residuum 2.1583625 dabit numerum quoti, scilicet 144. Dem. eadem est ac num. 259.

263 Probl. 3. *Datis tribus numeris, ope logarith. quartum proportionalem invenire.* Solut. Quærantur in tabulis logarithmi tribus numeris datis respondentes, ac terminorum mediorum logarithmi in summam colligantur; deinde ab hac summa primus terminus subducatur: residuum erit logarithmus quarti termini. Dem. patet ex num. 253. Hinc deducitur regulam trium per logarithmos confici faciliùs posse.

264 Prob. 4. *Dati numeri quadratum, cubum, aut aliam dignitatem invenire.* Solut. Inveniatur in tabulis logarithmus dato numero respondens; hic multiplicetur per exponentem potentiæ, ad quam evehendus est numerus; productum dabit logarithmum talis potentiæ, ac proindè ipsum numerum seu potentiam. Dem. sumitur ex num. 258.

265 Corol. Hinc apparet ad extrahendam radicem cujuscumque potentiæ, satis esse ipsius logaritmum per exponentem dividere, aut sumere dimidium, tertiam, quartam etc. partes dati logarithmi juxta radices extrahendas: deindè in tabulis quærere numerum tali logarithmo respondentem.

266 Probl. 5. *Inter duos datos numeros medium proportionalem ope logarith. invenire.* Solut. In tabulis inveniantur logarith. duorum numerorum; deindè summa colligatur, ac demum semisumma erit logar. numiri medii proportionalis quæsiti Dem. deducitur ex num. 205 et 253.

TRACTATUS III.

GEOMETRIA.

PROLEGOMENA.

267 Defin. 1. Geometria, seu terræ mensura à γέα contractè γὴ terra, et μέτρεω metior composito vocabulo, sic dicta fuit quod primum ad possesionum limites dignoscendos inventa sit. Ad sublimiores deindè cognitiones elevata, omnem quantitatem sibi subjecit, ac penè totius corporeæ naturæ dominata, immensum exercet imperium. Quapropter quæ nunc Geometria vocatur, rectiùs *quantitatis extensæ scientiam* diceres, quæ definitio ipsi optimè quadrat. Ad omne enim corpus extensum, et continuum applicatur, ejusque magnitudinem extensionem, soliditatem metitur. Quamvis autem nihil sit in rerum corporearum natura, quod tres dimensiones in longum, latum, et profundum non habeat, mente tamen separari, atque una seorsim ab alia considerari potest.

268 Defin. 2. *Solidum* est quantitas tribus dimensionibus constans in longum, latum, et profundum. Omne igitur corpus *solidum* est. Potest enim ejus longitudo definiri, crassities, sivè latitudo determinari, et profunditas, sivè

altitudo metiri. Solidum sivè corpus extrinsecùs *superficiebus* terminatur: superficies verò lateribus, sivè *lineis* circumscribitur: lineæ autem extremitas *punctum* est. Quamvis autem hæc tria separari numquam possint, benè concipimus, dum iter agimus lineam quandam à nobis descriptam à puncto unde discessimus, ad locum, quò pervenimus; quin ad ejus crassitiem, aut altitudinem cogitemus. Dum pannum vestibus parandis videmus, ejus altitudinem et longitudinem præ oculis habemus quin ad crassitiem attendamus. Demum in plerisque corporibus omnia simul attendimus, quantum sursum erigatur, et hæc est *altitudo*, sivè *profunditas:* quantum crassum sit, et hæc est *latitudo:* ac demum quod spatium à latere ad latus occupet, et hæc dicitur *longitudo*.

269 Schol. Tres hæc dimensiones à puncto quasi originem ducere concipimus. Punctum enim fluens, sivè unum post aliud positum, lineæ ideam nobis præbet. Lineas similiter juxta et extra se positas, sivè unam ad latus alterius, superficiem generare concipimus. Superficies demum una supra aliam superpositæ solidi compositionem, seu genesim repræsentant. Non quod lineam è punctis, superficiem lineis, solidum superficiebus componi dicamus: sed linea è lineolis semper minoribus, superficies aliis minoribus superficiebus, solida minusculis solidis compingi debent. Attamen lineæ superficierum, superficies solidorum limites sunt. Hinc *Longimetria* dicta est, pars illa geometriæ, quæ linearum; *Planimetria*, quæ superficierum;

Stereometria seu solidometria, quæ solidorum dimensiones pertractat. Et hæc quidem ad inferiorem geometriam, seu elementarem pertinent. Ad superiorem verò seu transcedentem sectiones conicæ, atque omnes aliæ curvæ à circulari diversæ; de quibus in tractatu ultimo sermo erit.

CAPUT PRIMUM.

Longimetria, sivè de lineis.

§. I.

Linearum notio.

270 Defin. 1. Si punctum A (fig. 1. tab. 1.) fluens, et breviori semita procedit ab A in B, *lineam rectam* describit, quæ punctis A et B intercipitur.

271 Corol. 1. *A puncto ad punctum unica recta duci potest.* Quæcumque enim linea à puncto A ad B ducatur, nisi puncta omnia supra rectam AB habuerit, extra eamdem lineam excurrit, adeòque recta non procedet ab *A* in B.

272 Corol. 2. *Linea recta est omnium brevissima, quæ á puncto ad punctum duci potest.* Quælibet enim alia ACB dum inflectitur, recedit à directione punctorum A et B; eoque magis recedit, quo magis incurvatur. Linea enim ADB brevior est altera ACB. Undè linea recta est mensura distantiæ, seu ipsa distantia punctorum A et B.

273 Corol. 3. *Directio lineæ rectæ, datis duobus ejus punctis, innotescit*. Quaproter datis punctis AB, directio ejusdem lineæ AB potest utrinque in infinitum produci, ac reliquæ novæ accesiones in eadem positione AB semper remanebunt.

274 Corol. 4. *Duæ rectæ in unico puncto concurrere possunt*. Si enim duo puncta communia haberent, in eadem directione essent, atque unicam rectam eficerent per corol. 1. Hinc inferes, rectam lineam unicam esse in sua specie, quum ceteræ quæ rectæ non sunt, in infinitum variari possint. Hujusmodi axiomata potius quàm corollaria demonstrare esset oleum, atque operam perdere, quum adeò manifestæ varietatis sint, ut intellectus, statim, atque enuntiata percipiat, in ipsorum veritate conquiescat.

275 Defin. 2. Si punctum A (fig. 1) quòlibet à directione AB deflectat, ut in D aut C, lineam curvam describet. Curvarum tamen celeberrima est circulus, sivè ejus peripheria (fig. 2). Concipiatur linea ABC, aut potius ipsius dimidium BC, ejus puncto B immobili, circumagi ita, ut ad puncta, undè discessit, redeat: lineam ADCE describet, cujus omnia puncta à puncto B æquè distabunt. Spatium ac hac linea comprehensum dicitur *circulus*. Punctum B *centrum* circuli est: linea circumdescripta dicitur *peripheria*, seu *circumferentia*. Linea ab uno peripheriæ puncto ad aliud ducta per centrum B, vocatur *diameter* circuli, ut AC. Quæ verò à centro B ad quodvis circumferentiæ punctum, uti E, ducitur, *radius et semidiameter* appellatur.

276 Defin. 3. Quævis peripheriæ pars, quæ duobus radiis intercipi potest, dicitur *arcus* circuli, ut AE, GE (fig. 2). Portio autem superficiei circularis, duobus radiis et arcu comprehensa, *sector circuli* vocatur. Recta, quæ per centrum non transit, et ab uno ad aliud circumferentiæ punctum ducitur, appellatur *chorda*, ut FG: duæ vero inæquales partes, in quas circulus à chorda dividitur, vocantur *segmenta*: major dicitur *segmentum majus*: altera *segmentum minus*: ut FEG est segmentum majus; FDG segmentum minus.

277 Defin. 4. Commodior circuli divisio ea inventa est, quæ ejus peripheriam in partes 360 dividit, quæ dicuntur *gradus*. Gradus in 60 partes dividitur, quæ *minuta prima* vocantur. Rursus minutum in 60 *secunda* minuta, seu, quomodò jam usus invaluit, *secunda* tantum appellantur: secunda in 60 *tertia* dividuntur, et sic deincps: *Semicirculus* AEC (fig. 2) 180 gradibus constat. Quadrans verò AE 90. Porro gradus sunt pars relativa circuli: totquè gradus numerat parvus circulus ADCE, atque alius quilibet cœli ambitu comprehensus.

278 Corol. 1. Omnes diametri ejusdem circuli sunt æquales; sunt enim eadem recta circumvoluta centro immobili permanente (275). Similiter omnes radii ejusdem circuli æquales sunt, quum sint dimidium ejusdem diametri. Undè circuli æquales diametros, et radios habebunt æquales.

279 Corol. 2. *Linea recta circuli peripheriam in tribus punctis secare non potest.* Nam omnia puncta lineæ rectæ in eadem directione sunt (273): circuli autem puncta continenter directionem mutant. Hinc duo tantum puncta positionem, aut directionem circuli, seu peripheriæ non determinant, quum secari possint tum à recta, tum à curva qualibet. Tria verò puncta directionem circumferentiæ determinant, quum omnia ipsius puncta eamdem habeant curvaturam, ac æquè à centro distent. (Vide infra num. 308.) Quarè notis tribus peripheriæ punctis, (fig. 2) AFG, reliqua omnia determinantur, quum æquè distent à centro B.

280 Corol. 3. *Omnes diametri velut chordæ maximæ circuli concipi possunt.* Quæcumque enim alia chorda à diametro distincta minor ipsa diametro est. Nam quum circulus à diametri, aut potius semidiametri circumvolutione generetur, quæcumque chorda diametro æqualis, diameter est; ac proindè omnes aliæ minores diametro sunt.

281 Corol. 4. *Diameter circulum et peripheriam bifariam secat.* Nam per centrum transiens duas æquales partes peripheriæ debet intercipere, quum omnia ipsius puncta æquè à centro distent. Deindè si concipiatur (fig. 2) pars ADC superimponi parti AEC, perfectè congruent; nimirum omnia puncta semiperipheriæ ADC operient puncta alterius semiperipheriæ AEC: sunt igitur æquales, ac proindè quælibet dimidium totius, seu circuli ADCE.

282 Corol. 5. In eodem circulo æquales

chordæ æquales peripheriæ partes sivè arcus intercipiunt (fig. 3). Superimponatur pars AB parti DC, supposita æqualitate chordarum AB, DC, perfectè congruent, curvatura enim in circulo ubique eadem est: sunt igitur æquales. Similiter arcus æquales ejusdem circuli, æqualibus chordis insistere debent; quod pariter superimpositione manifestum fiet. Hoc geometrarum more dicitur subtendere arcus, aut chordas æquales.

§. II.

Linearum positio respectiva.

283 Defin. Linea *perpendicularis*, aut *normalis* ea dicitur, quæ cadens super aliam, in neutram partem inclinat; seu cujus omne punctum æquè distat utrinque à punctis alterius æquè dissistis ab eo, in quod illa cadit. Linea AB (fig. 4.) est perpendicularis CD.

284 Defin. 2. *Obliqua* linea vocatur, quæ super aliam decidens, in unam magis, quam in aliam partem inclinat. EF (fig. 5) obliqua est respectu AB, CD.

285 Defin. 3. *Lineæ parallelæ* dicuntur, quæ ita sunt positæ è regione altera alterius, ut omnia unius puncta æquè distent ab altera: undè si in infinitum producerentur, numquam concurrerent, sed ubique æquè distarent. Porro distantia unius puncti ab aliqua recta desumitur à perpendiculari ab eo puncto ad lineam ducta. Lineæ AB, CD (fig. 5) sunt parallelæ.

286 Defin. 4. Lineæ rectæ in aliquo puncto concurrentes, angulum efficiunt. Si perpen-

dicular iter altera super alteram cadat, *angulus erit rectus*, ut in B (fig. 4): quod si obliquè cadat, ut EB, aut EF in E (fig. 5), angulos efficiet hinc *acutum*, indè *obtusum*: qui minor est recto, *acutus* dicitur, *obtusus* verò, qui major est recto. Anguli tribus litteris designari solent; quæ in medio ponitur, verticem anguli, seu locum anguli indigitat; ut ABD (fig. 4) designat angulum, quem in B faciunt duo lineæ AB, DB: BDA indicat angulum, quem in D faciunt lineæ BD, AD. Quando verò in punctum duæ tantum lineæ conveniunt, tunc sublato æquivocationis periculo, angulus unica littera designari potest ad anguli verticem apposita. Vertex porrò anguli dicitur, ubi duæ lineæ conjunguntur, ut in A.

287 Theor. 1. *Recta super rectam cadens, aut duos angulos rectos facit, aut duobus rectis æquales. Dem.* Cadat AB (fig. 4) supra CD; si perpendiculariter cadit, tam angulos ABD, quàm ABC erunt recti (ex defin. 286) si obliquè cadit, ut in EB; anguli EBC, EBD simul sumpti æquales sunt duobus aliis ABD, ABC, qui recti sunt.

288 Corol. 1. Quoties linea perpendicularis est alteri, hæc vicissim perpendicularis illi est: nam invicem faciunt duos angulos rectos. Similiter nequit linea lineæ obliqua esse, quin hæc quoque ipsi obliqua sit: aliter hinc faceret angulum rectum, illinc acutum, qui simul sumpti minores sunt duobus rectis.

289 Corol. 2. Producta linea AB (fig. 4) in F, simili ratione patet, duos angulos CBF, DBF

duobus rectis æquales esse; ac proindè duæ rectæ se invicem secantes faciunt quatuor rectos, si perpendiculariter cadant: si autem obliquè, quatuor rectis æquales. Pariter si duæ rectæ in idem punctum alterius rectæ concurrentes, hinc illinc faciant cum hac recta duos angulos, quorum summa æqualis sic duobus rectis; erunt in eadem directione, atque in unam rectam coalescent: ut GB, EB supra CD cadentes, concurrunt in puncto B, atque angulos EBD, GBD, aut EBC, GBC efficiunt, quorum summa æqualis est duobus rectis (287), in unam rectam EG coalescunt. Jam si centro E ducatur circulus ADFC, mensura quatuor angulorum erit integra circumferentia circuli; quæ 360 gradibus constat (277); qui, si per 4 dividantur, quorum dat 90 pro mensura anguli recti. Reliqui autem singuli in centro facti pro mensura habebunt tot gradus, quot comprehendit arcus ab eorum cruribus interceptus. Omnium enim simul mensura sunt quatuor recti.

290 Corol. 3. Quum recta super alia cadens in unam non coalescant, sed spatium aliquod intercipiant, angulos hinc indè efficiunt: ex his dicuntur ad verticem oppositi, qui sibi invicem (fig. 4) verticibus imminent: ut ABE, FBG: atque etiam EBF, ABG. Manifestum est omnes ad verticem oppositos æquales esse. Nam si perpendiculariter cadit, ut in ABF, facit quatuor rectos, qui omnes æquales sunt. Si verò obliquè, ut EBG, angulus acutus EBA cum obtuso EBF facit duos rectos: similiter GBF, qui illi ad verticem opponitur cum eodem EBF

facit duos rectos: ergo hoc ablato reliqua erunt æqualia. Eodem modo ostenditur angulos ABG, EBF ad verticem oppositos esse æquales.

291 Corol. 4. A puncto ad datam lineam unica perpendicularis duci potest. Nam si à puncto A (fig. 4) alia esse posset perpendicularis CD, ad alterutrum latus caderet respectu AB: ergo jam esset inclinata, neque angulos rectos cum CD faceret, ac proindè perpendicularis non esset contra suppositionem (283).

292 Theor. 2. *Perpendicularis minor est obliqua ab eodem puncto ad datam rectam ducta. Dem.* Sit (fig. 4) AB perpendicularis CD, et AD ipsi CD obliqua: producta AB in F, atque à D in F ducta alia æquali ipsi AD, erit ADF major ABF (272), quum ABF sit recta, ADF obliqua: ergo ablatis BF, DF, quæ dimidia sunt linearum ABF, ADF, reliqua dimidia erunt in eadem inæqualitate, nimirum AD major AB, quum dimidia sit ut tota.

293 Corol. 1. Perpendicularis omnium brevissima est, quæ à puncto ad datam rectam duci posunt: omnibus enim obliquis brevior est. Obliquarum verò ab eodem puncto ad datam rectam ductarum, ea major est, quæ magis à perpendiculari distat, minor quæ ad eam magis accedit. Undè si duæ lineæ ab eodem puncto ductæ æquè distent hinc illinc à perpendiculari, æquales sunt: aut si æquales sunt, æque distant à perpendiculari.

294 Corol. 2. Recta AB (fig. 4) ad rectam CD perpendicularis est, si duo quælibet ipsius puncta, uti A, B, æquè distent à duobus qui-

busvis, sed à concurso perpendicularis æquè dissitis, alterius C, D, quum scilicet AC=AD. et CB=BD. Nam quum duo puncta lineæ rectæ positionem determinent (273), si punctum A æquè à punctis C et D, et punctum B ab iisdem punctis æquè distat, directio totius AB, etiam infinitè productæ, eadem erit, ac proindè angulos hinc indè æquales efficiet.

295 Probl. 1. *Ad datum in recta punctum perpendicularem elevare.* Solut. Sit datum punctum B in linea CD (fig. 4): circino cape hinc indè æquales partes à puncto B; deinde crure circini in quolibet ex punctis æquè distantibus à B, fac decussationes in L; linea à puncto L ad punctum B erit perpendicularis. Nam per constructionem linea LB habet duo puncta æquè distantia à CD: ergo per præcedens corol. erit perpendicularis ipsi CD.

296 Probl. 2. *A dato extra rectam puncto ipsi perpendicularem ducere.* Solut. Sit punctum L (fig. 4), ex quo perpendicularis ad CD duci debeat: circino cape æquales partes à puncto L ad puncta in CD respondentia *a b*; vel duc semicirculum rectam CD secantem in punctis *a b*: deindè ex his punctis fac decussationes in L, H, ducque lineam HL; hæc erit perpendicularis ipsi CD. *Dem.* Duo puncta LB, aut etiam HB æquè distant à punctis *a b* per constructionem: ergo linea ducta est perpendicularis.

297 Probl. 3. *Datam rectam bifariam secare.* Solut. Operatio eadem est ac præcedentis problem. Nam si CD (fig. 4) bifariam secanda sit, à punctis C, D, aut duobus aliis, *a b* æquè

ab ipsis distantibus, fiant decussationes in L, H: recta per hæc duo puncta ducta bifariàm dividet CD, ut manifestum est ex ipsa operatione.

298 Defin. Linea sivè rectè, sivè obliquè cadens super parallelas (fig. 5) ut EF, quam *secantem* appellavimus, plures angulos cum illis efficit. Alii inter parallelas comprehenduntur, atque *interni* appellantur: alii, quia extra ipsas cadunt, *externi* dicuntur. *Alterni* sunt bini et bini inter se comparati, quorum alter supra ad dexteram, alter infra ad sinistram, aut contrà positi sunt. Quod tam de internis, quam de externis dictum habe. Anguli G, N, et H, O *alterni interni:* E, L, F, M *alterni externi* sunt.

299 Teor. 3. *Secans cum parallelis facit 1. angulos internos, et externos ad eamdem partem appositos æquales. Dem.* Sint parallelæ AB, CD (fig. 5), et secans FE: erunt anguli appositi ad eamdem partem internus, et externus G, M; H, E; F, N, L, O. Jam quum secans ad utramque parallelam eamdem inclinationem servare debeat, idem erit spatium, sive hiatus in partibus G, M etc. à parallela, et secante comprehensus: ergo æquales sunt anguli G, M etc. Superpositione etiam demonstrari potest.

2 *Omnes angulos alternos æquales. Dem.* per præced. Angulus G æqualis est M: at N, qui est alternus respectu G, æqualis est M, quum ipsi ad verticem opponatur (290): ergo æqualis est ipsi G. Hæc demonstratio cum ceteris alternis iterari potest.

3 *Anguli interni ad eamdem partem æquales*

sunt duobus rectis. Dem. G et O sunt interni ad eamdem partem: at O cum M facit duos rectos (287): ergo etiam cum G, qui ipsi M est æqualis per num. 1 theor.

300 Corol. 1. Si angulus externus M æqualis est interno G: aut alterni G, N æquales sunt: vel interni G, O ad eamdem partem æquales duobus rectis; lineæ AB, CD sunt parallelæ. Itaque ex natura parallelismi facilè deducitur, tres has proprietates vinculo quodam necessario inter se connexas esse.

301 Corol. 2. Si duæ rectæ eidem lineæ sunt parallelæ, erunt etiam ad invicem paralelæ. Quam enim positionem respectu alterius habuerint, debent et inter se observare, ut est manifestum.

302 Probl. 4. *Ad datam lineam ipsi parallelam statuere, aut quaslibet parallelas ducere.* Solut. Sit data recta CD (fig. 5): è puncto N quolibet intervallo; ut NA, duc circino arcum DG; postea centro G duc alium arcum ND. interceptis deindè in quolibet arcu æqualibus partibus AG, ND per puncta intercepta ducatur recta AB, quæ erit parallela CD. Pari modo operandum esset, si plusquam duæ parallelæ ducendæ forent. *Dem.* Ducta secante FE, erunt anguli alterni H, O æquales, quum æqualibus arcubus mensurentur per constructionem; ergo sunt parallelæ (300).

§. III.

Linearum positio in circulo.

303 Theor. 1. *Radius* BG (fig. 4) *perpen-*