§. IV.

Æquationis secundi gradus.

147 Defin. Æquationes secundi gradus seu quadraticæ dicuntur illæ, in quibus æquatio, quum à fractionibus, quæ incognitam in denominatore continent, liberata fuerit, major incognitæ potestas sit secunda, seu quadratum. Quod si nulla alia potestas incognitæ admisceatur, æquatio erit *quadratica pura;* sin verò prima etiam incognitæ potestatem æquatio contineat, erit *quadratica affecta.* Ut autem præparetur æquatio ad separationem incognitæ, opus est primum ope transpositionis incognitam à cognitis separare (104): deindè quadratum incognitæ à coefficiente liberare; nisi unitas coefficiens quantitatis sit, seu quod idem est, nullo coefficiente notetur: ac demum si negativum fuerit, ope multiplicationis in positivum convertere; quod multiplicando totam æquationem per -1 obtinetur. His peractis, si æquatio fuerit *quadratica pura*, valor incognitæ statim elicitur, utrinque radicem quadratam extrahendo, quod si æquatio *quadratica affecta* extiterit, oportet primum quadratum in membro incognitæ complere; quod utrique æquationis membro quadratum dimidiæ quantitatis cognitæ, qua prima incognitæ potestas afficitur, adjungendo obtinetur; ut radix deindè utrobique extrahatur, ac per transpositionem valor incognitæ habeatur: ut singillatim in

sequentibus problematis exponemus.

148 Probl. 1. *Æquationem quadraticam puram rosolvere.* Solut. Termini æquationis methodo pro æquationibus primi gradus præscripta ita tractandi sunt, ut demum incognita in uno membro, in altero autem cognitæ quantitates appareant. Deindè extractio radicis ex utroque membro instituenda est; ac demum valor investigandus. Animadvertendum tamen, ne quadratum incognitæ sit negativum, tum enim transpositione fieri deberet positivum. Jam sit $x^2-a^2=b^2$: erit transponendo $x^2=a^2+b^2$; atque extracta radice $x=\pm\sqrt{(a^2+b^2)}$. *Dem.* Si æqualia sunt quadrata, æquales radices habere debent: nam iidem factores eadem producta debent dare. Potest autem eadem radix esse, vel positiva, vel negativa, ut quadrata æquentur (127). Prefigendum igitur est signum dubium.

149 Probl. 2. *Æquationem quadrati imperfecti resolvere.* Solut. Quum incognita ad secundam potentiam elevata, alteri quantitati notæ per multiplicationem mixta est, tunc 1.° complendum est quadratum, dimidium quantitatis notæ incognitam multiplicantis utrique membro adjungendo. 2.° Radix ab utroque membro extrahenda est; ita incognitæ valor facilè invenietur; debet enim alteri solis cognitis constanti æquari. Sit $x^2-ax=b$. Elevetur a ad quadratum, dimidium ipsius sumendo, erit $\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}$ $=\frac{a^2}{4}$. Hoc utrique æquationis membro adjunc-

to, fit $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b$. Extracta radice primi membri erit $x - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}$: ac demum $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}$.

150 Exempl. 1. Esto summa duorum numerorum $= 10$; eorum productum $= 16$. Qui erunt factores? Solut. Summam dico a, productum b. Factores vero unum dico x, alterum y. Ex conditionibus problematis fit aquatio $x + y = a$, et $xy = b$.

Diende transp.	$x = a - y$
Et substit.	$(a - y)\, y = b$
Et facta multipl.	$ay - y^2 = b$
Et mutando signa	$y^2 - ay = -b$
Complendo quad.	$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$
Extracta radice	$y - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$
Demum	$y = \frac{a}{2} + a\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$

Quum incognita segregata sit, atque æquata cum notis, nihil restat nisi ut valor cognitarum nitidè exponatur. Jam $a = 10$: quadratum $a = 100$: igitur $\frac{a^2}{4} = 25$: $b = 16$. Igitur radix $25 - 16 = \sqrt{9} = 3$. Erit ergo $y = 5 + 3 = 8$: contra $x = a - y = 10 - 8 = 2$. Habes jam omnes problematis conditiones, $2 + 8 = 10$; $2 \times 8 = 16$.

151 Schol. Animadvertendum est y æquè applicari posse valori $= 2$, atque alteri $= 8$. Nam eodem modo conditiones implentur; sivè

y fiat $= 2$; vel $= 8$: undè non minus referri potest ad radicem y valor 2, quam ad alteram radicem x: atque quælibet ex incognitis poterit ad majorem, vel adminorem numerum pro libito applicari. Quamobrem problemata secundi gradus duplicem solutionem admittunt, ac radices ambiguas habent. Potest enim esse utralibet positiva, aut negativa (127). Parenthesi autem includimus quantitates $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$, quippè radix extrahenda est ab una, alterâ mulctatâ; quod alii hoc modo indicare solent $\sqrt{\overline{\frac{a^2}{4} + b}}$.

152 Exempl. 2. Esto numerus $a = 8$, numerus $b = 33$: quæritur numerus x, cujus quadratum et productum in numerum a, det summam æqualem quantitati b. Solut. Ex conditionibus datis erit $x^2 + ax = b$. Compleatur quadratum, ut radix extrahi possit; quemadmodum in exemplo præced. factum est:

habebitur Quod $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b$.

Rad. $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + b\right)}$

transponendo $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$.

Incognita jam separata, valores perpendantur. $\frac{a}{2} = 4$: $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)} = \sqrt{\left(\frac{64}{4} + 33\right)} = \sqrt{(16 + 33)} = \sqrt{49} = 7$. Erit igitur $x = -4 + 7 = 3$. In hac æquatione omnes conditiones inveniuntur.

Nam $3\times3=9$, quadratum 3: deindè $3\times8=24+9=33$.

153 Exempl. 3. Quæritur numerus x, à cujus quadrato, si ejus cuadruplum dematur, residuum sit $=96$. Solutio. Elevato x ad quadratum, ab eo subducatur ejus quadruplum consueta substractionis formula, deindè instituatur æquatio.

Erit $x^2-4x=96$

Completo quad. $x^2-4x+4=96+4$

Extracta radice, $x-2=\sqrt{(96+4)}$

Transponendo, $x=2+\sqrt{(96+4)}$

Ex ultima æquatione resultat $x=12$. Nam $2+\sqrt{(96+4)}=2+10=12$. Est enim $\sqrt{(96+4)}=\sqrt{100}=10$. Animadvertendum in æquatione radicem 2 debere esse negativam, quia factor -4 est negativus, adeòque quadratum provenit ex $\frac{-4}{2}\times\frac{-4}{2}=\frac{16}{4}=4$; quod brevitatis gratia in formula omissum est.

154 Exempl. 4. Amici rus concedentes, ut diem læti transigerent, prandium communibus expensis parare jusserunt. Quum jam symbolam conferre deberent, duo ex ipsis solvendo non erant, quapropter 12 aureorum expensa, quæ in omnes justis partibus erat distribuenda, à reliquis est persoluta, uno aureo insuper gravatis; quam si omnes symbolam protulissent. Quæritur amicorum numerus. Solut. Esto $12=a$, amicorum numerus $=x$, solventium $=x-2$. Symbola uniuscujusque, omnibus æquas partes conferentibus, fuisset $=\frac{a}{x}$. Duobus vero non solventibus erit $\frac{a}{x-2}$. Alia autem ex conditionibus est, aureum plus singulos solventes insumpsisse; ut igitur prodat æquatio; erit $\frac{a}{x}=\frac{a}{x-2}$. Sublatis fractionibus (107),

erit Reduc. $ax-2a=ax-x^2+2x$

et transp. $-2a=-ax+ax-x^2+2x$

et reduc. $-2a=-x^2+2x$

et transp. $x^2-2x=2a$

Comp. quad. $x^2-2x+1=2a+1$

Extra. rad. $x-1=\sqrt{(2a+1)}$

ac demum $x=1+\sqrt{(2a+1)}$

En tibi æquationem, quam ad calculos numerorum translatam, habebis $1+\sqrt{24+1}=1+\sqrt{25}=6$. Fuerunt igitur amici rusticantes 6, solventes 4, symbola uniuscujusque fuisset 2. Quoniam autem duo non solverunt, erit $\frac{12}{4}=3$; uno aureo major quam si omnes sumptus fecissent.

§. V.

Radix cubica.

155 Theor. *Cubus radicis binomia consurgit ex cubo primi termini, triplo quadrato primi termini ducti in secundum, triplo primi termini ducti in quadratum secundi, ac demum cubo secundi termini.* *Dem.* Sumatur eadem radix binomia in quadrato usurpata $a+b$. Illius quadratum est $a^2+2ab+b^2$. Hoc per radicem multiplicato, emergit cubus $a^2a+2aab+ab^2+a^2b+2abb+bb^2$; et reducendo a^3+3a^2b+

$3ab^2+b^3$, termini in theoremate enuntiati.

156 Schol. Eadem demonstratio ad numeros extendi potest. Sit numerus $5=2+3$. Elevato primum ad quadratum $(2+3)(2+3)=4+6+6+9$, et ducto rursus hoc quadrato in radicem, cubus erit $8+12+12+18+12+18+18+27$. En cubum primi termini $2=8$, triplum quadratum 4 in secundum terminum $3=12+12+12=36$, triplum primi termini $2=6$ in quadratum secundi $9=18+18+18=54$; ac demum cubum secundi termini $3\times 3=9\times 3=27$. Jam additis $8+36+54+27=125$.

127 Probl. I. *Radicem cubicam litteris expressam extrahere.* Solut. Sit

$$
\begin{array}{ll}
\text{Cub.} & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\ \text{Radix } a+b \\
 & -a^3 \\
\hline
 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
 & 3a^2 \\
\hline
 & 3a^2b \\
 & \quad +3ab^2 \\
 & \qquad +b^3 \\
\hline
 & -3a^2b-3ab^2-b^3 \\
 & \quad 0
\end{array}
$$

Artificium idem est, atque in extrahenda radice quadrata; nisi quod ea varietas, quæ inter cubum et quadratum intercedit in productis, ad methodum etiam extractionis transferenda sit. Jam 1. à primo termino a^3 radix extrahitur; atque scribitur loco radici destinato; ad cubum deindè elevata, substrahitur à primo membro.

2. Pro divisore assumitur triplum quadratum primæ partis radicis $3a^2$, eoque dividur secundum membrum; quotus $\frac{3a^2b}{3a^2}=b$, præbet alteram radicis partem, quæ loco suo scribenda erit.

3. Juxta genesim cubi fiant tria producta, multiplicando $3a^2$ per b; productum $3a^2b$ præbet triplum quadratum primi termini ducti in secundum. Deindè elevetur ad quadratum secundus terminus radici $b=b^2$, et multiplicetur per triplum primi membri radicis a; erit $3a\times b^2=3ab^2$. Demum elevetur ad cubum b; erit b^3. Deindè ad cubum elevata, ac omnia producta subducantur; nihil remanet. Est igitur quantitas data cubus perfectus.

158 Corol. Si quantitas tribus terminis, aut pluribus in radice constaret, eadem methodo extractio radicis procederet. Ex gr. cubus radicis $a+b+c$ est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc+c^3$. Tertium membrum sic debet tractari, ut radix $a+b$ habeatur pro prima parte: deindè residuum divide per $3(a+b^2)=3a^2+6ab+3b^2$, quotus erit c; reliqua ut in altero membro prius factum est.

159 Lemma. *Numerus cubicus plures notas habere non potest, quam triplum notarum suæ radicis: neque pauciores, quam triplum jam dictum, minus duobus.* *Dem.* 1. Numeri ab 1 ad 9, unam notam tantum habent in radice, in cubo autem non plures quam tres; nam cubus 10, qui duabus notis constat est 1000, primus numerus, qui una augeatur nota in

serie aritmetica: ergo omnes numeri infra 10 tribus tantum notis constare possunt in cubo. Pauciores autem quam tres minus duobus habere non possunt; quia eorum radix una constat nota. 2. Numeri etiam à 10 ad 100 nec plures, nec pauciores quam 1000 et 1000000, cubi numerorum 10, et 100; ut est manifestum: ergo omnes inter 10 et 100, seu duarum notarum in radice, non plures habebunt quam sex in cubo, nec pauciores quam quatuor etc.

160 Corol. Ex theor. præced. facilè deducitur methodus determinandi notas in cujuscumque cubi radici contentas. Dividatur numerus datus in membra trinis notis constantia à dextris sinistram versus, ultimum membrum duas, aut unam habere potest. Quot membra in numero divisa sunt, tot notæ respondent in radice: sic numeri cubici 1,000,000, quia tria membra continet, radix 100 tribus notis constat.

161 Schol. Pro faciliori radicis cubicæ extractione, en numerorum simplicium cubos in sequenti schemate comprehensos.

Radices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Cubi	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	729.	

162 Probl. 1. *Ex numero complexo radicem cubicam extrahere*. Solut.

Exempl. Cub. 185, 193 Radix $a+b$

$a^2 = 125$ 57

60193

$3a^2 = 75$

$3a^2b = 525$

$3ab^2 = 735$

$b^3 = 343$

60193

0

1. Cubus juxta n. 160 dividitur in membra tribus notis constantia; ac deindè quæritur cubus æqualis, aut proximè minor primo membro hic erit 125. Nam sequens 216 ipsum superat. Ab invento cubo radix extrahitur, atque scribitur loco radici destinato: hæc radix ad cubum elevata subducitur à primo membro, ac residuum subtus scribitur.

2. Residuo 60 secundum membrum adjungitur 193. Pro divisore assumitur triplum quadratum radicis $5 = 3 \times 25 = 75$. Hic divisor scribitur sub residuo 60, uno gradu ad dexteram promotu. Deindè divisio membro, sub quo est scriptus divisor, quotus 7 ad radicem adjungitur; est enim altera radicis pars.

3. Tria producta juxta cubi genesim fieri debent: primum radicis 7 in triplum quadratum $75 = 7 \times 75 = 525$, quod sub divisore scribendum est: secundum quadrati radicis 7 in triplum radicis 5 primi membri $= 15$: erit $49 \times 15 = 735$: quod sub primo producto scriben-

dum etiam est uno gradu ad dexteram promotum: demum cubus quoti $7 = 343$ subscribendus pariter sub secundo producto uno gradu ad dexteram promotus, ac summa colligenda $= 60193$, quæ à secundo membro subducenda est. Nihil remanet, adeòque numerus datus est cubus perfectus radicis 57. Demonstratio ex ipsa cubi genesi deducitur. Si cubus plura membra habeat, residuo membri jam pertracti membrum sequens adjungitur, atque operatio de more iteratur; ut in secundo membro exempli factum est.

163 Schol. 1. Methodus tradita algebrica est; eaque cubi jam analysis continetur. Breviorem aliam si cupis, en praxim. Primo membro ut prius tractato, residuo 60 adde primam notam membri secundi; erit $= 601$; hoc divide per triplum quadratum radicis inventæ ut prius; et quotum ad radicem adjunge. Deindè fac cubum ex hac radice, atque ipsum à membris, ad quæ operatio extenditur, subducito. In præsenti casu cubus radicis 57 est ipsemet à quo radix extrahitur; adeòque nihil debet remanere. Quod si plura membra haberet, residuo subductionis prima nota membri sequenti adjungi deberet, atque operatio iteranda, sumpto pro divisore triplo quadrato radicis hactenus inventæ. Hic esset $57 \times 57 \times 3 = 9747$. Quotus adjunctus primæ radici, daret radicem ad cubum formandum ut prius. Alio exemplo res clarior evadet.

Cubus 11, 390, 625. Radix 225.
8

Resid. cum prima
nota 33
Tripl. quad. rad. $2 = 12$
Cubus rad. $22 = 10648$

Resid. cum 1.ª nota 7426
Tripl. quad. rad. $22 = 1452$
Cubus rad. $225 = 11390625$

0

164 Schol. 2. Quum aliquid remanet, signum est numerum datum non esse cubum perfectum. Radix igitur inventa erit maximi cubi in eo contenti. Residuum autem, si ipsum notare oporteat, ut in divisione fieri solet, exprimitur per fractionem, cujus numerator est ipsum residuum, denominator verò differentia inter cubum proximè minorem, et proximè majorem minus unitate. Sic cubus primi membri 11, quod est cubus imperfectus, haberet in radice $2 + \frac{3}{18}$. Nam cubus 8 est proximior numero 11; differentia autem inter ipsum, et sequentem cubum $27 - 8 = 19$. Ex dictis autem mulctandus est unitate; igitur residuum erit $\frac{3}{18}$.

165 Schol. 3. Obiter notandum ex modò dictis, cubum majorem superare cubum proxime minorem, triplo radicis minoris ducto in radicem majoris plus unitate. In exemplo allato numero superiori, cubus 27 superat cubum

8 triplo radicis $2=6$, ducto in radicem $3=18$ $+1=19$. Idem in ceteris cubis observare licet. In quadratis verò excessus majoris supra minorem est duplum radicis minoris plus unitate. Quadratum 25 superat proximè minus 16 duplo radicis $4=8+1=9$. Nam $16+9=25$.

166 Schol. 3. Quod jam in numeris quadratis ostensum est; radicem nimirum, quæ inter duos integros continetur, nec integris, nec fractionibus integris adjectis perfectè exprimi posse (144), etiam ad numeros cubicos extendendum est. Ex g. radix cubica numeri 20, quæ major est numero integro 2, et minor 3; neque integro, ut est manifestum, neque integro fractione adjecta, perfectè umquam exponetur. Sit ejus radix $2\frac{4}{5}=\frac{14}{5}$; hæc ad integra reduci nequit: ergo nec ejus cubus ad integra reduci poterit. Nam $\frac{2744}{125}$ cubus predictæ fractionis æqualis non est 20; adeòque radix ejus $2\frac{4}{5}$ non potest esse radix cubica numeri 20. Inveniuntur itaque in cubis radices *surdæ* aut irrationales, quarum valorem exprimere perfectis numeris non possumus. Licet tamen per aproximationem magis ac magis accedere, ut in sequenti.

167 Probl. 2. *Radicem cubicam per approximationem extrahere.* Solut. Residuo cubi imperfecti post extractam radicem tot ternarii notarum decimalium addantur quod libuerit; deindè extractio radicis iteranda, ut in probl. præced. in radice inventa tòt notæ pro decimalibus segregandæ sunt, quod ternarii ciphrarum additi fuerint.

Exempl. Cubus 35 Radix 3, 2

```
 27
 ----
 8000
 27
 ----
 54
  36
   8
 ----
 5768
 ----
 2232 etc.
```

Posset rursus iterari extractio, additis tribus aliis notis decimalibus, ut supra: quod etiam in novo residuo fieri deberet, si approximatio major exigeretur. *Dem.* Quum abduntur tres, aut sex notæ, perindè est ac si numerus duceretur in 1000, aut 1000000; radix autem crescere debet proportionaliter 10es, aut 100es. Separatis deinde notis decimalibus, rursus dividitur per 10, aut 100: adeòque rursus minor evadit. Nihil ergo in radice mutatur, nisi quod ejusmodi partes quæ verè ad radicem pertinent, patefiunt; ac proindè accuratior radix habetur.

168 Schol. 1. Examen operationis fit, elevando radicem inventam ad tertiam potentiam, atque ipsi addendo residuum, siquod fuerit: productum restituere debet numerum datum, ut est manifestum.

169 Schol. 2. In fractionibus vulgaribus extractio radicis tam in numeratore, quam in denominatore fieri debet. Quando autem deci-

males adhibentur, curandum ut numerus decimalium sit semper ternarius, ut tres, sex, novem; quod, ut dictum est, additione notarum semper obtineri potest: quæ pariter in radice resecari debent juxta numerum ternarium, ita ut tribus adjectis in cubo, una respondeat in radice.

CAPUT V.

Proportiones, et series.

§. I.

Prænotiones.

170 Defin. 1. Proportio sivè analogia quantitatum est relatio, quæ inter ipsas intercedit. Quum etiam quantitas admittat magis, et minus, excesus, aut defectus unius respectu alterius, calculo subjici potest, atque comparari.

171 Defin. 2. Modus, quo una quantitas se habet ad alteram, *ratio* stilo mathematico vocatur. Omnes autem quantitates homogeneæ inter se rationem habent, seu relationem. Semper enim altera major, aut minor, aut æqualis est alteri. Hinc omnis ratio duos semper terminos supponit: primus dicitur *antecedens*, secundus *consequens*.

172 Defin. 3. *Proportio* est duarum rationum æqualitas. Hinc in omni proportione quatuor termini inveniuntur, aut saltem bis idem terminus repeti debet, ubi tres tantum reperiantur, ut in proportione *continua*. Hæc ita

appellatur, quum series quantitatum ita collocatur, ut prima sit ad secundam, ut hæc ad tertiam, tertia ad quartam. *Discreta* vero dicitur ea, in qua ordo interrumpitur. Series numerorum cardinalium est proportio continua: si in ipsa serie duo extremi cum primis comparentur interruptis mediis, discreta erit proportio: ex. gr. 3 ad 4 ut 8 ad 9. Proportio continua per longam terminorum seriem continuata, dicitur progressio, aut series.

173 Schol. *Rationes* diversis nominibus donantur pro diversitate excessus, aut defectus antecedentis ad consequentem. Si antecedens sit duplo, triplo, quadruplo major, dicitur ratio dupla, tripla, quadrupla: quod si minor fuerit eodem decremento, ratio dicitur subdupla, subtripla, subquadrupla etc. Æqualitas intercedens inter utrumque, ratio *æqualitatis* dicitur. Quum non duplo, sed tantum dimidio major est antecedens, ratio *sexquialtera* dicitur. Hæc etiam ad proportionem extenduntur.

§ II.

Ratio, et proportio arithmetica.

174 Defin. Ratio arithmetica est illa relatio unius quantitatis ad alteram ejusdem generis, in qua consideratur excessus aut defectus primæ quantitatis respectu alterius: qui excessus aut defectus antecedentis respectu consequentis dicitur differentia: eaque positiva erit, si antecedens sit minor consequente, negativa si sit consequente major. Hinc rationes arithmeticæ