males adhibentur, curandum ut numerus decimalium sit semper ternarius, ut tres, sex, novem; quod, ut dictum est, additione notarum semper obtineri potest: quæ pariter in radice resecari debent juxta numerum ternarium, ita ut tribus adjectis in cubo, una respondeat in radice.

CAPUT V.

Proportiones, et series.

§. I.

Prænotiones.

170 Defin. 1. Proportio sivè analogia quantitatum est relatio, quæ inter ipsas intercedit. Quum etiam quantitas admittat magis, et minus, excesus, aut defectus unius respectu alterius, calculo subjici potest, atque comparari.

171 Defin. 2. Modus, quo una quantitas se habet ad alteram, *ratio* stilo mathematico vocatur. Omnes autem quantitates homogeneæ inter se rationem habent, seu relationem. Semper enim altera major, aut minor, aut æqualis est alteri. Hinc omnis ratio duos semper terminos supponit: primus dicitur *antecedens*, secundus *consequens*.

172 Defin. 3. *Proportio* est duarum rationum æqualitas. Hinc in omni proportione quatuor termini inveniuntur, aut saltem bis idem terminus repeti debet, ubi tres tantum reperiantur, ut in proportione *continua*. Hæc ita

appellatur, quum series quantitatum ita collocatur, ut prima sit ad secundam, ut hæc ad tertiam, tertia ad quartam. *Discreta* vero dicitur ea, in qua ordo interrumpitur. Series numerorum cardinalium est proportio continua: si in ipsa serie duo extremi cum primis comparentur interruptis mediis, discreta erit proportio: ex. gr. 3 ad 4 ut 8 ad 9. Proportio continua per longam terminorum seriem continuata, dicitur progressio, aut series.

173 Schol. *Rationes* diversis nominibus donantur pro diversitate excessus, aut defectus antecedentis ad consequentem. Si antecedens sit duplo, triplo, quadruplo major, dicitur ratio dupla, tripla, quadrupla: quod si minor fuerit eodem decremento, ratio dicitur subdupla, subtripla, subquadrupla etc. Æqualitas intercedens inter utrumque, ratio *æqualitatis* dicitur. Quum non duplo, sed tantum dimidio major est antecedens, ratio *sexquialtera* dicitur. Hæc etiam ad proportionem extenduntur.

§ II.

Ratio, et proportio arithmetica.

174 Defin. Ratio arithmetica est illa relatio unius quantitatis ad alteram ejusdem generis, in qua consideratur excessus aut defectus primæ quantitatis respectu alterius: qui excessus aut defectus antecedentis respectu consequentis dicitur differentia: eaque positiva erit, si antecedens sit minor consequente, negativa si sit consequente major. Hinc rationes arithmeticæ

duæ sunt æquales, quum eamdem habent differentiam: positivam quidem in utraque, aut in utraque negativam. Itaque $a\ .\ a+b$ est æqualis $c\ .\ c+b$, quoniam utriusque differentia est $+b$: itemque $a\ .\ a-b$, et $c\ .\ c-b$, quarum utriusque differentia est $-b$. Proportio arithmetica est duarum rationum arithmeticarum æqualitas: quæ erit continua, si consequens primæ proportionis idem sit ac antecedens secundæ: sin minus, erit discreta. Proportio arithmetica sic scribitur, atque enuntiatur, a, $b=c$, d aut $a:b::c:d$; a est arithmeticè ad b, uti c ad d. Numeris etiam exprimitur $4:8::12:16$. Quatuor est arithmeticè ad octo, uti duodecim ad sexdecim: scilicet idem excessus invenitur, sivè differentia inter primos, atque inter secundos numeros. Termini primus, et ultimus dicuntur extrema; secundus, et tertius media.

175 Theor. 1. *In proportione arithmetica summa extremorum æqualis est summæ mediorum. Dem.* 1.mo in numeris. Sumantur quivis numeri arithmeticè proportionales $2:4::6:8$. Extremorum summa est $8+2=10$; mediorum verò $4+6=10$. Nam si primus terminus binario à secundo exceditur, idem pariter excessus est in quarto supra tertium: alioquin non dareter proportio arithmetica: ergo utrinque excessibus compensatis, summæ æquales evadere debent. 2.° in litteris. Quævis proportio arithmetica exprimi potest generali hac formula $a:a+d::b:b+d$; quæ suffectis numeris quibuscumque exacta invenietur; ut $2:2+3::6:6+3$. Jam summa extremorum est

$a+b+d$, summa mediorum $a+b+d$, evidenter æquales.

176 Theor. 2. *Si summa extremorum æqualis est summæ mediorum, termini sunt arithmeticè proportionales. Dem.* Esto $a+d=b+c$, in quibus a d sint extrema, b c media: si a excedit, aut exceditur à b quantitate $=x$, eadem pariter c excedere, aut excedi debet à d; alioquin summæ non essent æquales, ut supponitur: ergo sunt arithmeticè proportionales (174).

177 Corol. In proportione arithmetica loco mutari possunt termini, intacta proportione. Hoc tamen ex utraque parte fieri debet, ita ut antecedentes fiant consequentes, et vicissim consequentes ad locum antecedentium transferantur. Adhuc enim summa mediorum æqualis remanet extremorum summæ, ut in numeris luculentius videre licet. Si $2:3::5:6$, etiam erit $3:2::6:5$; collige utriusque extremi, ac medii summam; æqualis remanebit.

178 Probl. 1. *Datis tribus terminis, invenire quartum arithmeticè proportionalem.* Solut. Sint a, b, c tres termini arithmeticè proportionales; quæritur quartus x. Addantur medii: erit (per 175) $b+c=a+x$, et transponendo $x=b+c-a$. Determinetur valor formulæ in numeris $a=4$, $b=8$, $c=12$: jam $12+8=20-4=16$, quartus arithmeticè proportionalis. Nam $4:8::12:16$.

179 Defin. Medium proportionale dicitur, quod est simul consequens primæ rationis et antecedens secundæ. In proportione arithme-

tica $5 : 10 :: 10 : 15$, numerus 10, qui est antecedens secundæ, est consequens primæ.

180 Probl. 2. *Datis duobus terminis, medium arithmeticè proportionalem invenire.* Sint termini in proportione arithmetica continua a, x, b: erit $a+b=2x$, et $x=\frac{a+b}{2}$: scilicet semisumma extremorum æqualis est medio proportionali quæsito. Substituatur valor in numeris ad libitum, ex gr. $5+15=20$; hujus dimidium erit terminus quæsitus $5 : 10 :: 10 : 15$.

§. III.

Progressiones arithmeticæ.

181. Defin. Proportio continua per longam terminorum seriem eodem excessu, aut diminutione continuata, dicitur progressio, aut series arithmetica. Si progressio fiat per incrementum terminorum, erit progresio, aut series crescens, seu positiva: si differentia fuerit per decrementum, erit decrescens, et negativa. Quævis progressio arithmetica hac formula generali comprehendi potest: $a : a+d : a+2d : a+3d : a+4d$ etc. Communis differentia est d, quæ signo positivo afficitur, si progressio est crescens; negativo, si termini decrescunt.

182 Theor. 1. *In progressione arithmetica quorumqumque terminorum, summa duorum extremorum æqualis est summæ duorum mediorum ab extremis æquè distantium. Dem.* In formula art. præc. colligatur extremorum summa; ex. gr. $a+a+4d$, et duorum mediorum æquè

distantium $a+d+a+3d$, et reducendo $2a+4d$ in utraque. In numeris 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. addantur duo extremi seriei, et duo medii æquè distantes; summa invenietur par.

183 Theor. 2. *In progressione numerorum imparium summa extremorum, vel etiam duorum æquè distantium ab extremis, æqualis est duplo termini medii. Dem.* In formula $a+a+4d=(a+2d)2=2a+4d$. In numeris series erit 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 etc. $1+13=14=7\times2=14$.

184 Theor. 3. *In omni progressione arithmetica quilibet terminus continet primum terminum et toties exponentem, seu differentiam, quot sunt termini à primo ad ipsum exclusivè.* In formula $a : a+d : a+2d : a+3d : a+4d$ termini à primo ad ultimum exclusivè sunt quatuor, exponens seu differentia est d; erit igitur ultimus terminus $=a+4\times d=a+4d$, ut est manifestum. In numeris $1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 : 13$, termini sunt sex, differentia 2: erit igitur juxta theoriam expositam $2\times6=12$; at $12+1=13$, qui est ultimus terminus; quod adamussìm respondet.

185 Corol. 1. Facilè deduces maximum cujuscumque progressionis terminum, noto exponente seu differentia terminorum, atque ipsorum numero. Si enim excludatur ultimus, seu minuatur unitate terminorum numerus, ac ducatur in differentiam, producto additur primus terminus; ac summa erit ultimus progressionis, ut in numeris supra allatis factum vides. Formula generali æquatio sic institui

tica $5 : 10 :: 10 : 15$, numerus 10, qui est antecedens secundæ, est consequens primæ.

180 Probl. 2. *Datis duobus terminis, medium arithmeticè proportionalem invenire.* Sint termini in proportione arithmetica continua a, x, b: erit $a+b=2x$, et $x=\frac{a+b}{2}$: scilicet semisumma extremorum æqualis est medio proportionali quæsito. Substituatur valor in numeris ad libitum, ex gr. $5+15=20$; hujus dimidium erit terminus quæsitus $5 : 10 :: 10 : 15$.

§. III.

Progressiones arithmeticæ.

181. Defin. Proportio continua per longam terminorum seriem eodem excessu, aut diminutione continuata, dicitur progressio, aut series arithmetica. Si progressio fiat per incrementum terminorum, erit progresio, aut series crescens, seu positiva: si differentia fuerit per decrementum, erit decrescens, et negativa. Quævis progressio arithmetica hac formula generali comprehendi potest: $a : a+d : a+2d : a+3d : a+4d$ etc. Communis differentia est d, quæ signo positivo afficitur, si progressio est crescens; negativo, si termini decrescunt.

182 Theor. 1. *In progressione arithmetica quorumqumque terminorum, summa duorum extremorum æqualis est summæ duorum mediorum ab extremis æquè distantium. Dem.* In formula art. præc. colligatur extremorum summa; ex. gr. $a+a+4d$, et duorum mediorum æquè

distantium $a+d+a+3d$, et reducendo $2a+4d$ in utraque. In numeris 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. addantur duo extremi seriei, et duo medii æquè distantes; summa invenietur par.

183 Theor. 2. *In progressione numerorum imparium summa extremorum, vel etiam duorum æquè distantium ab extremis, æqualis est duplo termini medii. Dem.* In formula $a+a+4d=(a+2d)2=2a+4d$. In numeris series erit 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 etc. $1+13=14=7\times2=14$.

184 Theor. 3. *In omni progressione arithmetica quilibet terminus continet primum terminum et toties exponentem, seu differentiam, quot sunt termini à primo ad ipsum exclusivè.* In formula $a : a+d : a+2d : a+3d : a+4d$ termini à primo ad ultimum exclusivè sunt quatuor, exponens seu differentia est d; erit igitur ultimus terminus $=a+4\times d-a+ad$, ut est manifestum. In numeris $1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 : 13$, termini sunt sex, differentia 2: erit igitur juxta theoriam expositam $2\times6-12$; at $12+1=13$, qui est ultimus terminus; quod adamussìm respondet.

185 Corol. 1. Facilè deduces maximum cujuscumque progressionis terminum, noto exponente seu differentia terminorum, atque ipsorum numero. Si enim excludatur ultimus, seu minuatur unitate terminorum numerus, ac ducatur in differentiam, producto additur primus terminus; ac summa erit ultimus progressionis, ut in numeris supra allatis factum vides. Formula generali æquatio sic institui

posset. Sit primus terminus $=a$; differentia $=d$; numerus terminorum $=2$; terminus ultimus $=z$: erit $z=(a+d)(2-1)$.

186 Corol. 2. Habebitur etiam summa cujuscumque progressionis arithmeticæ, datis primo, atque ultimo progressionis termino, ac terminorum numero. Nam si utriusque summa ducatur in dimidium numerum terminorum, productum æquale erit summæ quæsitæ; tot enim dantur summæ primi, atque ultimi, quot sunt paria terminorum æquè distantium (182). Idem obtineri posset, si dimidium summæ primi atque ultimi duceretur in numerum terminorum: vel summa integra duceretur in numerum terminorum, ac postea per 2 divideretur: aut demum, si termini sint impares, ducendo terminum medium in numerum terminorum imparium. In hac enim serie numerus medius æqualis est semisummæ primi et ultimi, aut duorum quorumqumque ab ipso æquè distantium (183).

187 Schol. Ut brevitati consulamus, reliqua problemata hic innuere sufficiat, quorum solutio ex dictis facilè eruitur. 1. *Datis primo, et ultimo termino seriei, necnon et terminorum numero, differentiam invenire.* Solut. Subtracto primo ab ultimo termino, residuum dividatur per numerum terminorum unitate minutum; quotus erit differentia. 2. *Datis primo termino, differentia, et numero terminorum, ultimum terminum seriei invenire.* Solut. Ducatur differentia in numerum terminorum unitate minutum, ac producto primus terminus addatur: summa erit

ultimus terminus. 3. *Primo et ultimo termino datis, necnon et differentia, numerum terminorum invenire.* Solut. Subducatur primus ab ultimo, ac residuum per differentiam dividatur: quotus plus unitate erit numerus terminorum.

§. IV.

Ratio et proportio geometrica.

188 Defin. 1. Duæ quantitates possunt inter se comparari, ita ut in illis quotus consideretur, seu quoties una contineat alteram, aut in illa contineatur. Hujusmodi relatio in ordine ad quotum dicitur *ratio geometrica.* Modus illa scribendi est hujusmodi $a:b$, aut $2:4$. Exponens autem rationis est quotus. Sic rationis $8:4$ exponens est $=2$.

189 Corol. Rationem geometricam hac generali formula comprehendere possumus: $a:aq$, in qua a est antecedens; quotus vero, qui ex divisione consequentis per antecedentem obtinetur per q significatur. Productum verò ex quoto in antecedentem ducto, est ipse consequens, quia consideratur ut dividendum.

190 Theor. 1. *Valor rationis geometricæ non mutatur dum antecedens, et consequens per eamdem quantitatem multiplicantur, aut dividuntur. Dem.* In casu proposito eodem augmento aut decremento crescunt, aut decrescunt antecedens, et consequens: ergo remanet æqualitas in ratione unius ad aliam: quotus enim idem erit. Sit ratio $a:aq$; multiplicentur termini per m; productum erit am, amq: aut di-

vidantur per d; quoti $\frac{a}{d} : \frac{aq}{d}$ = primæ rationi $a : aq$. Si enim consequens per antecedentem dividatur, prodit quotus q, ut facta divisione patet: $\frac{amq}{am} = q$: et $\frac{adq}{da} = q : \frac{aq}{a} = q$.

191 Corol. Ex theor. præcedenti *praxis italica* vulgo dicta emanavit. In quacumque enim ratione geometrica complicatoribus terminis expressa, alia expressio simplicior inveniri potest, quæ loco primæ substituatur. Praxis est hujusmodi: quæratur communis utriusque numeri, aut quantitatis mensura maxima (52), per eamque dividatur tam antecedens, quam consequens: quoti dabunt duos alios terminos, qui in eadem erunt ratione geometrica ac dividendi. Sint numeri 168 : 240; per inventam communem maximam mensuram 24 uterque dividatur; quoti erunt in ratione eadem 7 : 10 = 168 : 240.

192 Defin. 2. Si plures sint rationes, atque earum termini antecedentes inter se, et consequentes pariter inter se multiplicentur, horum terminorum producta erunt in *ratione composita* rationum simplicium. Sint tres rationes $a : b$, $c : d$, $e : f$; facta multiplicatione antecedentium inter se, et consequentium itidem inter se, eorum producta $a\,c\,e : b\,d\,f$, erunt in ratione composita primarum trium rationum simplicium. In numeris 2, 6, 3 : 9, 4, 12; producta antecedentium 24, et consequentium 648 erunt in ratione composita priorum rationum simplicium.

193 Defin. 3. Si ex duabus rationibus simplicibus, et æqualibus ex g. $a : am$, $b : bm$ fiat quædam alia tertia $ab : abm^2$ ex duabus primis composita, hæc erit in ratione composita *duplicata* vel quadrata duarum componentium. Quotus enim in hac ultima est quadratum quoti cujusvis rationis simplicis. Quælibet autem ex his simplicibus $a : am$ erit ad compositam $ab : abm^2$ in ratione *subduplicata* quia ejus quotus m est radix quadrata alterius quoti.

194 Corol. Cujusvis rationis simplicis facilè obtinetur ratio duplicata, elevando utrumque terminum ad secundam potentiam: ex g. ratio duplicata 3 . 9, erit 9 : 81; et vicissim si quæritur ratio subduplicata duorum numerorum, radix quadrata ab utroque extracta erit ratio quæsita; ut 3 : 9 est ratio subduplicata 9; 81. Similiter 2 : 3 est ratio subduplicata rationis 4 : 9.

195 Defin. 4. Quod si tres rationes æquales, et simplices inter se multiplicentur, ratio ex illis composita erit triplicata respectu cujusvis simplicis, et hæc ad compositam erit in ratione subtriplicata. Sint rationes simplices $a : am$, $b : mb$, $c : cm$; ductis antecedentibus, et consequentibus prodit ratio triplicata $abc : abcm^3$. Quælibet autem ex simplicibus erit istius subtriplicata. Quod attinet ad numeros, eadem lex esto atque in ratione duplicata: eleventur nimirum ad cubos, si quæritur ratio triplicata; aut radix cubica extrahatur, dum illorum ratio subtriplicata investigatur. Ratio triplicata 2 : 3 erit 8 : 27; radices autem 2 : 3 in ratione subtriplicata suorum cuborum erunt.

196 Schol. Dantur etiam rationes *incom-*

mensurabiles, *surdæ*, *irrationales*, in quibus quotus nullis numeris exactè exprimi potest. Rationes vero in quibus quotus exactus obtinetur, *rationales*, et *commensurabiles* sunt. Ratio 1: $\sqrt{2}$ est incommensurabilis; nullo enim integro, aut fractione exprimi potest.

197 Defin 5. Proportio geometrica ea dicitur, quæ duas rationes geometricas æquales includit, ita ut antecedens primæ sit ad suum consequentem, ut antecedens alterius ad proprium consequentem est. Nimirum idem quotus in utraque ratione inveniri debet. Termini harum rationum dicuntur *geometricè proportionales*: ex. g. 2 : 4 : 3 : 6. Quum verò idem terminus est consequens primæ, et antecedens secundæ, proportio geometrica erit continua, ut 2 : 4 : 8 : 16; et terminus secundus dicitur medius proportionalis respectu suorum extremorum.

198 Schol. 1. Proportio geometrica frequentiùs scribitur 2 : 4 : : 8 : 16; et sic enuntiatur: *duo sunt geometricè ad quatuor*; *ut octo ad sexdecim*. Nonnumquam etiam sic scriptum invenies: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ quod idem significat atque $a : b : : c : d$; sive $a : b = c : d$.

199 Schol. 2. Proportio geometrica hac formula generali includi potest; $a : aq : : b : bq$: aut si libuerit $aq : a : : bq : b$, quæ eadem est, ac præcedens, terminis loco mutatis. Hæc autem formula proportionem geometricam continet: quotus enim in utraque ratione idem est.

200 Theor. 1. *In proportione geometrica producta extremorum*, *æquale est producto mediorum. Dem.* Adhibeatur formula generalis proportionem quamlibet geometricam repræsentans, $a : aq : : b : bq$. Ducantur extrema $a \times bq = abq$. Ducantur etiam media $aq \times b = abq$, evidenter æqualia. In numeris 2 : 4 : : 3 : 6, $2 \times 6 = 12$, $4 \times 3 = 12$.

201 Corol. 1. Si productum extremorum æquale est facto mediorum, termini erunt geometricè proportionales. Nam quotus idem esse debet in utraque ratione: ex g. extremorum productum abq habet exponentem q; eoque in altero producto variato jam non erit amplius factum mediorum abq, sed factum aliud, quod ex alio quoto assumpto consurgeret, ut est manifestum.

202 Corol. 2. Factores æqualium productorum sunt geometricè proportionales, aut quod aliis terminis idem est: ex duobus productis æqualibus semper proportio geometrica erui potest. Sint duo producta æqualia $ad = bc$, erit geometricè $a : b : : c : d$; productum enim mediorum æquale est producto extremorum, adeòque habetur proportio geometrica. Deduci etiam posset hæc altera analogia $a : c : : b : d$, aut $b : a : : d : c$; quocumque enim modo statuantur termini, adhuc productum extremorum æquale est facto mediorum, ut prius.

203 Theor. 2. *Si ponantur quator termini proportionales*, *quocumque modo collocentur*, *dummodò maneat æqualitas in quotis*, *adhuc remanet proportio. Dem.* Æqualitate manente in quotis in utraque ratione, productum extremo-

rum adhuc erit æquale producto mediorum: ergo termini sunt geometricè proportionales. En variationes præcipuas in numeris, ut clariùs percipiantur. Sint 2 : 4 : : 3 : 6.

1. Invertantur extrema, intactis mediis, 6: 4 : : 3 : 2; $6 \times 2 = 12$; $4 \times 3 = 12$.

2. Commutentur media intactis extremis, 2: 3 : : 4 : 6; $2 \times 6 = 12$; $3 \times 4 = 12$. Duplex hæc mutatio, quæ velut unica considerari potest, dicitur *alternando.*

3. Si antecedentes fiant consequentes, et vicissim consequentes antecedentes, 4: 2 : : 6: 3; hæc mutatio dicitur *invertendo.*

4. Si in utraque ratione antecedentibus consequentes, aut hi antecedentibus addantur; $2+4:4$ :: $3+6:6$: scilicet 6 : 4 :: 9 : 6; aut 2: $4+4$: : 3 : $6+6$; nimirum 2 : 8 : : 3 : 12; hæc mutatio dicitur *componendo.*

5. Si in utraque ratione consequentes ab antecedentibus, aut hi à consequentibus subtrahantur, 2 : $4-2$: : 3 : $6-3$; aut $2-4:4$: : $3-6:6$: hæc mutatio dicitur *dividendo.*

Manifestum est in litteris easdem mutationes fieri posse, atque eandem obtentum iri productorum æqualitatem. Permutentur quantitates litterales $a : am :: b : mb$ eo modo, quo numeri in exemplo adducti; æqualitas in factis, et in quotis remanebit. Nam parum interest in productis utrum primus in ultimum, aut ultimus in primum ducantur, factores enim semper idem sunt. In duabus verò, permutationibus ultimo loco adductis, proportionaliter augentur, aut minuuntur extrema, aut media;

adeòque æqualitas in productis perseverat.

204 Probl. 1. *Datis tribus terminis, quartum proportionalem invenire.* Solut. Sint tres termini dati a, b, c, et x quartus quæsitus; posita proportione erit $a : b : : c : x$, et productum extremorum $ax = bc$, et $x = \frac{bc}{a}$ nimirum productum mediorum dividi debet per factorem notum, quotus erit alter factor incognitus, et quæsitus (139). Hæc est praxis regulæ aureæ, aut trium, de qua infra.

205 Probl. 2. *Datis duobus terminis, medium geometricè proportionalem invenire.* Solut. Ducantur dati termini inter se, atque à producto radix quadrata extrahatur; hæc erit terminus medius geometricè proportionalis inter duos datos. *Dem.* Sint tres termini a, x, c, in proportione geometrica continua: extrema cognita a et c: incognitus quæsitus x. Quoniam supponitur proportio continua, hac formula debet exponi, $a : x : : x : c$; ergo $ac = xx = x^2$: ergo $\sqrt{ac} = \sqrt{x^2} = x$. Erit igitur $\sqrt{ac}$ medium proportionale quæsitum.

206 Schol. In proportionibus termini antecedentes, et consequentes vocantur *homologi*, sivè ejusdem nominis; unde idem est jubere terminos homologos inter se multiplicare, atque antecedentes inter se, et consequentes inter se ducere.

207 Theor. 3. *Si termini homologi duarum proportionum inter se multiplicentur, aut dividantur; producta, aut quoti erunt proportionalia.* Dem.

Sit $a : aq :: b : bq$.

Et $c : cm :: d : dm$.

Multiplicati $ac : acmq :: bd : bdmq$.

Divisi $\frac{a}{c} : \frac{aq}{cm} :: \frac{b}{d} : \frac{bq}{dm}$

In utroque casu productum extremorum æquale est facto mediorum. Quotus etiam in prima ratione est mq: in secunda verò est etiam mq, qui quidem certè sunt æquales. Substituantur numeri, ut clarior res evadat.

1.ª proport. $a : aq :: b : bq$.

$4 : 4\times2 :: 6 : 6\times2$

$4 : 8 :: 6 : 12$

2.ª proport. $c : cm :: d : dm$

$3 : 3\times5 :: 7 : 7\times5$

$3 : 15 :: 7 : 35$

Multipl. $12 : 120 :: 42 : 420$ quotus $\frac{1}{10}$

Divis. $\frac{4}{3} : \frac{8}{15} :: \frac{6}{7} : \frac{12}{35}$ quotus $\frac{2}{5}$

Producta tam extremorum quam mediorum in primo$=5040$; in secundo verò$=\frac{48}{105}$.

208 Theor. 4. *Quum in duabus proportionibus consequentes primæ proportionis æquales sunt antecedentibus alterius, antecedentes primæ ad consequentes secundæ proportionis etiam proportionales erunt.*

$$\begin{array}{ll} a : b :: c : d & 8 : 2 :: 12 : 3 \\ b : e :: d : f & 2 : 6 :: 3 : 9 \\ \hline \text{erit } a : e :: c : f & 8 : 6 :: 12 : 9 \end{array}$$

Nam facta multiplicatione, per theor. 3, erit

$ab : be :: cd : df$: Et per art. 19 ad simpliciores terminos deducta, erit $a : e :: e : f$.

209 Theor. 5. *Quum termini medii unius proportionis æquales sunt terminis extremis alterius, etiam reliqui perturbatè ex æquo proportionales erunt.* Dem. Sint duæ proportiones

$$\begin{array}{ll} a : b :: c : d & 8 : 2 :: 12 : 3 \\ b : e :: f : c & 2 : 6 :: 4 : 12 \\ \hline \text{erit } a : e :: f : d & 8 : 6 :: 4 : 3. \end{array}$$

Nam multiplicati $ab : be :: ef : dc$, et facta reductione, $a : e :: f : d$.

210 Theor. 6. *Si termini proportionales sunt, illorum quadrata, cubi, reliquæ potentiæ, proportionalia erunt.* Dem. Sit $a : b :: c : d$, erit $ad=bc$ (200), et $a^2 d^2 = b^2 c^2$, et $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$ (202).

211 Corol. Si quadrata sunt proportionalia, eadem proportio invenietur in radicibus. Nam si $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$, $a^2 d^2 = b^2 c^2$; et $ad = bc$, et $a : b : c : d$ (202). En permutationum schema, quæ in quantitatibus, aut loco mutatis, aut aliis quantitatibus auctis, vel minutis ocurrere possunt mathematica, aut philosophica consideratione digniores. Sit.

$a : am :: b : bm$.

Erit 1. invertendo $am : a :: bm : b$

2. alternando $a : b :: am : bm$

3. componendo $a+am : a :: b+bm : b$

et $a+am : am :: b+bm : bm$

4. dividendo $a-am : a :: b-bm : b$

et $a-am : am :: b-bm : bm$

aut etiam $am-a : a :: bm-b : b$

et $am-a : am :: bm-b : bm$

5. Ex æquo ordinatè : si $a : am :: b : bm$

et $am : amn :: bm : bmn$

erit $a : amn :: b : bmn$

6. Ex æquo perturbatè: si $a : am :: b : bm$

et $am : amn :: \frac{b}{n} : b$

erit $a : amn :: \frac{b}{n} : bm$

7. $a^2 : a^2 m^2 :: b^2 : b^2 : m^2$

8. $a^2 : \frac{a^2}{m^2} :: b^2 : \frac{b^2}{m^2}$

9. $a : amc :: b : bmc$

10. $a : \frac{am}{c} :: b : \frac{bm}{c}$

11. $ac : am :: bc : bm$

12. $\frac{a}{c} : am :: \frac{b}{c} : bm$:

13. $ac : amc :: b : bm$

14. $\frac{a}{c} : \frac{am}{c} :: b : bm$

15. $ac : amc :: bd : bmd$

16. $\frac{a}{c} : \frac{am}{c} :: \frac{b}{d} : \frac{bm}{a}$

17. $ac : amd :: bc : bmd$

18. $\frac{a}{c} : \frac{am}{d} :: \frac{b}{c} : \frac{bm}{d}$

19. Si $a : am :: b : bm$

et $c : cn :: d : dn$

erit $ac : acmn :: bd : bdmn$

20. *Si* $a : am :: b : bm$

$c : cn :: d : dn$

$f : fr :: g : gr$

$h : hs :: l : ls$

etc.

erit $acfh : acfhmnrs :: bdgl : bdglmnrs$.

In his omnibus permutationibus proportionem remanere facilè quisque precipiet, quum instituta divisione eundem exponentem ubiquè repererit; aut multiplicatis mediis, atque extremis inter se, producta æqualia conspexerit.

§. V.

Progressiones geometricæ.

212 Defin. Series terminorum eodem incremento, aut decremento proportionali crescentes, aut decrescentes, aut quod idem est, eundem quotum habentes, dicitur *progressio geometrica*. Hinc ut in duobus rationibus proportionem geometricam constituentibus, idem quotus obtinetur, idem pariter in progressione observari debet. Series numerorum 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 etc. progressionem geometricam constituunt, in qua exponens, sivè quotus est 2.

213 Corol. Progressio geometrica est proportio continua per plures terminos deducta. Quod si quotus sit numerus integer, progressio erit crescens; si autem pro quoto fractio habeatur, erit series decrescens, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ etc.

214 Schol. Progressio geometrica hac formula generali exprimi potest: $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$ etc., cui substitui possunt quivis numeri, ut aliquod objectum determinatum menti appareat, ut $1 : 2 : 4 : 8 : 16$. Nam assumpto $a=1$, et $q=2$, erit $aq=1\times2=2$, et $aq^2=1\times2\times2=4$, etc. Pari methodo in altera progressione, cujus quotus sit 3, substituere licebit litteris, numeros respondentes $1 : 3 : 9 : 27 : 81$ etc., ut in altera factum est.

215 Theor. 1. *In quavis progressione geometrica primus terminus est ad tertium, ut quadratum primi ad quadratum secundi; et primus ad quartum, ut cubus primi ad cubum secundi. Dem.* Sumatur formula quamvis progressionem representans, $a : aq : aq^2 : aq^3$, per theor. erit $a : aq^2 :: a^2 : a^2 q^2$, nam productum extremorum æquale est facto mediorum. Propter eamdem rationem erit $a : aq^3 :: a^3 : a^3 q^3$. Productum extremorum in utroque casu æquale est producto mediorum. In numeris est etiam manifestum. Sit progressio $2 : 4 : 8 : 16$, (à quocumque enim termino series incipi potest); erit $2 : 8 :: 4 : 16$, et $2 : 16 :: 8 : 64$.

216 Corol. Hinc deducitur in quavis progressione geometrica rationem primi ad tertium esse duplicatam rationis primi ad secundum. Et rationem primi ad quartum triplicatam primi ad secundum (195).

217. Theor. 2. *Terminus ultimus cujuscumque progressionis geometricæ æqualis est producto ex primo termino ducto in potentiam quoti, sivè in quotum elevatum ad eam potentiam,*

cujus exponens est numerus terminorum, dempto primo. Dem. Sit formula $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$; terminus ultimus aq^4 æqualis est producto ex $a \times q^4$; quoto scilicet elevato ad quartam potentiam. Nam termini dempto primo sunt quatuor. In numeris sint $1 : 2 : 4 : 8 : 16$; ultimus terminus 16 æqualis est producto $1\times16=16$, quod est potentia quarta quoti 2: tot enim sunt termini excepto primo in progressione.

218 Corol. Si ergo numerus terminorum dicatur, aut repræsentetur per n, terminus ultimus per z, habebitur æquatio $z=aq^{n-1}$.

219 Theor. 3. *In progressione geometrica summa omnium terminorum excepto ultimo, est ad summam omnium terminoram, excepto primo, ut unitas ad communem quotum. Dem.* Sumantur ex formula quotcumque termini $a : aq : aq^2 : aq^3$; erit $a+aq+q^2 : aq+aq^2+aq^3 :: 1 : q$. Nam productum extremorum est$=aq+q^2+aq^3$, evidenter æquale producto mediorum. Patet etiam in numeris; sit $1 : 2 : 4 : 8 : 12$; summa omnium excepto ultimo $= 15$: summa omnium excepto primo$=30$. Erit $15 : 30 :: 1 : 2$, quotus progressionis.

220 Corol. Ex theor. præc. potest reperiri formula ad definiendam summam cujusvis progressionis geometricæ. Dicatur summa$=s$; summa terminorum ultimo excluso$=s-z$: summa terminorum dempto primo$=s-a$. Ex theor. præc. oritur æquatio.

$$s-z : s-a :: 1 : q$$

Et per multiplicationem extremorum; et mediorum $sq-qz=s-a$

Et transp. $sq-s-zq=-a$

Et rursus $sq-s=zq-a$

Et resolvendo factores $s(q-1)=zq-a$

Et separando factorem cognitum $s=\frac{zq-a}{q-1}$

In numeris sit progressio 1 : 3 : 9 : 27 : 81,

juxta formulam $s=\frac{zq-a}{q-1}$ erit $z=81$ $q=3$, et

$\frac{zq-a}{q-1}=\frac{243-1}{3-1}=\frac{242}{2}=121=1+3+9+27+81$.

221 Corol. 1. Si æquatio præcedens $\frac{zq-a}{q-1}=s$ cum altera (218) $aq^{2}-1=z$ conferatur, reliqua progressionis geometricæ problemata resolvi possunt. Nimirum *ex his quinque (termino primo, communi quoto, numero terminorum, termino ultimo, et summa) tribus datis, invenire reliqua.* Verum hæc longiori calamo prosequenda forent, et ad logarithmos recurrendum, de quibus infra.

222 Corol. 2. In quibuslibet rationibus geometricis æqualibus summa omnium antecedentium terminorum est ad summam omnium consequentium, ut unitas ad communem quotum. Sint rationes, $a : aq : b : bq : c : cq$, etc.; erit etiam $a+b+c : aq+bq+cq :: 1 : q$. In numeris 2 : 4 :: 3 : 6 : 4 : 8; summa antecedentium, et consequentium erunt 2+3+4 : 4+6+8 :: 1 : 2. Nam 9 : 18 :: 1 : 2.

CAPUT SEXTUM.

USUS PROPORTIONUM.

§. I.

Regula aurea.

223 Defin. Regula trium vulgo dicta, à maxima ejus utilitate *aurea* etiam appellata, est proportio geometrica, in quo tres termini sunt cogniti, et quartus incognitus inquiritur: adeòque jam in problem. num. 204 exposita est. At quum plerumque nonnula ocurrant in praxi, quæ negotium facessant: operæ pretium est ea antevertere, atque explanare. Regula trium, vel est *directa*, vel inversa.

224 Defin. 1. Regula trium *directa* illa dicitur, in qua terminus quartus ignotus tanto major, aut minor est tertio, quanto secundus primo major, aut minor fuerit: ex g. 15 : 20 :: 25 : x. Evidens est quartum terminum x tanto majorem esse debere tertio 25, quo 20 secundus superat primum 15.

225 Schol. 1. Pronum etiam est animadvertere, saltem duos terminos in proportione homogeneos esse debere, ut proportio servetur. Fiat quæstio: in fodina 10 operæ 30 saccos metalli quotidie exportant: 40 operæ quot saccos ejusdem materiæ exportabunt? Operæ in primo, et tertio termino; metallum in secundo, et quarto homogenei sunt. Minimè autem opus est, ut semper eundem ordinem ser-