

Et per multiplicationem extremorum; et mediorum

$$sq - qz = s - a$$

Et transp.

$$sq - s = zq - a$$

Et rursus

$$sq - s = zq - a$$

Et resolvendo factores

$$s(q-1) = zq - a$$

Et separando factorem cognitum

$$s = \frac{zq - a}{q - 1}$$

In numeris sit progressio

$$1 : 3 : 9 : 27 : 81,$$

juxta formulam $s = \frac{zq - a}{q - 1}$ erit $z = 81$ $q = 3$, et

$$\frac{zq - a}{q - 1} = \frac{243 - 1}{3 - 1} = \frac{242}{2} = 121 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81.$$

221 Corol. 1. Si æquatio præcedens $\frac{zq - a}{q - 1} = s$ cum altera (218) $aq^2 - 1 = z$ conferatur, reliqua progressionis geometricæ problemata resolvî possunt. Nimirum *ex his quinque (termino primo, communi quoto, numero terminorum, termino ultimo, et summa) tribus datis, invenire reliqua.* Verum hæc longiori calamo prosequenda forent, et ad logarithmos recurrendum, de quibus infra.

222 Corol. 2. In quibuslibet rationibus geometricis æqualibus summa omnium antecedentium terminorum est ad summam omnium consequentium, ut unitas ad communem quotum. Sint rationes, $a : aq : b : bq : c : cq$, etc. erit etiam $a + b + c : aq + bq + cq : : 1 : q$. In numeris $2 : 4 : : 3 : 6 : 4 : 8$; summa antecedentium, et consequentium erunt $2 + 3 + 4 : 4 + 6 + 8 : : 1 : 2$. Nam $9 : 18 : : 1 : 2$.

CAPUT SEXTUM.

USUS PROPORTIONUM.

§. I.

Regula aurea.

223 Defin. Regula trium vulgo dicta, à maxima ejus utilitate *aurea* etiam appellata, est proportio geometrica, in quo tres termini sunt cogniti, et quartus incognitus inquiritur: adeoque jam in problem. num. 204 exposita est. At quum plerumque nonnulla occurrant in praxi, quæ negotium facessant: operæ pretium est ea antevertere, atque explanare. Regula trium, vel est *directa*, vel *inversa*.

224 Defin. 1. Regula trium *directa* illa dicitur, in qua terminus quartus ignotus tanto major, aut minor est tertio, quanto secundus primo major, aut minor fuerit: ex g. 15: 20: : 25: x . Evidens est quartum terminum x tanto majorem esse debere tertio 25, quo 20 secundus superat primum 15.

225 Schol. 1. Pronum etiam est animadvertere, saltem duos terminos in proportione homogeneos esse debere, ut proportio servetur. Fiat quæstio: in fodina 10 operæ 30 saccos metalli quotidie exportant: 40 operæ quot saccos ejusdem materiæ exportabunt? Operæ in primo, et tertio termino; metallum in secundo, et quarto homogenei sunt. Minimè autem opus est, ut semper eundem ordinem ser-

vent. Quum enim termini servata proportione multimodis variari possint, eo pariter ordine in regula aurea disponi poterunt: ex. g.

10 operæ: 30 sac. :: 40 operæ: x , numerum saccorum, vel 10 operæ: 40 operas:: 30 sacci: x , num. sacc. Hæc methodus postrema disponendi terminos quoddammodo conformior est; nam milla termini homogenei inter se comparantur; atque eodem praxis recidit. Multiplicetur $3 \times 40 = 120$, et hoc productum per primum terminum 10 dividatur; 320 erit quartus terminus quæsitus.

226 Schol. 2. Quum primo intuitu apparet proportio inter tertium, et quartum terminum, à multiplicatione et divisione supersedere possumus; sic in exemplo adducto, quum 10 sit quarta pars secundi termini 40; etiam 30 erit quarta pars termini x ignoti: undè multiplicando $30 \times 4 = 120$, quartus habebitur.

227 Defin. 2. Regula trium est *inversa*, quum ex terminis in quæstione propositis apparet, quartum terminum ignotum tantò majorem esse debere tertio, quantò secundus minor est primo; aut contrà, tantò minorem quantò secundus major est primo. Hujusmodi est quæstio sequens: 6 operæ 24 horis aliquod opus in fodina expleverunt: quot horis 18 operæ illud explevissent? Dispositis terminis homogeneis inter se collatis, statim apparet num directa, aut inversa sit proportio.

6 operæ: 18 operas:: 24 horæ: x . Manifestum est quartum terminum x , eo minorem esse debere tertio, quo secundus major

est primo. Duodeviginti enim operæ celerius, quam sex opus debent conficere. Hinc ut ad rectam dispositionem deducantur termini, sic collocari deberent.

6 operæ: 18 operas:: x horæ: 24 horas. Multiplicatis deindè extremis 6×24 , ac producto 144 diviso per terminum secundum 18, quotus 8 erit tertius terminus quæsitus. Si verò disponantur, ut primo loco, multiplicetur primus per tertium, et productum dividatur per secundum.

228 Schol. 1. Quævis proportio inversa facillime in directam converti potest, mutatis directo ordine terminis. Sic antecedens proportio:

6 operæ: 18 operas:: x horæ: 24 horas.

18 operæ: 6 operas:: 24 horæ: $x = 8$ hor.

226 Schol. 2. Quando in proportionibus occurrunt termini mixti speciei superioris, et inferioris, ad infimam reducendi sunt, quod pariter in fractionibus faciendum est: ex. g. 4 ped. 5 pol. 2 ped. 4 pol. prius reduci debent ad pollices 53 pol. (28); deindè ad proportionem inquirendam deveniendum. Sint etiam $2\frac{1}{2}: 3\frac{4}{5}$; prius ad fractiones integri reduci debet $\frac{5}{2}, \frac{19}{5}$ (55); ac postea terminus incognitus investigandus erit.

230 Schol. 3. Quod si non omnibus terminis, sed uni, aut duobus tantum adhæreat fractio, integro cum fractione prius ad unicam fractionem reducto, ceteri more fractionum disponendi sunt, unitate supposita. Ex. g. $2\frac{1}{2}: 3\frac{4}{5}: x$ sic prius disponi debent $\frac{5}{2}: \frac{19}{5}: \frac{19}{5}$; $x = \frac{91}{50}$ (56) = $1\frac{41}{50}$ (51).

§. II.

Regula aurea composita.

231 Defin. Regula aurea est *composita*, quum ad principales terminos alii accessorii adduntur, qui per multiplicationem cum principalibus admiscuntur, ut tandem ad tres reducuntur.

232 Probl. 1. Regulam trium compositam ritè adhibere. Solut.

Exemplum. Milites 30, 10 dieb. vallum 20 pedum circumducunt: 50 milit. 4 dieb. quot pedum vallum ducent? Ut prius ad tres principales terminos reducantur, disponantur duæ proportiones.

30 mil: 20 ped. :: 50 mil.: ped. x .
10 dies: 20 ped. :: 4 dies: ped. x

Ducatur jam numerus militum in numerum dierum in utraque parte proportionis $30 \times 10 = 300$, et $50 \times 4 = 200$. Jam ad regulam trium simplicem compositam redacta est, atque ejusdem methodo pertractanda.

$$300: 20 :: 200: 13\frac{1}{3}$$

Dem. Manifestum est idem opus 30 operarios 10 dies laborantes confecturos, ac 300 unico die: similiter 50 laborantes per dies quatuor, idem opus perficient, ac 200 una die: ergo duæ proportiones in unam coalescunt, regula communi pertractanda.

233 Schol. Quamvis theoria hæc exacta sit,

atque in quantitatibus abstractis ad calculos deducta optimè respondeat, in praxi tamen nonnumquam fallere potest. Nam si domum ex g. 100 operæ unius anni spatio à fundamentis ædificant; malè deduceres 36500 uno die eandem extracturos. Opus enim erat ad calculos etiam reducere impedimenta, quæ sibi ipsis inducerent tot operæ simul laborantes in constructione ædificii; quæ quidem nullo numero adjuncto superari possunt, nec in supputationem venire. Hoc in mechanica semper præ oculis habendum.

234 Probl. 2. Regulam auream adhibere, quum septem, aut novem termini in quæstione proponuntur. Solut. Eadem est praxis, ac præcedens, quotcumque terminis constet problema. Reducuntur prius termini per multiplicationem ad regulam simplicem, atque hæc de more tractatur: ex. gr. in præcedenti exemplo potest quæstio ita proponi: 30 milites, 10 diebus, 8 horis; 20 ped. vallum duxerunt: 50 milites, 4 diebus, 6 horis quot pedes conficient? Reducantur primum ad infimam speciem horarum dies (35), quæ reductio dabit 248, et 102 horas pro totali producto 10 dierum cum 8 horis, et 4 dierum 6 horarum: deinde prima, et secunda proportio ad unam traducantur, ut in sequenti schemata.

$$\left. \begin{array}{l} 30 \text{ mil.} : 20 \text{ ped.} :: 50 \text{ mil.} \\ 248 \text{ hor.} : 20 \text{ ped.} :: 102 \text{ hor.} \end{array} \right\} : x$$

$$7440 : 20 :: 5100 : x$$

$$x = \frac{10200}{744} = 13 + \frac{22}{31} = 13\frac{2}{31} \text{ circiter.}$$

235 Schol. Regula proportionum compo-

sita est regula simplex repetita: undè etiam in duas simplices resolvi potest hoc modo. In prima ponuntur termini principales, ac de more resolvitur. In secunda primus terminus est ille accessorius, qui primo termino principali adhærebat; secundus est quartus proportionalis inventus in prima proportione; tertius est alter accessorius secundæ partis primæ proportionis, ad quos quartus proportionalis inquirendus est. Ex. gr. Tres molæ, 4 horis, 30 modios molunt; 5 molæ, 6 horis, quot modios in farinam convertent? En duplici modo quæstionem resolutam.

$$\begin{array}{l} 3 \text{ mol.} : 30 \text{ mod.} :: 5 \text{ mol.} : x \\ 4 \text{ horæ} : 30 \text{ mod.} :: 6 \text{ horæ} : x \\ 12 : 30 : : 30 : 75 \end{array}$$

Secundo modo in scholio indicato sic resolvitur.

$$\begin{array}{l} 3 \text{ mol.} : 30 \text{ mod.} :: 5 \text{ mol.} : 50 \text{ mod.} \\ 4 \text{ hor.} : 50 \text{ mod.} :: 6 \text{ horæ} : 75 \text{ mod.} \end{array}$$

Idem est quartus terminus utrobique; adeoque praxis eodem recidit. Quod si regula proportionis composita inversa fuerit, ut si proponatur problema: 3 mol. 4 hor. 30 modios in farinam convertunt, quot horis 75 mod. 5 molæ convertent? Disponantur termini principales et accessorii ordine conveniente, ut proportio ritè instituat.

$$\begin{array}{l} 3 \text{ molæ} : 30 \text{ mod.} : 4 \text{ hor.} : : \\ 5 \text{ molæ} : 75 \text{ mod.} : x \end{array}$$

Deindè multiplicentur invicem primus princi-

palis, tertius, et quintus terminus, ac productum dividatur per secundum et quartum invicem multiplicatos.

$$3 \times 4 = 12 \times 75 = 900$$

$$\frac{900}{150} = 6.$$

$$30 \times 5 = 150$$

Potest etiam in tot regulas simplices resolvi, ut art. 235 expositum est.

$$3 \text{ molæ} : 4 \text{ hor.} : 30 \text{ mod.} :: 5 \text{ molæ} : 4 \text{ hor.} : x = 50$$

$$5 \text{ molæ} : 50 \text{ mod.} : 4 \text{ hor.} :: 5 \text{ molæ} : 75 \text{ mod.} : \text{hor. } x = 6.$$

§. III.

Proponuntur compendia pro regulis proportionum.

236 Comp. 1. Quum in proportione, aut regula directa primus terminus continet secundum nullo residuo, aut in ipso continetur, tum reduci potest proportio ad minimos terminos (191), ac regulæ praxis multò facilior evadit: ex. gr. si libræ 4 valent 20 aureos; quid libræ 15? Proportio redacta ad minimos terminos est 1 : 5 :: 15. Duc igitur 15 x 5 = 75 erit quartus terminus quæsitus, nam unitas non dividit. Si terminos de more tractaveris, eundem numerum pro quarto termino obtinebis. Pro regula inversa, termini etiam invertendi erunt, ut, quum ad minimos terminos redacti fuerint, regula instituat. In exemplo adducto ex directa fiat inversa proportio: si 20 aurei dant

libras 4: ad lib. 15 quot aurei requiruntur? Quia 20: 4 sunt reciprocè, ut 15 ad quartum quaesitum; minimi termini 5: 1 comparandi sunt cum tertio et quarto: ductis igitur $5 \times 15 = 75$, habebitur quartus, ut supra.

237 Comp. 2. Plerumquè, maximè quum numeri pluribus notis constant, ad evitandum prolixioris divisionis fastidium, dividatur secundus terminus per primum, et quotus ducatur in tertium, aut tertius per primum, et quotus ducatur in secundum. In exemplo superiori 20 per quatuor dividatur; et quotus 5 ducatur in tertium terminum $15 = 75$: aut $\frac{25}{4} = 3\frac{3}{4} \times 20 = 60 + \frac{60}{4} = 60 + 15 = 75$.

238 Comp. 3. Potest etiam sola divisione res confici. Dividatur primus terminus per secundum, et per quotum inventum dividatur etiam tertius. Insistendo eidem exemplo 4: 20:: 15, divisio primo termino per secundum, nimirum $\frac{4}{20}$, quotus $= \frac{1}{5}$ (52); per hunc dividatur tertius terminus 15, erit: $\frac{15}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{15}{5} = 75$ (60).

239 Com. 4. Si fractiones afficiant primum terminum tantum, ut si dicatur $12\frac{1}{2}$ dant 4, quid 20? Multiplica per denominatorem 2 tam primum terminum $12\frac{1}{2}$, quam tertium 20; producta 25: 40 eandem rationem obtinebunt in secunda proportione atque in prima; 25: 4:: 40: $x = 6\frac{10}{5} = 6\frac{2}{3}$. Si afficiant secundum terminum tantum, veluti si dicatur 12, dant $22\frac{1}{2}$, quid 4? Satis est multiplicare per denominatorem 2 tam 12, quam $22\frac{1}{2}$; producta 24: 45:: 4, eandem ac primam proportionem exhibebunt, et quartum dabunt proportionalem $7\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Pariter si fractiones ejusdem nominis adhaereant primo, et tertio termino, ut $4\frac{1}{2}$: 15:: $7\frac{1}{2}$: x , multiplicentur ambo per denominatorem 4; producta 17 et 29 erunt in eadem ratione ad suos consequentes 17: 15:: 29: $25\frac{10}{17}$. Demum si termini homologi sunt minutiae ejusdem nominis, ut $\frac{5}{4}$: 20:: $\frac{2}{4}$: x deletis denominatoribus, numeratores fractionibus substituantur; erit proportio 3: 20:: 2: $13\frac{1}{3}$. Dem. In omnibus propositis exemplis termini homologi per eundem numerum multiplicantur; aut valores æquales substituuntur: ergo valor non mutatur (47). *Hujusmodi compendia dicuntur italica; vel quia itali, proprio commodo semper studentes, illa invenerunt, vel quia ipsis sæpius utuntur.*

§. IV.

Regula societatis.

240 Defn. Torum dividere in partes certa quadam proportione, vulgò dicitur *Regula societatis*; eo quod homines mercaturæ addicti, inita societate, solent quasdam pecuniæ summas in commune conferre, ut lucrum, aut damnum ex mercatura proveniens inter ipsos pro rata portione dividatur.

241 Probl. 1. Regulam societatis simplicem adhibere. Solut.

Exempl. Tres mercatores Antonius, Bernardus, Consalvus, inita societate, 800 aureos lucrati sunt; primus in communem sortem contulit aureos 100; secundus aureos 160; tertius 240. Quaritur uniuscujusque lucrum. Ut hoc

regula proportionum deducatur, comparentur termini sequenti methodo. Pro primo termino colligatur summa omnium pecuniarum=500: pro secundum lucrum ex negotiatione reportatum; aut si damnum fuisset, summa damni: in casu summa lucri=800: deinde tres instantur proportiones, ut uniuscujusque lucrum deducatur.

$$500 : 800 :: 100 : x = 160 \text{ A.}$$

$$500 : 800 :: 160 : x = 256 \text{ B.}$$

$$500 : 800 :: 240 : x = 384 \text{ C.}$$

800

242 Probl. 2. Regulam societatis compositam declarare. Solut. Nunquam potest evenire, ut societas à diversis mercatoribus inita, non eodem tempore inceperit: tum habenda etiam est ratio temporis, atque hoc in supputationem, ut æquis partibus procedatur, immiscendum.

Exempl. Anton. contulit in communem sortem aureos 50, annis tribus; Bern. aur. 100, annis duobus; Cons. aureos 240, anno 1: commune lucrum, fuit aur. 500. Ad inveniendum singulorum lucrum, ducatur summa uniuscujusque in tempus impensum negotiationi; deinde ex summa trium productorum fiat primus terminus proportionis; secundus erit lucrum, aut damnum, si vice lucri detrimentum contigerit; tertius terminus erit cujusvis summa in tempus ducta; quartus ignotum dabit lucrum, aut damnum ab unoquoque ferendum.

$$600 : 500 :: 150 : 125 \text{ A.}$$

$$600 : 500 :: 200 : 166\frac{2}{3} \text{ B.}$$

$$600 : 500 :: 250 : 208\frac{2}{3} \text{ C.}$$

500

243 Schol. 1. Pari modo operatio procedet, etiamsi pecuniæ summa à sociis collata æqualis fuisset, tempus verò inæquale: ex g. si omnes 150 aureos contulissent, primus autem ad 6, secundus ad 8, tertius ad 12 menses pecuniam collocassent; primus terminus proportionis erit summa mensium=26: secundus lucrum, aut damnum ex g. 500: tertius menses singulorum; quartus dabit lucrum aut damnum uniuscujusque pro rata portione distribuendum.

244 Schol. 2. Ad hanc regulam reduci potest summa distribuenda inter plures secundum datam proportionem, quod in legatis testamentorum frequenter occurrere solet: v. g. si quis testamento legat 1000 aureos inter famulos distribuendos juxta famulitii tempus, ab unoquoque ipse præstitum, puta 6, 9, 15 annorum: summa omnium annorum erit primus terminus; secundus summa distribuenda; tertius tempus famulatus; quartus portio contingens.

§. V.

Regula mixtionis, seu alligationis.

245 Defin. Sæpissimè occurrit, maximè inter artifices et mercatores, res diversi pretii

simul commisceri, ut deindè ex mixtione, aut alligatione merces victuariae aut artefacta convenientia emptoribus vendantur. Solet etiam pretium arbitrarium statui, sub quo debeant merces divendi, quæ ex mixtione aliarum conflantur; tuncque opus est prænoscere, quanta pars ex componentibus debeat admisceri. In utroque casu regulam *alligationis*, seu *mixtionis* dictam adhibemus. Solutione problematum res clarior evadet.

246 Probl. 1. *Datis partibus componentibus, et pretio earundem, mixtionis pretium invenire.* Solut. Exemp. Sit mixtio vinorum diversi pretii, v. g. quatuor amphorarum vini, quarum singulæ æstimentur 10 obolis, et sex, quæ singulæ 12 obolis æstimentur: quæritur, quo pretio amphora ex utroque vino mixta vendenda sit? Collige summam quantitatum componentium: deindè summam pretiorum; erit summa rerum commixtarum ad summam pretiorum, uti certa quantitas mixti ad pretium ipsi respondens.

Amphor. summa = 10; pretium amphorar. 4 obol. $10 = 4 \times 10 = 40$: pretium amphor. 6 obol. $12 = 6 \times 12 = 72$: utriusque pretii summa = 112. Jam $10 : 112 :: 1 : 11 + \frac{2}{10} = 11 + \frac{1}{5}$ pretium unius amphor. mixtæ.

247 Probl. 2. *Ex quantitatibus pretio diversis mixtio facienda est, quæ præfixo pretio vendi debet: quæritur quantitas ex utraque admiscenda.* Solut. Pretia binatim alligentur, his tamen legibus servatis: ut 1. quæ alligantur, unum majus, alterum minus sit pretio arbitra-

rio: 2. excessus majoris pretii dati supra medium adscribatur, minori pretio; defectus autem minoris à medio apponatur majori. His servatis perindè est quocumque ordine alligentur inter se data pretia. Nam potest unum alligari sæpius, hoc est cum diversis, modò singula saltem alligentur semel. Undè fit, ut eadem quæstio plures solutiones admittat. Exemplum: 1 libra *caffè* occidentalis stat 24 solidis, orientalis verò 35: ut emptoribus fiat satis, qui 33 tantum volunt emere, quot partes ex utroque debent misceri? Pone alterum pretium sub altero 24 et 35; atque ad sinistram pretium arbitrarium 33; ad dexteram verò differentias inter hoc et illa; ita ut differentia minoris applicetur majori, et majoris minori; nimirum 9 ad latus 35, et 2 ad 24, et differentiarum colligatur summa.

En schema. 33 $\left\{ \begin{array}{l} 24 \quad 2 \\ 35 \quad 9 \end{array} \right.$

Jan instituaturs proportio toties, quot erunt differentia; quæ in exemplo duæ reperiuntur; pro primo termino erit summa differentiarum: pro secundo unitas libram, aut mensuram representans; tertio loco una ex differentiis dabit tertium terminum: quartus verò inventus indicat mensuram sumendam ex specie cui adheret tertius: ex. g.

$$11 : 1 :: 2 : \frac{2}{11}$$

$$11 : 1 :: 9 : \frac{9}{11}$$

En jam ex *caffè* occidentali duas undecimas libra partes esse admiscendas, ex orientali autem $\frac{2}{11}$ at $\frac{2}{11} + \frac{9}{11} = \frac{11}{11}$.

Exemplum 2. Confectio *chocolati* fieri debet, cujus libra 30 solidis veneat: faba *brasiliensis*, *cacao* vulgo dicta, 27 solidis stat *carachensis* verò 39 saccarum mediocri 26; quota pars ex qualibet specie sumi debet? Solut. Disponantur ut primus termini; postea major terminus cum minoribus alligari debet, et differentia eodem modo permutentur, atque in exemplo præcedenti; demum ex summa proportio pro quolibet termino instituat. En typum:

$$\begin{array}{l} 27 \left\{ \begin{array}{l} 9 \\ 9 \\ 3+4 \end{array} \right. \\ 30 \left\{ \begin{array}{l} 9 \\ 9 \\ 3+4 \end{array} \right. \\ 39 \left\{ \begin{array}{l} 9 \\ 9 \\ 3+4 \end{array} \right. \end{array}$$

$$25 : 1 :: 9 : \frac{9}{25}$$

$$25 : 1 :: 9 : \frac{9}{25}$$

$$25 : 1 :: 7 : \frac{7}{25}$$

$$\text{Summa} \quad \frac{25}{25}$$

Nimirum compara 39 cum primo termino, differentias inter utrumque cum pretio medio 30 permutando: ideòque juxta 27 scribo 9, differentia inter 39 et 30, atqui ipsi 39 differentiam alteram 3 abscribo. Deinde 39 iterum cum sequenti 26 confero: eodem modo transferendo differentias: ideòque 9 dextrorsum 26, et 4 ad latus 39 collocandi sunt. Demum collecta summa = 25; nam 3 et 4 addendi prius, atque cum cæteris postea in summam redigendi; reliqua procedunt ut in præcedenti exemplo.

248 Schol. Examen, utrum rectè processerit

operatio, erit summa fractionum, aut partium totum componentium. Sic in exemplo summa est $\frac{25}{25} = 1$; in quo numero libra confectionis exprimitur; in singulis verò fractionibus pars exqualibet specie sumenda. Eodem modo procedi oporteret, si partes plures, quam tres alligari deberent. *Demonstratio.* Summa differentiarum, quibus pretia discrepant per excessum, aut defectum à pretio medio; eam habent rationem ad totum mixtum, quam habent singulæ differentia ad singulas mixti partes: quapropter regula porportionum toties iteratur, quot differentia reperiuntur: quarum alterna dispositio pretium deficiens in una compensat excessum alterius pretii; ergo portiones in congeriem miscenda sunt inter se inversè, ut differentia à pretio medio.

§. VI.

Regula falsa positionis seu falsi.

249 Defin. Regula falsa positionis ea dicitur, in qua assumitur numerus alius à verò, atque ex proportione detecta inter ipsum, et alium inventum, nova instituitur, ut verus detegatur. Et quidem numerus, qui videtur aptus ad solvendum quæsitum, sumitur: deinde examinatur, num rectè procedat inventum: demum ex errore verus numerus elicitur. Res exemplis in problematis proponendis fiet manifesta.

250 Probl. 1. *Cæsar* testamento legavit 1000 sesteritia ea conditione, ut inter tres fa-

militares ita distribuuntur, ut primus habeat partem duplam secundi, secundus triplum tertii. Queritur, quota pars cuique obtigit?
 Solut. Ponamus primum habuisse 300, quum hæc summa supponatur dupla secundi, huic contiget 150, ac tertio 50. Summæ autem horum munerorum non adæquant 1000, igitur falsa suppositio est. Instituatur jam regula proportionum, cujus primus terminus est numerus inventus falsus $300 + 150 + 50 = 500$; secundus erit numerus primo assumptus 300; tertius numerus dividendus: quartus ignotus.

$$500 : 300 :: 1000 : 600.$$

Igitur primus habere debet 600; qua summa comperta, reliquæ inventæ sunt, nam secundus habebit 300, tertius verò 100; partes quæ simul sumptæ adæquant 1000. Algebricè etiam facillimè solvi posset problema. Ponantur unus, qui solum censi debet terminus ignotus = x , et esto tertius: primus = a , secundus = b : erit

$$a + b + x = 1000$$

$$a = 2b$$

$$b = 3x$$

$$\text{ergo } a = 6x$$

et substit. $6x + 3x + x = 1000$

et reduc. $10x = 1000$

$$x = \frac{1000}{10} = 100$$

et div.

erit igitur $x = 100$, $b = 300$, $a = 600$. Summa = 1000.

251 Probl. 2. *Per duplicem falsam positionem numerorum verum invenire.* Solut. Assuma-

tur quilibet numerus, ut in exemplo præcedenti; postea perpendatur, num quæstioni satisfaciatur. Error inventus potest esse per excessum aut per defectum, quod signis + aut - notetur. Deinde alius numerus major, aut minor accipiatur, atque eodem modo excessus, aut defectus à vero notetur. Errores erunt *similes*, si ambo sint per excessum aut per defectum, dissimiles vero, quum alter est per excessum, alter per defectum.

Si errores sunt similes, ducatur prima positio in errorem secundæ, et vicissim secunda in errorem primæ. Deinde productorum differentia dividatur per differentiam errorem; quotus erit numerus quæsitus. Quod si dissimiles sint errores, productorum summa dividatur per summam errorem; quotus dabit numerum verum.

Exemp. 1. Tres lusores A, B, C 62 aureos ludo acquisierunt: B obtinuit 6 plusquam A; C 10 plusquam B: inventiendum est singulorum lucrum. Ponatur lucrum A = 4, erit B = 10, C verò = 20: summa 34, quæ à vera deficit per defectum - 28. Iterum sit A = 14, erit B = 20, C = 30: summa 64, quæ per excessum 2 abludit à vera. Quum errores sint dissimiles, addantur duo producta $4 \times 2 = 8$, et $14 \times 28 = 392$, et $392 + 8 = 400$, quæ summa dividatur per summam errorem = $30 = \frac{400}{10} = 13 \frac{2}{3}$ ut in sequenti schemate.

$$\begin{array}{l} \text{Prima posit. 4., error } -28 \\ \text{Secunda posit. 14., error } +2 \\ \text{Prim. Prod. } 4 \times 2 = 8 \\ \text{Secund. Prod. } 14 \times 28 = 392 \\ \hline \text{Summa } 400 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Prima posit. 4., error } -28 \\ \text{Secunda posit. 14., error } +2 \\ \text{Prim. Prod. } 4 \times 2 = 8 \\ \text{Secund. Prod. } 14 \times 28 = 392 \\ \hline \text{Summa } 400 \end{array}} \right\} \text{Summa } 30$$

$$\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Prima posit. 4., error } -28 \\ \text{Secunda posit. 14., error } +2 \\ \text{Prim. Prod. } 4 \times 2 = 8 \\ \text{Secund. Prod. } 14 \times 28 = 392 \\ \hline \text{Summa } 400 \end{array}} \right\} 13 \frac{2}{3}$$

Quotus $13 \frac{2}{3}$ erit lucrum A: $19 \frac{1}{3}$ erit lucrum B: et $29 \frac{2}{3}$ lucrum C: partes quæ simul additæ adæquant numerum datum 62.

Exemplum 2. Esto idem casus sumpta pro secunda positione error per defectum; et sit $A=8$; erit $B=14$; $C=24$ summa 46, quæ à vera deficit iterum per defectum -16 . En typus.

$$\begin{array}{l} \text{Prima positio 4., error } -28 \\ \text{Secunda posit. 8., error } -16 \\ \text{Primum prod. } 8 \times 16 = 64 \\ \text{Secundum prod. } 8 \times 28 = 224 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Prima positio 4., error } -28 \\ \text{Secunda posit. 8., error } -16 \\ \text{Primum prod. } 8 \times 16 = 64 \\ \text{Secundum prod. } 8 \times 28 = 224 \end{array}} \right\} \text{Differ. } 12.$$

$$\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Prima positio 4., error } -28 \\ \text{Secunda posit. 8., error } -16 \\ \text{Primum prod. } 8 \times 16 = 64 \\ \text{Secundum prod. } 8 \times 28 = 224 \end{array}} \right\} \text{quot. } 13 \frac{4}{12} = 13 \frac{1}{3}$$

In hoc casu quum errores sint similes; differentia productorum dividitur per differentiam errorum; atque idem est quotus, ut patet in schemate.

252 Schol. Non semper resolvi potest quæstio per unicam positionem. Indicium, quando duplici positione opus sit, est numerus aliquis determinatus, qui afficiat alium. Sic in secundo problemate numeri 6 et 10, qui adduntur numero principali, indicant duplici positione opus esse. Uno verbo: in primo problemate

numerus 1000 tantum exprimitur; ideòque unica positione resolvi potest. In secundo vero adjunguntur 6, et 10, qui indicant duplicem positionem adhibendam esse. Ceterum problemata hujusmodi facilius per algebra solvuntur, ut patet in primo exemplo jam per algebra soluto, et in secundo, cujus typum exhibeo. Sit terminus primus $=x$; secundus $=b$; tertius $=c$, erit:

$$x+b+c=62$$

$$b=x+6$$

$$c=b+10$$

Et substit. $x+x+6+x+6+10=62$

Et reduc. $3x+22=62$

Et transp. $3x=62-22=40$

Et divid. $x=\frac{40}{3}=13 \frac{1}{3}$

§. VII.

Logarithmorum notio.

253 Defin. *Logarithmi* sunt numeri arithmetice proportionales, numeris geometricè proportionalibus respondentes. Eorum ope multiplicationes et divisiones transeunt in additiones, et subtractiones; adeòque calculus facilior evadit. Inventum hoc Joannis Neperi, natione Scoti, anno 1620 in lucem prodit maximo rei mathematicæ bono; de qua inter primos optimè meritis censendus est. En typum utriusque seriei:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Logarithmorum species commodior, et familia-

rior ea est, quæ pro logarith. unitatis assumito, et unitatem cum aliquibus cyphris pro log. denarii etc. ut in sequenti schemate.

1	0.000000
10	1.000000
100	2.000000
1000	3.000000
10000	4.000000
100000	5.000000
1000000	6.000000
10000000	7.000000
100000000	8.000000
1000000000	9.000000
10000000000	10.000000

Tot autem adduntur cyphræ, ut calculus facilius evadat, quemadmodum de fractionibus decimalibus dictum est.

254 Corol. 1. Assumpto 0 pro unitatis logarithmo, reliquorum numerorum, qui unitati minores sint, ut sunt fractiones, logarithmi erunt defectivi, seu minores 0: itaque nota subductionis—designari debent. Omnes verò numeri ab unitate ad denarium habebunt 0 propria nota logar. A denario, seu à 10 ac 100, prima nota erit. 1. A 100 ad 1000, erit 2, et sic deinceps, ut in schemate videre licet. Reliqui autem numeri inter 1, et 10, habebunt pro logarith. 0 cum aliquot fractionibus decimalibus. Qui inter 10, et 100 interveniunt, nota *characteristica* (sin enim appellatur) erit unitas cum decimalibus respondentibus. Quod etiam ad sequentes numeros, *characteristica* mutata,

ordine jam dicto extendendum est.

255 Corol. 2. *Characteristica* logar. sive numerus, qui in logar. puncto separatur à reliquis decimalibus, indicat, quot notis constat numerus, cujus est logar. Semper enim *characteristica* unitati deficit à numero notarum, quæ reperiuntur in eo, cujus est logarithmus. Hinc dato quovis numero, notisque ejus recensitis, facile deducitur *characteristica* ipsi respondens. Sit 56489; quum hic quinque notis constet, ejus *characteristica* erit 4.

256 Theor. 1. *Si logar. unitatis est 0, erit logarithmus cujuscumque numeri æqualis summæ logar. suorum factorum.* Dem. Sit numerus 24, ejus logarithmus erit æqualis summæ logarithmicæ numerorum 6 et 4, qui sunt ejusdem factores. Nam ex definit. multiplicationis, $1:4::6:24$; horum autem terminorum logarithmi sunt in proportione arithmetica (253): ergo extremorum summa erit æqualis summæ mediolorum (175): additis igitur logarithmis numerorum 4 et 6, habebitur logarith. numeri, cujus sunt factores.

257 Corol. 1. Logarith. numeri cujuscumque plani, aut solidi æqualis est aggregato ex logar. laterum, seu factorum tale planum, vel solidum componentium: ex. g. numerus 72 resultat ex multiplicatione 3×24 , aut etiam $3 \times 4 \times 6$ vel $2 \times 3 \times 12$: summa igitur horum logarithmorum dabit logarith. numeri 72. Undè obiter nota methodum inveniendi logarith. alicujus numeri esse, illud resolvere in suos factores; tum eorumdem logarith. in summam

collectis, numeri logarithmus quæsitus exurget.
 258 Corol. 2. Logarith. numeri quadrati duplus est logar. suæ radicis, et sic de ceteris potentiis quarta, quinta etc. quadruplus, quintuplus etc. Quod enim in potentiis fit per multiplicationem radicis bis. ter, quater in se ipsam, hic obtinetur ope simplicis additionis, adeoque addendo bis, ter, quater etc. logarithmum datæ radicis, obtinetur logarith. datæ potentiæ. Similiter si logarith. cujusvis dignitatis dividatur per ejus exponentem 2, 3, 4 etc., invenietur logarith. radicis talis potentiæ. Sit cubus 8, cujus logarith. ex tabulis est 0.9030900, exponens tertiæ potentiæ seu cubi est 3, per quem diviso prædicto logarith. dat quotum 0.3010300, logarith. numeri 2, qui est radix cubica num. 8. Quod si per eundem exponentem, 3, iterum multiplicaveris prædictum quotum restituitur 0.9030900, qui est logarith. cubi 8; seu tertiæ potentiæ.

259 Theor. 2. *Supposito ut prius zero pro logarith. unitatis; differentia logarith. duorum numerorum æquatur logarith. quoti eorumdem.* Dem. Summantur quivis numeri ex. g. 24 et 6, subducantur amborum logarithmi, differentia erit 0.6020600: hic erit logarith. eorumdem quoti, seu numeri 4. Nam quum divisor sit ad dividendum, ut unitas ad quotum; erunt 6: 24 :: 1: 4: eorumque logarith. in proportione arithmetica (253): ergo quum in logarith. summa mediorum æqualis sit summæ extremorum (175): idcirco si à summa mediorum, sive à logarith. numeri 24 (nam unitatis loga-

rithmus, est 0) subducatur logarithmus numeri 6, erit logarith. numeri 4.

260 Corol. Ex præc. theor. ovium es deducere, summa logarith. divisoris et quoti, æqualem esse logarithmo dividendi. Quod etiam ex num. 257 planum erat inferre. Ceterum inutile ducimus theoriam constructionis logarithmorum hic inserere, quum jam publici juris sint tabulæ, in quibus logarithmi numerorum naturalium inveniuntur, qui in supputationibus occurrere possunt. Tantum innuere sufficiat usum hujusmodi tabulæ logarithmorum.

261 Probl. 1. *Multiplicare duos numeros datos ope logarimorum.* Solut. Inveniantur in tabulis logarithmicis numerorum datorum logarith. ac inter se addantur; summa logarithmorum dabit logarithmum producti. Ut autem hoc dignoscatur, quærendus est talis logarithmus in tabulis, ad cujus latus numerus producti invenietur. Exemplum. Sint multiplicandi numeri 144, et 64: eorum logarithmi ex tabulis inveniuntur, 2.1583625, et 1.8061800: quibus additis fit 3.9645425: cui in tabulis respondet numerus 9216, factum ex 144x64. Dem. sumitur ex num. 256.

262 Probl. 2. *Numerum per numerum ope logarithmorum dividere.* Solut. Quærantur in tabulis ipsorum logarithmi; ac minor à majore subducatur; residuum erit quotus quæsitus. Insistendo præcedenti exemplo, sit dividendum 9216, divisor 64. Subducatur logarithmus divisoris 1.8061800 à logarith. dividendi 3.9645425;