tius ad 900. *Quæritur singulorum lucrum.* Solut. Sit summa Caji $=x$: Popilii $=y$: Titii verò $=z$. $1000=a$: $1100=b$: $900=c$. Jam ex conditionibus problematis hujusmodi æquationes eruuntur

$$x+y=a$$
$$x+z=b$$
$$y+z=c$$

Transposit. ope duæ 1.^mæ^ reducuntur ad $x=a-y$
$x=b-z$

et substitutione....... $a-y=b-z$
et transpositione..... $a=y+b-z$
atque iterum.......... $y=a-b+z$
Pariter ex æquatione 3.^a^ deducitur.......... $y=c-z$
et substitutione....... $c-z=a-b+z$
et transpositione..... $c=a-b+z+z$
sivè reducendo .... $c=a-b+2z$
deindè. .... $c-a+b=2z$

demum...... $z=\frac{c-a+b}{2}=\frac{900-1000+1100}{2}$

Invento hoc valore $z=500$; quum $y=c-z=900-500$, erit $y=400$; et $x=a-y=1000-400=600$.

113 Schol. Metodos problemata indeterminata solvendi consultò omittimus; prolixioris enim industriæ ac provectioris solertiæ sunt, quam quæ tironibus, vix primum limen matheseos ingressis, proponuntur. Porrò problemata indeterminata jam diximus plures solutiones admittere: ex gr. duos numeros invenire, quo-

rum summa $=14$: tot enim solutiones in numeris positivis admittit, quot conjuctiones in numeris componentibus summam: in negativis verò aut fractis innumeras. Universim animadvertere sufficiat, æquationes ita tractandas esse, ut demum in uno membro incognita unica reperiatur, in altero verò incognita cum cognitis. Tum assumpto valore positivo atque integro, huic secundæ applicetur, ut valor primæ determinetur.

CAPUT QUARTUM.

De Potentiis, et radicibus.

§. I.

Prænotiones.

114 Defin. 1. Numerus quicumque in se ductus productum efficit, quod *quadratum* dicitur: numerus autem, qui in se ductus fuit, *radix cuadrata*. Ex *g*. $2\times2=4$. Numerus 4, consideratus ut productus à 2×2, est quadratum, ac 2 ejus radix, quæ et prima potentia dicitur. Pariter in litteris quantitas quæcumque litteris expresa, est prima potentia: in se ipsam ducta efficit quadratum, seu secundam potentiam, veluti de numeris dictum est. Sic a est prima potentia: productum verò $a\times a=aa$ quadratum, cujus radix quadrata a est prima potentia. Universim quilibet numerus considerari potest, ut prima potentia, cujus quadratum est productum numeri in se ipsum ducti.

115 Defin. 2. Quando autem productum

primum iterum in radicem ducitur, jam ad cubum elevatur, qui etiam tertia potentia dicitur. Sic $2 \times 2 \times 2 = 8$ dicitur tertia potentia, seu cubus. Radix autem cubica est ipsamet radix quadrata, prout secundæ multiplicationi subjacens. Ad quantitates litterales similiter hæc applicanda sunt. Nam $a \times a \times a = aaa$ cubus dicitur, seu tertia potentia. Compendii tamen causa potentiæ per exponentes enuntiantur: ex. g. a^2, a^3, quod indicat quantitatem elevatam ad secundam, tertiam etc. potentiam, quam numerus exponit.

116 Defin. 3. Elevatio ad quartam, quintam, sextam etc. potentias fit perpetua multiplicatione novi producti in radicem $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 \times 2 = 8 \times 2 = 16$, et in litteris $a \times a \times a \times a = a^2 \times a \times a = a^3 \times a = a^4 \times a = a^5$, etc. Quarta potentia dicitur etiam *quadrato-quadratum*; quinta *quadrato-cubus*, sexta *cubo-cubus*: quibus barbaris nominibus satius erit parcere, quum per quartam, quintam etc. potentiam planius res manifestetur.

117 Defin. 4. Quadratum, cubus aliaque tum dicuntur perfecta, quum oriuntur ex multiplicatione radicum sine ullo residuo, ut in exemplis hactenus adductis. Imperfecta verò, quando, extracta radice, aliquod residuum superest: ut 6, in quo præter quadratum 4, adhuc residuum 2 superest, dicitur quadratum imperfectum.

118 Defin. 5. Elevatio fractionum ope multiplicationis utriusque numeratoris et denominatoris obtinetur: ex. gr. $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$, quadratum $\frac{3}{4}$;

cubus verò $\frac{3}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$. Planum est fractiones per elevationem deprimi, per extractionem autem radicum augeri (59). Nam si fractio $\frac{1}{2}$ elevetur ad quartam potentiam, hoc ordine decrescit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$. Extracta verò $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ erit $\frac{1}{2}$, cujus valor octuplo major est alterius.

119 Schol. Signum $\sqrt[4]{}$ nuper allatum indicat radicem quartæ potentiæ illius quantitatis, cui præfixum est. Universim signum $\sqrt{}$ denotat radicem quadratam, $\sqrt[3]{}$ cubicam, $\sqrt[4]{}$ quartæ potentiæ; $\sqrt[5]{}$ quintæ etc. Hujusmodi autem quantitates tali signo præfixo indicatæ, radicales appellantur.

§. II.

Potentiæ et radices monomiæ.

120 Probl. 1. *Quantitatem monomiam ad assignatam potentiam elevare.* Solut. Quantitas monomia potest esse affecta coefficientibus, atque exponentibus: ex g. $2a^2 b^3$. Jam 1. coefficiens elevetur ad potentiam assignatam (116). 1. Exponens multiplicetur per numerum indicantem gradum potentiæ, ad quam elevanda est quantitas. Exempl. $2a^2b^3$ ad tertiam potentiam evehenda sit: erit $8a^6$ b^9 ejus cubus. *Dem.* Hac operatione omnes partes monomii ad datam potentiam evehuntur. Nam $2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$. Deindè $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6$ (87): $b^3 \times b^3 \times b^3 = b^9$.

121 Probl. 2 *Radicem dati gradus ex monomiis extrahere.* Solut. Inverso modo atque in præcedenti probl. operandum est. 1. Ex coefficiente extrahatur radix, methodo mox tradenda. 2. Exponens dividatur per numerum indicantem gradum potentiæ, ad quam evecta est quantitas. Sic in allato exemplo num. præc. radix cubica $8a^6\ b^9$ est $2a^2\ b^3$. Jam enim demonstratum est ex multiplicatione hujus quantitatis modo indicato, cubum oriri; quapropter per resolutionem subindè restitui debet.

112 Schol. 1. Quando ocurrat quantitas, cujus exponens sit fractio, ex *g.* $a^{\frac{2}{3}}$, illius numerator pro exponente potentiæ, denominator vero pro exponente radicis accipi potest: scilicet $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

123 Schol. 2. Duæ quantitates radicales possunt ad eumdem exponentem radicis trahi sine valoris mutatione. Sit $\sqrt[2]{a^3}$ et $\sqrt[3]{a^5}$; exprimantur hac forma: a et a: deinde fractiones reducantur ad eumdem denominatorem, erunt $\frac{9}{6}$ et $\frac{10}{6}$: demum $a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{9}{6}} = \sqrt[6]{a^9}$: et $a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{10}{6}} = \sqrt[6]{a^{10}}$.

124 Corol. 3. In quantitate monomia potest occurrere, ut unus ex factoribus signo radicali afficiatur; alter verò extra signum radicale sit: ut uterque sub eodem signo comprehendantur, potest elevari ad potentiam indicatam in signo

radicali, qui non est affectus, ac tum cum altero collocari: ex *g.* $a^3 \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(a^3\ b)}$. Vicissim factor comprehensus signo radicali ab illo educi potest, extrahendo ab ipso radicem indicatam, ut in exemplo allato $\sqrt[3]{(a^3\ b)} = a^3 \sqrt{b}$. Quod quidem ad numeros extendi potest: nam $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$; et $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$.

125 Probl. 3. *Quantitates radicales addere vel subducere.* Solut. Si exponens signi radicalis est idem, eademque quantitas illi subjecta, addantur, vel subducuntur factores signum radicale præcedentes: ex g. $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$. Pariter $\sqrt{63} + \sqrt{28} = 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$.

126 Probl. 4. *Quantitates radicales multiplicare et dividere.* Solut. Reducantur ad eumdem exponentem signi radicalis (123): deinde multiplicentur quantitates signum radicale præcedentes inter se: postea quantitates sub signo radicali, comprehensæ: ex g. $a\sqrt{c} \times b\sqrt[3]{d^2}$: erit primò $ac^{\frac{1}{2}} \times bd^{\frac{2}{3}}$ (122): deindè ad eumdem denominatorem reductæ fractiones, erunt $ac^{\frac{3}{6}} \times bd^{\frac{4}{6}}$ (123); quod, mutata expressione, convertitur in $a\sqrt[6]{c^3} \times b\sqrt[6]{d^4}$; ac denum facta multiplicatione $= ab\sqrt[6]{c^3\ d^4}$ (124). Et quoniam divisio est multiplicationis disolutio; ut quantitates radicales dividas, pri-

mum quantitates extra signum radicale positas, deindè, quæ sub signo continentur, oportet dividere. Sic $ab\sqrt[2]{xy}$ per $-a\sqrt[2]{x}$ divisum, quotum exhibet $-b\sqrt[2]{y}$: et $a^2\sqrt[3]{cd}$ divisum per $a^2\sqrt[3]{fg}$, quotum dabit $\sqrt[3]{\frac{cd}{fg}}$: demum per n quamcumque radicem indicando $x\sqrt[n]{a}$ divisum per $y\sqrt[n]{b^2}$, pro quoto dabit $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{a}{b^2}}$ etc.

127 Schol. 1 Quantitatis negativæ a omnes potentiæ pares sunt positivæ, impares verò negativæ. Nam $-a \times -a = a^2 \times -a = -a^3 \times -a = a^4$ etc. Quapropter in monomio a^2 radix est æquivoca: potest enim esse vel $-a$, vel $+x$. Jam si in aliqua æquatione extrahenda sit radix quadrata, veluti in $x^2 = a^2 - b^2$, radici præfigendum est signum dubium $x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$.

128 Schol. 2. Qui radicem quadratam monomii $-a^2$ requirit, oleum, et operam perdit. Nam $-a^2$ neque provenit ex $a \times a$, neque ex $-a \times -a$; in utroque enim casu productum est positivum. Quum ergo $-aa$ non possit esse productum quantitatis ullius realis in se ipsam ductæ, quadratum $-aa$ est chimæricum: hinc $\sqrt{-a^2}$ dicitur quantitas *imaginaria*, aut *impossibilis*.

§. III.

Radix quadrata quantitatum complexarum, et numerorum.

129 Theor. *Quadratum binomii constat ex quadrato primi termini, duplo producto primi in secundum, et quadrato secundi. Dem.* Quævis quantitas binomia repræsentari potest ab hac formula $a+b$. Elevetur ad quadratum $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$; et reducendo $a^2 + 2\,ab + b^2$. Constat ergo quadrato primi termini a^2, duobus productis $a \times b$, et quadrato secundi termini b^2. Eadem demonstratio in numeris exhiberi potest. Sit $a = 20$, $b = 5$; quadratum $25 \times 25 = 625$. Quadratum $20 \times 20 = 400$; duplum productum $20 \times 5 = 200$: quadratum $5 \times 5 = 25$: summa $400 + 200 + 25 = 625$.

130 Probl. 1. *Ex quantitate complexa litteris expressa radicem quadratam extrahere.* Solut.

Exemp. Quadr. $a^2 + 2ab + b^2$. Radix $a+b$.

$$\begin{array}{l} -a^2 \\ \hline 2ab+b^2 \\ 2a+b \\ -2ab-b^2 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

1 Extrahatur à primo termino radix, eaque scribatur ad latus ut in divisione fieri solet: multiplicetur radix per se ipsam, sivè ad quadratum elevetur; deindè subducatur à primo

termino. 2. In residuo contineri debet duplum productum primi termini in secundum; et quadratum alterius partis: accipiatur duplum radicis inventæ; nempe $2a$, illoque veluti divisore residuum dividatur, $\frac{2ab}{2a}=b$. Adscribatur hic terminus radici, deindè adjungatur alteri termino $2a$; fit $2a+b$. 3. Multiplicetur hæc quantitas per alterum radicis terminum, erit $2ab+b^2$. Demum subtrahatur a priori residuo; nihil remanet. Est ergo qnantitas assignata quadratum perfectum. Demonstratio ex ipsa operatione est manifesta.

131 Corol. Eadem methodo procedi ulterius deberet, si plures essent termini in quantitate assignata pro extractione radicis: duplum nimirum radicis inventæ pro divisore usurpando; quotum verò alteri radicis parti adscribendo. Nam si prædicta quantitas alio termino augeretur, putà c, quadratum esset $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$. Radix $a+b+c$.

$$-a^2$$

$$2ab+b^2$$
$$2a+b$$
$$-2ab-b^2$$

$$2ac+2bc+c^2$$
$$2a+2b+c$$
$$-2ac-2bc-c^2$$

$$0$$

In hac ultima operationis parte sumitur etiam duplum radicis inventæ, nimirum $2a+2b$; per hanc dividitur residuum; quotiens est c, scriptum prius in radice; subinde adjungitur divisori; ac demum tota quantitas per inventum terminum multiplicatur, ac subtrahitur productum à residuo.

132 Schol. Si aliquis ex terminis esset negativus in radice, duplum productum deberet esse negativum. Duplex verò quadratum utriusque termini positivum. Nam $(a-b)(a-b)$ dat hujusmodi productum $a^2-2ab+b^2$. Quadratum igitur cujuscumque termini sivè positivi, sivè negativi, semper est positivum.

133 Lemma. *Radix numerica ad quadratum elevata non potest plures notas continere, quam duplum earum, quæ in radice inveniuntur: quandoquè tamen poterit una minus inveniri. Dem.* Numeri inter 1 et 10, non possunt plures notas, quam duas in quadratis habere; quia $10\times10=100$ est primus numerus, qui tribus notis constat. Similiter $100\times100=10000$, primus etiam est, qui ex quinque notis componitur, et sic deinceps. Omnes igitur numeri inter 1 et 10 duas tantum: á 10 usque ad 100 quatuor tantum notas exhibere possunt in quadratis; à 100 usque ad 1000 non plures, quam sex continere etc. Quod autem unica tantum nota á duplo possit deficere productum, eadem inductione demonstratur. Nam 10 in quadrato tres habet, 100 quinque, 1000 septem etc. Omnes autem hi numeri sunt primi in serie, qui una nota augeantur.

134 Corol. Facilè deducitur ex theoremate præcedente, quot notis constare debeat radix cujuscumque cuadrati. Dividatur nimirum numerus, à quo extrahenda est radix per classes à dextra sinistram versus; in qualibet verò classe duo tantum notæ comprehendantur: ultima autem classis unica etiam nota constare potest. Sit numerus 588289, à quo extrahenda sit radix; dividatur in classes modo jam indicato: peracta, divisione, membra erunt 58, 82, 89. Tribus igitur notis radix constare debet. In sequenti autem numero unica ad sinistram nota invenitur 6, 42, 27, 39. Quatuor deindè in radice notæ invenientur.

135 Schol. In sequenti schemate radices, et quadrata numerorum ab 1 ad 9 exhibentur, ut faciliùs in sequentibus operationibus procedatur:

Radices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Quadrata, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

136 Probl. 2. *Ex quantitate numerica radicem quadratam extrahere.* Solut.

Exempl. Quadr. 58, 82, 89. Radix $a+b+c$ 767

$a^2=49$	
	982
$2a+b=$	146
$2ab+b2=$	876
	10689
$2a+2b+c=$	1527
$2ac+2bc+c^2=$	10689
	0

1. Numerus dividendus est in classes (134). 2. Incipiendo à primo membro à sinistris, quærenda est radix quadrata dati numeri, aut quadrati proximè inferioris; in exemplo 58 quadratum proximum est 49. Ab hoc radix mutuetur, quæ, loco pro numero radicali assignato, scribenda erit: deindè elevetur ad quadratum, ac subducatur à primo membro. 3. Residuo 9 secunda classis adjungitur, ut secundæ operationi inserviat. Jam duplum radicis inventæ accipiendum est, nimirum 14, quod loco divisoris est usurpandum; atque sub penultima nota 8 scribendum: nam ad has tantum extenditur divisio. Quotus inventus 6 radici, et divisori adscribitur, atque per ipsum numerus 146 multiplicatur: deindè productum 876 subducitur á primo residuo 982. Hic operatio secundi membri explicit. 4. Residuo 106 tertia classis 89 adjungitur; pro divisore ut supra, duplum totius radicis inventæ usurpatur, nimirum 152, quod ad penultimam notam attingere debet. Divisione peracta, quotus 7 scribitur ut supra tam radici, quam divisori, per quem etiam auctus multiplicatur, ac deinde productum à tertio membro subducitur. Nihil remanet. Radix ergo quæsita est 767. *Dem.* Quæ hic in numeris peracta sunt, omninò cum his quæ supra (130) in litteris exhibuimus, conveniunt, atque ex numero 129 facilè demonstrantur. Ideo etiam in litteris ad latus eadem operatio indicata est. Ut majori in luce praxis indicata collocetur, juvat schema sequens ob oculos ponere, quo tam synthesis, quam analysis qua-

drati exhibetur. Insimul autem quare notæ eo, quo jussæ sunt, ordine collocari debeant, ostenditur.

		$a \quad b \quad c$
588289	Radix	$700+60+7$
490000	Quadr.	$a^2=490000$
98289	dup. prod.	$2ab=84000$
14600	Quadr.	$b^2=3600$
87600	dup. prod.	$2ac=9800$
10689	dup.	$2bc=840$
1527	Quadr.	$c2=49$
0		588289

137 Probl. 3. *Ex quadrato imperfecto radicem extrahere.* Solut.

Exempl. Quadr. 6, 42, 27, 39. Radix 2534

	4
	242
	45
	225
	1727
	503
	1509
	21839
	5064
	20256
Residuum	1583

138 Schol. 1. Quemadmodum in divisione

multiplicatio divisorum in quotum ostendit, num rectè processerit operatio, pariter in extractione radicum multiplicatio radicis inventæ in se ipsam reddere debet quadratum. Quod si residuum aliquot supersit, ejus additione ad inventum productum, integram summan restitui necesse est.

Duc $2534 \times 2534 = 6421156 + 1583 = 6422739$.

139 Schol. 2. Ea est proprietas divisionis, ut invento uno ex factoribus dividendi, ac per ipsum facta divisione, alter factor habeatur (25). Quamobrem productum notum per notam radicem dividendo, quotus est altera radix. Jam in operationibus præcedentibus, quotiescumque nova sectio demittitur, per duplum radicis dividitur, sicque altera radix innotescit. Nam jam ostensum est duplum radicis inventæ esse unum ex factoribus producti, à quo radix extrahitur: adeòque in divisione alterum factorem latentèm tradere debet.

140 Schol. 3. Si aliquando occurrat, ut duplum radicis majus sit membro tractando; scripto *zero* in radice, novum membrum demittitur, atque operatio de more instauratur.

141 Schol. 4. Numerus sumptus in problemate, prætèr quadratum radicis continet residuum 1583: ideòque quadratum imperfectum dicitur. Nam neque quadratum est numeri 2534 neque 2535 unitate majoris. Major enim est primo 1583 unitatibus. Numeri autem 2535 quadratum est 6426225, quod ipsum 3486 unitatibus superat. Radix ergo prædicti numeri inter utramque radicem 2534, ac 2535 existit.

Erit igitur numerus 2534, auctus parte unitatis, quæ nec numero integro, nec fractione alitatis, quæ nec numero integro, nec fractione aliqua adamussim exprimi potest. Ad radicem tamen veram semper magis ac magis possumus accedere ope decimalium, ut in sequenti.

142 Prob. 4. *Radicem quadratam per aproximationem extrahere.* Solut. Extracta radice quadrati imperfecti, ut in problemate præcedenti, residuo addantur tot cyphrarum paria, quot libuerit; deindè extractio radicis de more instituatur. In radice autem inventa tot notæ decimalis à dextris resecari debent, quot cyphrarum paria adjecta sunt. Radix eo erit accuratior, quo plures notæ aggregatæ fuerint. In residuo probl. præc. addantur unum, aut duo cyphrarum paria, atque operatio instauretur, ut in exempl. ubi residuum 1583, addendo unum cyphrarum par, evadit 158300. Radix 2534, 31.

$$
\begin{array}{r}
50683 \\
152049 \\
\hline
625100 \\
506851 \\
\hline
118239 \text{ etc.}
\end{array}
$$

143 Schol. 1. In allato exemplo, quod ulterius protrahi posset in infinitum, nova residua eodem modo tractari deberent, atque in duobus præcedentibus peractum est. Hic jam ad $\frac{3}{10}$ pro vera radice numeri præfati accessimus. Ceterum demonstratio eadem est, ac quæ in fractionibus decimalibus pro simili casu usurpata fuit (66).

144 Schol. 2. Si radix quadrata alicujus numeri major est numero integro, at minor numero integro sequente, exprimi non poterit accuratè, neque per integrum, neque per fractionem propriam integro abjectam. Quocumque enim modo tractetur, numquam ad integram reduci poterit. Sit 6 ex. g. à quo extrahitur radix quadrata: hæc neque 2 neque 3 exprimi adamussim potest. Fac $= 2\frac{1}{2}$, hæc inquam radix accurata non est. Nam infractionem impropiam transformata $= \frac{5}{2}$, atque ita ad quadratum elevata $\frac{25}{4}$, rursus prodit talis fractio quæ integro æquari non potest. Idem tentando cum quacumque alia fractione notæ 2 adjuncta invenies.

145 Schol. 3. Hujusmodi radices vocantur *irrationales*, *surdæ incommensurabiles*. Contra radices numero quorum valor integris, aut fractionibus exactè exprimi potest, *rationales*, *commensurabiles* dicuntur.

146 Schol. 4. In fractionibus vulgaribus, ut ad quadratum eleventur, aut ut ab ipsis radix quadrata extrahatur, tam numerator, quam denominator tractari debent: ex g. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Quando autem ambo fuerint quadrata imperfecta, consultius erit easdem in decimales convertere (65), ac postea radicem extrahere. Curandum tamen, ut notæ decimales sint pares: ex. g. si ex 7,329 extrahenda sit radix, adjuncto zero fit par numerus decimalium; commodiorque evadit calculus.