligitur habere signum positivum, ut plerumque initio fit. *Termini similes* dicuntur, qui iisdem litteris designantur: ut $ab + 2ab + abc$, primi termini sunt similes, tertius dissimilis.

75 Schol. *Quantitates oppositæ*, positivæ scilicet, et negativæ, sunt quantitates homogeneæ, quæ ita sibi opponuntur, ut una minuat alteram. Fac ex. g. te versus orientem centum passus fecisse, deindè verò, quoniam iter agere debuisses in occidentem partem, retrò per eamdem viam 50 passus facere. Certum est, te 150 passus emensum, summa tamen itineris erit $100-50=50$. Quantitas motus positiva est: itineris tamen facti summa, partim positiva, par-

tim negativa. Hoc exemplo, autumo, terriculamentum quantitatis positivæ, et negativæ evanescet.

76 Defin. 3. *Terminus incomplexus*, sive *monomius* est cuantitas solitaria, nulli alteri signo + aut — conjuncta; ex. g. a, ab, abc. *Complexus* sive *polynomius* est quantitas pluribus terminis constans, signis interpositis: ut $ab+abc-bc$. *Binomia* dici solet quum duobus terminis constat; *trinomia*, *quadrinomia etc.* à numero terminorum componentium integram summam.

77 Nonnumquam in polynomiis post terminum positivum occurrunt plures negativi. Cave intelligas secundum negativum minuere primum: ex. g. $20-5-3$ non denotat quantitatem 20 minuendam esse $5-3$, attamen 8 à 20 auferri debere. Pariter $20-5+3$ indicat non tota quantitate 5, sed solum 2 minuendam esse: quare $20-5-3=12$: at $20-5+3=18$. Præsens canon claritatis gratia in numeris propositus ad quantitates litterales est transferendus. Nam $a-b-c-d$ idem valet atque a minuta quantitatibus b, c, d. Pariter $a+b-c+d$ tantum minuitur quantitate c: augetur autem b et d.

78 Defin. 4. Numerus, qui litteris præfigitur earumdem *coefficiens* dicitur. Hinc autem indicat quoties ea quantitas sumenda est: ex. g. $3a+2ab-6bc$: denotat primam ter, secundam bis sumendas esse; minuendas tamen sexies quantitate bc.

79 Defin. 5. Numerus supernè litteris ad-

scriptus dicitur *exponens*. Denotat autem quantitatem multiplicatam per se ipsam bis, ter, quater etc. Sic a^2 indicat a per se ipsam esse multiplicandam, sive productum $a\times a=aa$, sivè a^2: similiter b^3 significat $b\times b\times b=bbb$, sivè b^3. Animadvertendum tamen, non idem esse $3b$, atque b^3. Nam primum equivalet additioni, secundum multiplicationi: $3b=b+b+b$. Quando verò scribitur b^3 indicat productum $b\times b\times b$. Fac $b=3$; erit $3b=9$; in altero autem casu $b^3=27$. Nam $3+3+3=9$; $3\times3\times3=9\times3=27$. Quando autem nullo exponente litteræ scribuntur, earum exponens est unitas ut in coefficientibus $a^1=a$.

Sæpè inveniens scriptas quantitates parenthesi inclusas, aut linea supernè ducta notatas: ex. g. $(a+b-c)$ $(a+b)$, aut $\overline{a+b-c}\times\overline{a+b}$: intellige notam primam quantitatem per secundam multiplicandam esse. His benè perceptis, reliqua planiora evadent.

CAPUT SECUNDUM.

Operationes Arithmeticæ in litteris.

§. I.

Additio, et Subductio.

80 Probl. 1. *Quantitates litterales addere.* Solut. Hoc fit quantitatum, sive terminorum conjunctione: ex. g. ut addas terminos, a, ab, bc, scribe $a+ab+bc$. Male autem scriberes

$aabbc$, aut $aab+bc$. Jam enim monimus in his quantitatibus nullo signo conjunctis productum contineri, non summam. Demonstratio eadem est atque in numeris.

81 Schol. Si quantitates similes coefficientes habeant, eorum summa colligitur, atque in unum terminum coalescunt: ut $2a+3a=5a$; compendii enim causa sic reducuntur. Pariter $-ab-3ab=-4ab$.

82 Probl. 2. *Quantitates litterales subducere.* Solut. Ut quantitates algebricas subducas, satis est in quantitate subtrahenda mutare signa in opposita, ipsam jungendo cum minuenda: ex. g. sit ab subducenda ex bc: etit $bc-ab$. *Dem.* Quantitas à quantitate subducitur, quum à minuendo ea detrahitur: hoc autem fit in mutatione signorum subducendi; nam quantitas, quæ erat positiva, ipsi adscribitur ut negativa, aut contra; quare quantitas positiva subducetur, si sumatur negativè; negativa verò, eam convertendo in positivam. Quod si termini subducendi coalescant ex positivis, et negativis, ut si minuendus sit $a+b$, et subducendus $c-d$, residuum erit $a+b-c+d$. Nam à quantitate $a+b$ non tollitur totum c, sed tantum pars, quæ non sit d: undè in residuo manere debet pars d. Exemplum in numeris.

Min.	$1+0-1-2-3$
Subt.	$1+1+1+1+1$
Res.	$0-1-2-3-4$

In minuendo una est quantitas positiva, sex negativæ, nimirum quinque negativæ, quum

positiva à negativa absorbeatur. Ab his quinque negativis quinque aliæ positivæ detrahi debent; quod fieri non potest, nisi augendo totidem negativis summam residui. In hac igitur decem negativæ inveniri debent, ut vides.

83 Corol. 1. Quando occurrunt termini similes in minuendo, et subducendo, delentur: ex. g. $a-a$, $ab-ab$; planum est, hujusmodi quantitates in summa esse superfluas. Quapropter operatione peracta, fit reductio terminorum, delendo, qui se invicem conficiunt; quod ad omnes algebricas operationes extendendum est. Ex. g. $a-2a+4a-bc+2bc$, facta reductione scribitur: $3a+bc$.

84 Corol. 2. Coefficientes in substractione algebrica tractantur, ut in numeris arabicis: ex. g. sit $6a$ in minuendo, et in subtrahendo $4a$: scribe differentiam coefficientium$=2a$.

§. II.

Multiplicatio.

85 Probl. *Quantitates terminis algebricis expressas multiplicare.* Solut. Praxis eadem est ac in numeris. Quælibet quantitas multiplicatoris per omnes multiplicandi terminos multiplicatur, ac productum scribitur, postea in summam redigendum. Sic a multiplicandum per b dat productum ab: ita enim productum algebricum scribitur; multiplicatum per bc dat productum abc etc. Unica occurrit differentia in signis: nam positiva dant productum positivum; negativum, et positivum dant negati-

vum: negativa autem dant positivum.
Exempl. Mult. $3a+ab+bc-b$
Multiplicator. $2a-b$

$$\begin{array}{l} 6aa+2aab+2abc-2ab \\ -3ab-abb-bbc+bb \end{array}$$

Productum
facta reductione $6aa+2aab-5ab-abb+2abc-bbc+bb$.

Dem. Eadem est ac in numeris, quatenus producta factorum respicit. Difficultas maxima, quæ crux tironum dici potest ocurrit in signis. Et 1. quod plus in plus det productum $+$, nihil negotii facessit. 2. Quod autem plus in minus ductum, det productum$-$, sic ostenditur. Quantitatem positivam per negativam multiplicare, est eam toties sumere, sivè addere, quot indicat altera; altera autem indicat subtrahendam, quum$-$signum sit subductionis: quare productum debet esse negativum; nam additio negativa est vera subtractio. Productum igitur debet esse negativum.

3. Caput difficultatis indè emergit, quod $-\times-=+$. Memini plus centies auditoribus demonstrasse hanc veritatem, quin demonstrationibus acquiescerent, aut quod idem est, eas dilucidè perciperent. Nonnunquam fulgore veritatis repente illustrati, cedebant; postea verò ad ingenium redibant, novis difficultatibus obtenebrati. Quamobrem, qua potero, maxima perspicuitate, ac brevitate me expediam. Quantitatem negativam per negativam multiplicare,

est eam toties sumere, sivè addere, quoties indicat altera: altera autem indicat snbtrahendam, quum signum$-$sit subductionis: quarè productum debet esse positivum; nam quantitas negativa subducitur, eam convertendo in positivam: quantitatem igitur negativam per negativam multiplicare, est illam positivè ponere, aut sumere. Ergo$-\times-=+$. Vide dicta art. 82.

86 Schol. 1. Si quantitates affectæ sint coefficientibus, hi ducantur inter se, ac productum pro novo coefficiente scribatur in producto: ut in exemplo $3a\times 2a=6a$.

87 Schol. 2. Si autem exponentes occurrant in litteris similibus, sumatur utriusque exponentis summa, eaque scribatur in producto: sic $a^2\times a^3=a^5$. Productum enim $aa\times aaa=aaaaa$ (79).

§. III.

Divisio.

88 Lemma. *In partitione algebrica in dividendo delentur litteræ communes dividendo ac divisori; seu quæ utrobique reperiuntur: residuæ sunt quotus.* Sit.

$\frac{ab}{b}$; hoc est ab dividendus, b divisor: quotus erit a.

Dem. Si factum dividitur per factorem unum, quotus est alter factor (25): at in partione algebrica litteræ sunt factores, ex quibus emergit productum; diviso igitur facto per quaslibet ex litteris, quotus erit altera pars permaniens, deletis utrobique communibus. Fac a esse $=5$, b autem $=10$, erit ab, scilicet productum $a \times b=50$. Divide $\frac{50}{10}=5$.

Ergo $\frac{ab}{b}=a=5$.

89 Probl. 1. *Quantitates incomplexas dividere per incomplexas.* Solut. Deleantur litteræ communes; reliquæ erunt quotus (per præc.) Coefficientes autem, si qui sunt, et dividi possunt, tractentur ut in divisione numerorum. Signa mutantur ut in multiplicatione; similia dant quotum positivum, diversa negativum. Ex. g. $\frac{8abc}{2bc}=4a$. Pariter $\frac{-bdb}{3d}=-2b$: et $\frac{-4abc}{-2ac}+2b$. *Dem.* Divisor ductus in quotum restituit dividendum: ducatur $2bc \times 4a=8abc$: similiter $3d \times -2b=-6bd$ demum $-2ac \times +2b=4abc$.

90 Probl. 2. *Quantitates litterales complexas dividere.* Solut. Eodem modo tractantur litteræ ut in probl. præc. Divisio autem procedet ut in numeris, incipiendo à primo membro, quotum extrahendo, multiplicando per divisorem, subducendo: residuum iterum tractando, donec nullum supersit operationi subjiciendum.

Exempl. Divid. $aa-ac+ab-bc$ (Quotus $a-c$
Divisor. $a+b$
Prod. quoti a in div. $aa+ab$

Alterum mem. $-ac-bc$
Divisor $a+b$
Prod. quoti c in div. $-ac-bc$

0

91 Schol. 1. Quemadmodum in multiplicatione exponentes adduntur, ita in divisione debent subtrahi, et residuum præbet exponentem quoti. Sic $\frac{a^4}{a^2}=a^2$. Idem enim exprimit, ac $\frac{aaaa}{aa}=aa=a^2$

92 Schol. 2. Quod si æquales sint exponentes, evanescunt, et valor quantitatis æqualis fit unitati. Sic $\frac{a^2}{a^2}=a^{2-2}=a^0=1$. Fac $a=10$: erit aa sive $a^2=100$. Jam si $\frac{100}{100}=1$: valor igitur hujus quoti $\frac{a^2}{a^2}=a^0=1$.

93 Schol. 3. Si autem contigerit, exponentem divisoris majorem esse altero dividendi, exponens quoti erit negativus: $\frac{a^2}{a^4}=a^{-2}$. Nam $2-4=-2$. Quantitas verò exponente negativo affecta, veluti a^{-2}, valorem habet æqualem fractioni cujus numerator est unitas, denominator vero ipse exponens sino positivo affectus. Unde valor $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$. Nam valor $a^{-2}=a^{2-2}=a^0=1$. Jam si $\frac{a^0}{a^2}=\frac{1}{a^2}$.

§. IV.

Fractiones litteris expressæ.

94 Defin. Fractio litteris expressa est quantitas à numeratore indicata, dividenda per de-

nominatorem. Undè quum divisio unius quantitatis per aliam prodere non potest, tunc ad modum fractionis scribitur. Ita $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem a dividendam per b, cujus quotus indicari non potest his litteris. Hoc pariter notavimus in fractionibus vulgaribus, à quibus desumendæ sunt regulæ pro fractionibus algebricis.

95 Probl. 1. *Fractiones algebricas ad eumdem denominatorem revocare.* Solut. Multiplicentur tam numerator quam denominator cujusvis fractionis per productum denominatorum aliarum fractionum; nova producta erunt fractio quæsita (54). Sint $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ad eumdem denominatorem reducendæ; erunt $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$ novæ fractiones ejusdem denominatoris, et valoris ac primæ.

96 Probl. 2. *Fractiones algebricas addere, aut subducere.* Solut. Ad eumdem denominatorem (per præc.) quum reduxeris, unam alteri signo additionis conjunge, si addendæ sint; aut subductionis, si subtrahendæ; subscripto communi denominatore. Sic in primo exemplo $\frac{ad+bc}{bd}$ erit additio: $\frac{ad-bc}{bd}$ erit subtractio.

97 Probl. 3. *Fractiones algebricas multiplicare.* Solut. Ducantur invicem numeratores, et denominatores, producta dabunt fractionem quæsitam: sic $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

98 Probl. 4. *Fractiones algebricas dividere.* Solut. Ducatur numerator dividendi in denominatorem divisoris; tum denominator in numeratorem. Primum productum erit numerator quoti; alterum denominator. *Dem.* Multiplicetur enim nova, quæ sic prodit, fractio per divisorem: clarum est proditurum esse dividendum: hoc ipsum in fractionibus vulgaribus supra art. 61 ostensum abundè manet.

CAPUT III.

Æquationes primi gradus.

§. I.

Prænotiones.

99 Limina jam analysis attigimus quam humani ingenii apicem jure meritò apellat Wolfius. Ea sanè est analysis mira inventio, ut vix quidquam ab humano intellecto felicius, utilius, atque elegantius excogitandum umquam concepi possit. Duplici methodo veritas aliqua inveniri potest, compositionis scilicet, et resolutionis: primam synthesim, secundam analysim appellant. Utriusque frequens usus in mathesi: nam in geometria elementari synthesim, analysim in sublimiori passim adhibemus. Quum ab una veritate cognita ad aliam gradum facimus, quasi à fundamentis ædificantes, synthesi utimur: dum verò quantitatem resolvimus, veluti partes segregando, analytica methodus dicitur, in qua ope æquationis veritas invenitur.

100 Defin. *Æquatio* est duplex ejusdem quantitatis expressio, quarum una alteri substituitur, ad detegendam quantitatem incognitam, sub alia expresione latentem. Hinc membra æquationis dicuntur expressiones signo æqualitatis conjunctæ: sic $8=6+2$, sunt membra hujusce æquationis: sinistri autem termini primum, dextri verò secundum æquationis membrum dicuntur.

101 Schol. 1. Ariadnes filo ad resolvenda problemata opus est; ne veluti in labyrintho Cretico errantes, nullum finem resolutioni imponamus. Hujusmodi fila sunt conditiones aliquæ, nexum cum quantitate incognita habentes. Hæ conditiones numeris, litteris, et signis exprimuntur; quibus positis, problematis *denominatio* fieri dicitur. Indè ex conditionibus, quippè inter ipsas, et incognitas, connexio intercedat, necesse est; veritas, sivè *æquatio* eruitur, expressionum permutatione. Porrò quum litteræ quantitatem incognitam exprimentes, nullo affectæ sunt exponente, æquationes primi gradus dicuntur; habent enim pro exponente unitatem: ex. gr. $3y+a=b-2y$. Quando verò eo devenitur, ut in uno membro cognitæ, in altero incognitæ reperiuntur, operatio explicit: jam enim valor incognitæ elucet; ut in præjacto exemplo $y=\frac{b-a}{5}$.

102 Schol. 2. Problemata alia sunt determinata, in quibus tot conditiones sunt, quot incognitæ: alia indeterminata, quæ plures continent incognitas, quam conditiones. Problema

determinatum primi gradus unicam solutionem admittit; indeterminatum plures. Axiomata, quibus æquationes innituntur, sunt sequentia. 1. Si æqualibus addas æqualia, summæ etiam erunt æquales. 2. Si æqualibus demas æqualia, residua, sivè differentiæ, remanent æquales. 3. Æqualia per æqualia multiplicata, aut divisa, dant producta æqualia, aut æquales quotos. 4. Æqualia pro æqualibus semper substitui possunt.

§. II.

Æquationum formatio et resolutio.

203 Defin. 1. *Æquationis* formatio est algebrica problematis expositio, nempè litteris comprehendere quantitates, atque earum rationes, cognitas ab incognitis ritè discernendo, ac separando. Plura sunt, quæ usu magis, quam regulis addiscuntur. Exempla nimirum tironum oculis subjicient, quæ longa verborum ambage vix perciperent.

104 Defin. 2. *Æquationis resolutio* est valoris incognitæ inventio. Invenitur autem ex cognitarum ad incognitas relatione. Rationes autem hujusmodi inclusæ sunt, atque abditæ in ipsis quantitatibus, ex quarum commixtione, ac separatione erui debent; non secus atque in nucleo latentes fructus, cortice rupto, aut disjuncto, apparent. Methodus autem hujusce separationis est earumdem quantitatum, sivè expressionum transformatio, quæ multiplici modo fieri potest.

I. Separatur *additione*: ipsi scilicet incognitæ, atque alteri membro æquationis aliam quantitatem addendo. Ex. gr. $x-a=b+c$; ergo $x-a+a=b+c+a$; et reductione facta: $x=b+c+a$. Hinc apparet quantitatem negativam ab uno ad aliud membrum æquationis traduci posse converso signo — in +, manente æqualitàte (axiom. 1.)

II. *Subductione.* In exemplo allato si $x+a=b+c$, possum auferre utrimque a, eritque $x+a-a=b+c-a$, et reducendo $x=b+c-a$. Hæc est praxis inversa præcedentis: scilicet quantitas positiva à membro ad membrum traducitur, converso signo + in —, sivè subtractione (axiom. 2.) Utraque methodus dicitur *transpositio.*

III. Separatur *multiplicatione*: hæc praxis plerumque locum habet in fractionibus: nam fractio evanescit ceteros terminos in suum denominatorem ducendo si $\frac{z}{a}=b$; duc utrumque membrum in denominatorem a, fitque $\frac{az}{a}=ab$, et facta divisione $z=ab$ (ax. 3.)

IV. *Divisione.* Nam si quantitas quantitatem multiplicat, per illam dividendo omnes æquationis terminos, à multiplicatione liberabitur, ac solitaria remanebit. Ex. gr. in æquatione $ab+c=bx$, dividendo omnes terminos per b, habebitur: $\frac{ab}{b}+\frac{c}{b}=\frac{bx}{b}$, quod divisione facta dat $a+\frac{c}{b}=x$ (ax. 3.)

V. *Valorem incognitæ sumendo.* Hoc impor-

tat aliam quantitatem æqualem in æquatione ipsi incognitæ substituere: ex. gr. si $x=a+y$, ipsi x substituo $a+y$, illiusque valorem sumo (ax. 4.) Hoc passim in operationibus algebricis occurrit. Problematum resolutione hæc omnia clariora evadent.

§. III.

Problemata.

105 Probl. 1. *Quantitatem incognitam à cognita per additionem aut subductionem separare.* Solutio erit exemplum. Sit *Andronicus* 60 *annorum, cujus filius Cajus* 15 *numerat.* Quæritur *quo anno, patris ætas dupla futura sit ætatis filii.* Solut. Fiant $60=a$, et $15=b$: numerus annorum, in quibus conditio implenda erit $=y$. Hæc est problematis *denominatio.* Jam quum ex utraque parte numerus annorum $=y$ debeat excurrere, ut ætas Caji æqualis sit dimidio ætatis Andronici; erit ætas Andronici in tempore, quo implenda est conditio $=a+y$: atque ætas Caji $=b+y$: quumque $a+y$ sit duplum $b+y$; ut fiat æquatio, erit $a+y=b+y+b+y$; et reducendo $a+y=2b+2y$. Fiat *transpositio* incognitæ: $a=2b+2y-y$ (per II. num. 104), et facta reductione $a=2b+y$, iterum transponatur $2b$, eritque $a-2b=y$. En jam incognitam in altero membro separatam, atque æquatam cum cognitis. Igitur problema resolutum est formula generali ad omnes casus similes applicabili. Substituantur numeri pro casu præsenti assumpti. Quum $a=60$, ac $b=15$; erit $60-2b=60-30=y$. Jam $=60-30=30$.

Igitur 90 ætatis anno erit Andronici ætas dupla ætatis Caji. Hic quidem tum habebit 45 annos, dimidium 90.

En typum calculi:

Ætas Andronici tempore implendæ conditionis $=a+y=b+y+b+y$.

Reducendo $a+y=2b+2y$

Et trasponendo $a=2b+2y-y$

Et reducendo $a=2b+y$

Iterum transponendo $y=a-2b=60-30=30$.

Igitur $y=30$, et $a+y=60+30=90$.

106 Corol. Formula hæc œcumenica ad omnes casus est applicanda, in quibus similes conditiones proponantur. Nam si ætas filii dimidium ætatis parentis superaret, eadem æquatione $a-2b=y$ inveniretur utriusque ætas. Fac non 15, attamen 35 habere Cajum; quoto amborum anno ætas unius fuit alterius dupla? Quum $a=60$, et $2b=70$; erit $y=60-70=-10$. Hoc est anno 60—10 adimpleta fuit conditio, anno scilicet 50 ætatis Andronici, et 35—10 ætatis Caji=25. Planum enim est 50, duplum esse 25.

107 Probl. 2. *Incognitam multiplicatione se parare.* Exempl. *Alexander ad Darbellam exercitum Darii fudit: hujus quarta pars in campo jacuit; duæ quintæ partes captivæ remanserunt, ad quadraginta duo millia fuga subducti sunt. Quot militibus instructus Darius prælium commisit?* Solut. Fugitivos milites scilicet 42000 dico a; exercitum universum dico x: jam quum hujus quarta pars interierit, erit $=\frac{x}{4}$, captivi

erunt $\frac{2x}{5}$: quare denominatio problematis erit $\frac{x}{4}+\frac{2x}{5}+a=x$. Primam fractionem, tollo, multiplicando per denominatorem 4 omnes terminos: eritque $x+\frac{8x}{5}+4a=4x$. Secundam etiam pari methodo multiplico, ducendo omnes terminos in denominatorem 5; fitque $5x+8x+20a=20x$, et facta reductione $13x+20a=20x$, et trasponendo $20a=20x-13x$, quod facta reductione dat $20a=7x$. En æquationem, quam adhuc ad terminos problematis reducere oportet, multiplicando a per 20, sive $42000\times 20=840000$, dividenda per $7=120000$. Hic numerus conditiones problematis implet.

Nam	30000 =	quarta pars. 120000.
	48000	duæ quintæ partes
	42000	fugitivi.
	120000	

Animadvertendum tamen in problemate non ad finem historiæ, sed ad resolutionis commoditatem militum numerum exactum esse.

18 Probl. 3. *Incognitam divisione separare.* Exempl. *Cæsar, et Drusus pecunia instructi, bibliopolæ officinam ingredientes, libros empturi, primus 26 aureos alter ad 44 impendit. Domi pecunia residua numerata, Cæsar invenit, se quadruplo plus habere, quam Drusus. Quæritur utriusque pecunia ante impendium.*

Solut. Quoniam aurei impensi in libros no-

ti sunt, unica incognita restat, numerus scili-
let aureorum ante impendium; hunc voco x:
erit igitur $x-26$ pecunia Cæsaris: atque $x-44$
residuum Drusi. Supponimus autem Cæsaris
esse quadruplum alterius: habebimus igitur
æquationem, $x-26=4\,(x-44)$; et facta mul-
tiplicatione, $x-26=4x-176$. Jam transpo-
nendo fit $-26=4x-x-176$, et reductione
facta $-26=3x-176$. Rursus transportatione
fit $176-26=3x$: ac reducendo $150=3x$. Quare
$x=\frac{150}{3}=50$. Eruitur jam residuum Cæsaris
esse $50-26=24$. Supponitur autem esse qua-
druplum residui Drusi; erit igitur hoc $=\frac{24}{4}=6$.
Addantur residua expensis, fitque $26+24=$
50: $6+44=50$: adeòque benè procedit ope-
ratio.

109 Probl. 4 *Incognitas substitutione se-
parare.* Exempl. Datis summa duarum quan-
titatum $=a$, earumque differentia $=b$, quan-
titates invenire. Solut. Ut facilius menti oc-
currat objectum determinatum, fac $a=60$,
et $b=8$; incognita autem major sit $=x$, mi-
nor $=y$. Erit igitur $x+y=a$, et $x-y=b$.
Jam transponendo fiet $x=a-y$: hanc igitur
substituo sibi æquali x (ax. 4, n. 102). Erit
igitur in altera æquatione $x-y=b$; $a-y-y$
$=b$; et reducendo $a-2y=b$; et transponen-
do $a-b=2y$; et dividendo $y=\frac{a-b}{2}=\frac{60-8}{2}$
$=\frac{52}{2}=26$. Erit igitur $y=26$. Ex hac æquatione
altera etiam quantitas innotescit: nam $x+y=$
$a=60$. Erit igitur 34: nam $26+34=60$; quo-
rum differentia $=8$. Quod si non jam cum y,

sed cum x operatio instituta fuisset, loco æqua-
tionis $\frac{a-b}{2}=y$ inventum fuisset $\frac{a+b}{2}=x$.

110 Corol. Ex problematis solutione theore-
ma deducitur, veritatem his terminis universa-
lioribus enuntians. *Datis summa, et differentia
duarum quantitatum, major æqualis est dimi-
diæ summæ, cum dimidia differentia: minor
æqualis dimidia summæ, dempta dimidia dif-
ferentia.* Veritas manifesta ex est formula æqua-
tionum: nam major quantitas $x=\frac{a+b}{2}$, minor
verò $y=\frac{a-b}{2}$

111 Exempl. 2. *Antonius Lepido dixit: Si
unum ex aureis, quos penes me repositos habeo
tibi darem, æqualem summam haberemus: si tu
unum ex tuis mihi traderes, ego duplum habe-
rem. Quot aureos unusquisque habet?* Solut.
Fiat summa Antonii $=x$; Lepidi verò $=y$. Jam
ex prima conditione problematis eruitur, $x-1$
$=y+1$.
Atque tiam ex secunda, $x+1=2y-2$.
Ergo transponendo, $x=y+1+1$, sivè $x=y+2$,
et substituendo $y+2+1=2y-2$, sivè $y+3$
$=2y-2$;
et transponendo, $y=2y-2-3$, sivè $y=2y-5$,
ac demum $5=2y-y$, sivè $5=y$,
eadem methodo inveniri potest summa Anto-
nii, $x=7$.

112 Exempl. 3. Tres incognitas referens.
*Cajus, et Popilius mercatura 1000 aureos adqui-
sierunt: Cajus et Titius 1100: Popilius et Ti-*

tius ad 900. *Quæritur singulorum lucrum.* Solut. Sit summa Caji $=x$: Popilii $=y$: Titii verò $=z$. $1000=a$: $1100=b$: $900=c$. Jam ex conditionibus problematis hujusmodi æquationes eruuntur

$$\begin{aligned} x+y&=a \\ x+z&=b \\ y+z&=c \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Transposit. ope duæ } 1.^{mæ} \text{ reducuntur ad} & x=a-y \\
 & x=b-z \\
\text{et substitutione.......} & a-y=b-z \\
\text{et transpositione.....} & a=y+b-z \\
\text{atque iterum..........} & y=a-b+z \\
\text{Pariter ex æquatione } 3.^{a} \text{ deducitur.........} & y=c-z \\
\text{et substitutione.......} & c-z=a-b+z \\
\text{et transpositione.....} & c=a-b+z+z \\
\text{sivè reducendo ....} & c=a-b+2z \\
\text{deindè..................} & c-a+b=2z
\end{array}$$

$$\text{demum......}\; z=\frac{c-a+b}{2}=\frac{900-1000+1100}{2}$$

Invento hoc valore $z=500$; quum $y=c-z=900-500$, erit $y=400$; et $x=a-y=1000-400=600$.

113 Schol. Metodos problemata indeterminata solvendi consultò omittimus; prolixioris enim industriæ ac provectioris solertiæ sunt, quam quæ tironibus, vix primum limen matheseos ingressis, proponuntur. Porrò problemata indeterminata jam diximus plures solutiones admittere: ex gr. duos numeros invenire, quo-

rum summa $=14$: tot enim solutiones in numeris positivis admittit, quot conjuctiones in numeris componentibus summam: in negativis verò aut fractis innumeras. Universim animadvertere sufficiat, æquationes ita tractandas esse, ut demum in uno membro incognita unica reperiatur, in altero verò incognita cum cognitis. Tum assumpto valore positivo atque integro, huic secundæ applicetur, ut valor primæ determinetur.

CAPUT QUARTUM.

De Potentiis, et radicibus.

§. I.

Prænotiones.

114 Defin. 1. Numerus quicumque in se ductus productum efficit, quod *quadratum* dicitur: numerus autem, qui in se ductus fuit, *radix cuadrata*. Ex *g*. $2\times2=4$. Numerus 4, consideratus ut productus à 2×2, est quadratum, ac 2 ejus radix, quæ et prima potentia dicitur. Pariter in litteris quantitas quæcumque litteris expresa, est prima potentia: in se ipsam ducta efficit quadratum, seu secundam potentiam, veluti de numeris dictum est. Sic a est prima potentia: productum verò $a\times a=aa$ quadratum, cujus radix quadrata a est prima potentia. Universim quilibet numerus considerari potest, ut prima potentia, cujus quadratum est productum numeri in se ipsum ducti.

115 Defin. 2. Quando autem productum