2. Potest etiam ex num. 339 alia methodus deduci. Sint AF, AG (fig. 20) in partes proportionales altera alterius dividendæ, ut AC, CE, EG. Statuantur ad angulum quemcumque A, et ducatur FG. Ex punctis C, E ducantur BC, DE parallelæ ad FG. Hæ secabunt partes AB, BD, DF proportionales partibus sectionis alterius lineæ; ut constat ex cit. num. 339. Ex hoc problem. derivatur scalæ geometricæ construendæ methodus, cujus usus in Geometria practica frequentissimus.

349 Probl. 2. *Datis tribus lineis, quartam proportionalem invenire.* Solut. 1. Invento in numeris earum valore, facilè per regulam auream quartus numerus proportionalis invenitur. 2. Sint tres lineæ (fig. 20) a, b, c, quibus invenienda est quarta proportionalis: fiat angulus quicumque FAG, et in eo accipiantur pars $AB=a$, et pars $AC=b$, et ducatur BC. Deinde ad latus AB accipiatur pars $AD=c$, atque ex hoc puncto ducatur DE parallela BC: pars AE erit quarta proportionalis quæsita. Nam $AB : AC :: AD : AE$ (338.) Possent etiam intercipi partes ab A in B, et in C; deindè à B in F, atque à C in G, eadem enim proportio resultaret.

CAPUT II.

Planimetria, seu de Superficiebus.

§. I.

Quadrilatera.

350 Defin. *Quadrilaterum* figura est quatuor lineis rectis terminata. Pro diversitate angulorum, et laterum varia etiam nomina sortitur. Nam 1. *Parallelogrammum* dicitur, quod latera opposita habet parallela. 2. *Quadratum*, quod æquilaterum est, et rectos angulos habet. 3. *Rectangulum*, quod rectos habet angulos, et latera opposita tantum habet æqualia. 4. *Trapezium* neque angulos, neque latera habet æqualia. 5. *Rhombus* latera habens æqualia, angulos tantum oppositos habet æquales. 6. *Rhomboides* habet solum latera opposita, et angulos oppositos æquales. Demum, recta inter angulos oppositos ducta dicitur *diagonalis.*

Adnotatio historica. Bonaventura Cavallerius, Mediolanensis, sæculo superiore, ut genesim superficierum, ac reliquarum quantitatum geometricarum explicaret, methodum *indivisibilium* induxit. Concipit enim puncta, aut potiùs lineolas ex quibus lineæ coalescunt, veluti indivisibilia, aut quovis dato minora. Lineas pariter à punctis, seu lineolis tamquam ab elementis compositas, quasi series eorumdem punctorum, ac deindè superficies veluti aggregatum linearum; seu parvarum superficierum contiguarum, quæ quasi ex infinitis punctis, et lineis coalescentes superficiem canstituunt. Demum superficies, quasi superimpositæ eadem contiguitate ac puncta et lineæ, solidum componunt. Ex his principiis, quibus etiam *infinitesimalium* calculus innititur, æqualitatem, aut inæqualitatem figurarum investigat. Evidens namque est, eas figuras æquales esse debere, in quibus totidem elementa, aut puncta indivisibilia reperiantur. Reperientur autem, quum eisdem, aut æqualibus spatiis superficies concluduntur. Nihil enim geometræ diversæ densitatis corporum solliciti, omnia veluti sine poris, atque æquè solida considerant. Jam punctum veluti parvum circulum, aut quadratum, quovis excogitabili minorem considerant, lineam veluti continentia puncta: superficiem continentes lineas in latum extensas: figuras alias, putà circulum, ex infinitis peripheriis concentricis semper minoribus; quadratum ex infinitè minimis quadratis etc. Eamdem hanc methodum usurpasse Archimedem prolixioris exhaustionis, et triangulorum inscriptorum et exscriptorum ambage propositam, consentiunt Cavallerio recentiores geometræ, cum Montucla in historia Matheseos: quod Jacquierius ad infinitesimorum calculum etiam extendit. Sanè hæc recentiorum sors esse videtur, ut si quid inventum ab ipsis sit, uti novitatum auctores refelluntur: quod si ab antiquis quoquo modo usurpatum ostendant, furti arguantur, quod Cavallerio, aliisque contigisse comperimus.

351 Theor. 1. *In parallelogrammo latera opposita sunt æqualia; idcircò quadrilaterum,*

latera opposita habens æqualia, erit parallelogrammum. Dem. Sit (fig. 21) ABCD parallelogrammum; ducatur diagonalis BD: anguli ABD, BDC, utpotè alterni, æquales sunt (299); quod pariter de angulis ABD, DBC dicendum est: duo igitur triangula sunt æquiangula; porrò quum latus BD sit utrique commune, reliqua etiam latera angulis æqualibus opposita erunt æqualia, (334): ergo AB=CD, et AD=BC.

2. Quoniam AD=BC, et AB=CD, et latus BD commune, triangula à diagonali facta erunt æqualia (330), et anguli lateribus æqualibus oppositi ABD, BDC æquales: at hi sunt alterni: ergo AD, BC sunt parallelæ (300).

352 Corol. 1. Omnes anguli quadrilateri quatuor rectis æquantur. Nam per diagonalem in duo triangula dividuntur; et valor angulorum cujusqumque trianguli sunt duo recti (327).

353 Corol 2. Diagonalis parallelogrammum in duo triangula similia, et æqualia partitur. Secans enim parallelas angulos alternos facit æquales (229): et quum diagonalis sit latus commune, cui æquales anguli insistunt, tota triangula erunt æquiangula, et æqualia (334).

354 Theor. 2. *Duo parallelogramma ABCD* (fig. 22.) *BEFC, ejusdem basis, et altitudinis, seu inter easdem parallelas constituta, æqualia sunt. Dem.* Triangulum BCG utrique parallelogrammo commune est: restat igitur, ut duo trapezia ABGD, CFEG ostendantur æqualia. Jam triangula ABE, CDF æqualia sunt; nam latus AB=DC, latus BE=CF, et quum pars

DE sit utrique communis, atque AD=EF; omnia latera, et triangula erunt æqualia (332). Demum ablato triangulo DEG utrique communi, reliqua erunt æqualia.

355 Corol. 1. Triangula sunt dimidium parallelogrammi ejusdem basis, et altitudinis. Nam si eadem basi et altitudine fiat parallelogrammum ABCD (fig. 21), hoc æquale est duobus triangulis æqualibus (353) ABD, BCD. Quodlibet igitur triangulum erit ejus dimidium.

356 Corol. 2. Ob eamdem rationem triangulum parallelogrammo basi æquale, altitudine duplum, aut vice versa, æquale erit ipsi parallelogrammo. Erit enim dimidium alterius parallelogrammi, quod sivè basi, sivè altitudine sit primi duplum. Altitudo autem in figuris geometricis est perpendicularis è vertice ad basim, sivè distantia inter parallelas per verticem, et basim transeuntes. Sic AB, aut DC (fig. 22) mensura est altitudinis utriusque parallelogrammi recti, et obliqui.

§. II.

Superficierum mensura.

357 Theor. 1. *Superficies parallelogrammi æqualis est producto baseos in altitudinem. Dem.* Sit cujuscumque parallelogrammi ABCD (fig. 22.) basis BC æqualis sex pedibus, aut hexapedis, et altitudo æqualis octo, manifestum est *aream* totam ABCD haberi, si ducantur $6\times8=48$. Nam tota superficies concipi potest divisa in tot parva quadrata, qualia designata sunt

numeris 1, 2, 3, etc.; et quum pes unus in altitudine producat sex in latitudinem, octo dabunt 48 parva quadrata, seu pedes, ut dicunt *quadratos* in tota superficie. Idem pariter concipi debet, etiamsi basis et altitudo sint incommensurabiles, quod jam num. 339 animadversum est pro triangulis, et ad omnes figuras extendi debet.

358 Corol. 1. Superficies trianguli æqualis est producto basis in dimidiam altitudinem, aut altitudinis in dimidiam basim. Est enim dimidium parallelogrammi ejusdem basis, et altitudinis (355), cujus area æqualis est producto basis in altitudinem, aut vice versa ex num. præced.

359 Corol. 2. Quælibet parallelogramma, adeòque et triangula, super eadem basi, et inter easdem parallelas constituta, æqualem habent superficiem, cujus mensura est productum baseos in altitudinem pro parallelogrammis, et dimidium pro triangulis. Quod quidem extendendum est etiam ad parallelogramma, et triangula quorum inclinationes diversæ sint, quum altitudines sumantur à distantia parallelarum, inter quas comprehenduntur.

360 Corol. 3. Ex hoc theor. deducitur vulgaris demonstratio proposit. 47 lib 1. Euclidis, quam faciliori methodo jam demonstravimus num. 345. Propositio autem euclidæa, est quadratum hypothenusæ cathetorum quadratis æquale esse. En demonstrationis compendium. Esto triangulum rectangulum AGD (fig. 23): sub hypothenusa AD, et super cathetos AG,

DG quadrata describantur; deinde quadratum ABCD in duo rectangula ABHI, CDIH dividatur ope lineæ GH, per angulum rectum G trianguli rectanguli ductæ ac lateribus AB, DC paralellæ, ac demum ducantur rectæ BG, CG, AE, DF. Jam parallelogrammum ABHI est ejusdem basis, et inter easdem parallelas, ac triangulum ABG: erit igitur ipsius duplum ex num. 355. Quadratum pariter AGF, et triangulum FAD habent eamdem basim AF, atque inter parallelas ejusdem quadrati FA jacent; adeòque quadratum FA duplum erit trianguli ejusdem basis et altitudinis AFD. Rursus triangula ABG, ADF æqualia sunt; nam latus AB=AD: latus AG=AF; atque angulus ab his lateribus comprehensus utrobiqne rectus, et angulus GAI communis utrique (333): ergo eorum dupla etiam erunt æqualia; nimirum $AG^2 = ABHI$. Eadem demonstratione iterata inter rectangulum CDIH, et quadratum DEG, evidenter deducitur $AD^2 = AG^2 + DG^2$; quum quodlibet quadratum cathetorum æquale sit ei, quod sibi respondet è duobus rectangulis, in quæ hypothenusæ quadratum est divisum. Quod autem tam quadratum FG, quam triangulum ADF sub eisdem lateribus parallelis comprehendantur, patet ex eo quod AG supra lineas G ac D cadens, angulos utrinquè rectos format, atque adeò ambæ in unam rectam coalescunt (289).

361 Corol. 4. Superficies trapezii cujuscumque habebitur, ducta diagonali, ac superficie in duo triangula divisa. Nam si è vertice ad

basim utriusque trianguli demittatur perpendicularis, atque hæc ducatur in basim, dimidium productum erit area trianguli, et duplex dimidium productum dabit integram aream trapezii. Hinc deducta est praxis metiendi agros, provincias etc., divisa superficie in tot triangula, quod opus fuerit, atque eorumdem basibus in altitudinem ductis; dimidium productum mensura est areæ dimetiendæ. In praxi verò aliæ cautelæ, atque instrumenta adhiberi debent, quorum descriptio non est hujus loci.

362 Probl. 1. *Invenire quadratum æquale summæ aut differentiæ datorum quadratorum.* Solut. Latera datorum quadratorum statuantur ad angulum rectum: deindè ducatur hypothenusa; quadratum hujus erit æquale duobus datis. Quod si non summa duorum, sed differentia unius quadrati ab alio invenienda sit, duæ lineæ datæ ita statuantur, ut una sit hypothenusa, et altera cum alia ducenda faciat angulum rectum. Porrò hujusmodi constructio facilè obtinetur, si ad extremitatem catheti jam notæ perpendicularis ducatur (295); atque ex altera extremitate hypothenusa tamquam radio arcus perpendicularem secans describatur: recta sivè radius ab hac extremitate ad punctum intersectionis ductus, dabit hypothenusam hujus trianguli rectanguli, et cathetum ignotam, cujus quadratum erit differentia unius quadrati ab alio; ut ex æqualitate quadrati hypothenusæ cum quadratis laterum manifestum est.

363 Probl. 2. *Invenire geometricè radices*

quadratas numerorum naturalium 2, 3, 4 *etc.* Solut. Quamvis aliquorum numerorum radices arithmeticè inveniri non possint, quæ numeris, aut integris, aut fractis exactè exprimantur, geometricè tamen facillimè inveniuntur. Sit linea indefinita AC (fig. 24): ducatur AB normalis, quæ sit æqualis 1: accipiatur in parte AC, $Aa=AB$, et ducatur hypothenusa B*a*: erit $Ba^2=Aa^2+BA^2=1+1=2$; et $Ba=\sqrt{2}$. Deindè transferatur B*a* in A*b*, et ducatur hypothenusa B*b*: erit $Bb^2=Ab^2+AB^2=2+1=3$; et $Bb=\sqrt{3}$. Eadem praxi B*b* transferatur in A*c*, et ducta B*c*, erit hæc $=\sqrt{4}$: $Bd=\sqrt{5}$ etc.

364 Probl. 3. *Quadratum dato parallelogrammo, aut triangulo æquale construere.* Solut. Quum area parallelogrammi æqualis sit producto basis in altitudinem, quæratur media proportionalis inter utramque (344); quadratum super hanc constructum erit æquale parallelogrammo; quum productum extremorum æquale sit quadrato medii in proportione continua. Idem agendum ocurrit in triangulis, accepta dimidia altitudine, aut dimidia basi inter quas inveniatnr, ut supra, media proportionalis, quæ dabit latus quadrati æqualis triangulo dato.

§. III.

Polygona.

365 Defin. 1. *Polygona* dicuntur figuræ pluribus, quàm quatuor, rectis circumscriptæ.

Ceterùm peculiaria habent nomina pro numero laterum, quibus constant. *Pentagonum, Hexagonum, Heptagonum, Octogonum, Enneagonum etc.* figuras 5, 6, 7, 8, 9 lateribus constantes appellant. Polygonum erit *regulare*, si latera, et angulos habeat æquales: alioquin *irregulare* erit. Polygona regularia erunt similia, si et homonima sunt, ut pentagona, chiliogona etc., quantumvis diversæ magnitudinis sint. Circuli verò veluti polygona infinitorum laterum considerantur.

366 Defin. 2. Polygoni *perimeter* vocatur linea ipsum circumscribens, ut peripheria circulum. Undè duo polygona sunt *ipsoperimetra*, seu æqualis perimetri, quum lineæ ipsa circumscribentes sunt æquales. Porrò ad perimetrum duci possunt radii, vel perpendiculares, vel obliqui. Recta normalis à centro ad latus perimetri est radius rectus: obliquus verò à centrum ad angulum ducitur.

367 Theor. 1. *Valor angulorum cujusvis polygoni juxta duplum numerum laterum deducitur, ita ut tot rectis æquivaleant, quot fuerit duplus numerus laterum demptis quatuor.* *Dem.* Sit hexagonum ABCF (fig. 25), cujus duplus numerus laterum est duodecim: dico valorem angulorum hujus figuræ esse æqualem octo rectis. Nam ductis radiis *c*A, *c*B, *c*F etc. dividitur in sex triangula, quorum angulorum valor sunt duo recti (327): valor igitur omnium æquabitur 12 rectis, duplus nimirum numerus laterum. At angulorum in centro *c* valor, qui quatuor rectis æquator (289) ad hexagonum

non pertinet: ergo valor hujus hexagoni est 12=4=8. Eodem modo de quolibet polygono, ejus area in tot triangula divisa quot sunt ipsius latera, ostendetur veritas asserta, ut est manifestum.

368 Corol. Ex demonstratis facilè deducitur valor cujusvis anguli ad centrum, in quos dividitur per triangula centrum polygoni. Etenim omnium angulorum valor quatuor rectis æquatur: tot autem erunt anguli, quod latera habet polygonum, Diviso igitur 360 per numerum laterum, cujusvis anguli valor habebitur per quotientem expressus. Sic in ejemplo adducto, diviso 360 per 6, quotus dat 60 gradus pro mensura anguli *c*.

369 Theor. 2. *Polygonum similium perimetri sunt inter se, ut ipsorum radii. Dem.* Hexagonum (fig. 25) ABCD, et parvum hexagonum *c* divisa sunt in totidem triangula æquiangula, et similia: ergo habent latera proportionalia (338), et singula latera unius ad singula alterius, ut summa omnium laterum unius ad summam alterius (211). At perimeter est summa laterum baseos: sunt igitur inter se ut singula latera, seu radii.

370 Corol. Quum circuli considerentur velut polygona infinitorum laterum, erunt inter se, ut radii. Undè si radius unius est dimidium, aut tertia, quarta, quinta pars alterius, hæc eadem proportio erit inter peripherias. Similiter radii erunt, ut periphæriæ, et ut partes similes periphæriarum, seu ut arcus similes. Eadem etiam proportio cum diametris occurrit. Nam

radii dimidia sunt diametrorum, et quæ proportio radium inter et peripheriam intercedit, inter ipsam et diametrum interveniat, necesse est.

371. Teor. 3. *Hexagoni circulo inscripti latus æquale est radio. Dem.* Sit hexagonum ABC (fig. 25) circulo inscriptum: demittantur radii AC etc. ad angulos hexagoni. Quum latera omnium triangulorum sint radii, erunt isoscelia, et anguli ad basim æquales. Ad angulorum ad verticem mensura sunt gradus 60 (368): ergo duorum ab basim summa est 120: et quoniam æquales sunt, uniuscujusque etiam mensura erit 60. Triangulum igitur est æquilaterum, et basis, quæ est latus hexagoni, æqualis radio.

372 Corol. 1. Hexagoni perimeter sextupla est radii, et tripla diametri. Quum autem peripheria circuli major sit perimetro hexagoni circulo inscripti; luculenter eruitur, peripheriam plus quam ter continere diametrum, adeòque majorem inter ipsas rationem intercedere, quam inter 3: 1.

373 Schol. Hinc celeberrimum problema *quadraturæ* circuli, ut ajunt, natum est; quod diù sublimiorum mathematicorum ingenia torsit; in præsentiarum autem illorum tantum conatus exercet, qui delirare non gravantur in miscendo quadrata rotundis, eo quod illorum differentiam minimè percipiant. Ad praxim enim nihil solutio problematis conferret, quum facillimum factu sit, quadratum æquale circulo construere. Ad theoriam quod attinet, adeò jam per approximationem geometræ accesse-

runt, ut intellectui humano nulla spes videatur affulgere propriùs accedendi. Archimedes rationem 7 : 22; seu 1 : $3+\frac{1}{7}$ quam proximè statuit. Metius Geometra Batavus 113 : 355 rationem veluti luculentiorem omnibus, quæ numeris integris et non ita magnis continentur, proposuit, atque usu magis à geometris recepta est. In calculis verò qui majorem approximationem requirunt, Ludolphus Coloniensis, seu Vanculen, invenit, supposita diametro 1 cum triginta duobus cyphris, seu zeris, peripheriam fore minorem 314, 159, 265, 358, 979, 323, 846, 264, 338, 327, 950. Addita verò unitate, jam evasum ire majorem.

374 Corol. 2. Ex adductis proportionibus facilè, data diametro, aut peripheria circuli, ipsius peripheria, aut diameter invenitur. Etenim instituta proportione per regulam auream 113 : 355 : : ut data diameter ad ignotam circumferentiam, aut vice versa, 355 : 113 : : ut data circumferentia ad ignotam diametrum; quartus terminus per regulam deductus dabit solutionem quæsitam. Idem cum formula Ludolphiana peragi potest, recisis ad dextram tot cyphris, quot opus fuerit in prima ratione, ex. g. 100,000 : 314,159 : : ut data diameter ad circumferentiam x.

375 Theor. 4. *Superficies polygoni regularis æqualis est dimidio producto ex perimetro, et perpendiculari, seu radio recto, in latus polygoni demisso. Dem.* Triangula omnia, in quæ resolvitur polygonum regulare, sunt æqualia; quum æqualibus lateribus homologis, et angulis constent; at superficies cujusque trianguli est dimidium factum ex basi in altitudinem, quæ est radius rectus (358): ergo summa superficierum omnium triangulorum erit dimidium productum ex basibus in altitudinem, seu perimetri in radium.

376 Corol. Superficies circuli æqualis est producto dimidio ex radio in circumferentiam. Jam enim dictum est circulum veluti polygonum infinitorum laterum considerari. Propter eamdem rationem sectoris circuli superficies æqualis est dimidio producto ex radio in arcum sectoris.

§. IV.

Ratio superficierum.

377 Defin. Quemadmodum de lineis dictum est, illarum proportionem esse rationem, qua una aliam continet, aut in illa continetur, sic in superficiebus figurarum similium intelligendum est, eas esse in assignata proportione, quum una continet, aut continetur in alia. Hæc autem ratio potest esse *composita*, aut *duplicata*. Prima est productum duarum rationum inter se ductarum; secunda est productum alicujus rationis ad quadratum elevatæ, ut fusiùs num. 193 explicatum est.

378 Corol. Quum superficies sint productum basium et altitudinum, ab his deducenda est ratio seu proportio inter duas superficies invicem comparatas. Quarè si superficies unius figuræ dicatur S, ejusque altitudo A, ac basis B; erit S=AB. Pariter si alterius superficies

dicatur s, altitudo a, et basis b; erit $s = ab$. Hinc 1.° Si duo rectangula parallelogramma triangula habuerint æquales bases et altitudines, erunt æqualia. Nam $S=AB$, et $s=ab$; quarè $S : s :: AB : ab$; atqui $AB=ab$; igitur $S=s$. 2.° Si habuerint æquales bases, altitudines verò diversas, erunt inter se ut altitudines, sivè unum eodem modo continebit alterum, quo ejus altitudo continet altitudinem alterius. Quod pariter dicendum erit, si altitudines æquales, bases autem inæquales habuerint; ab his nempè eorum diversitas erit repetenda. Nam $S : s :: AB : ab$: undè ablatis æqualibus $A=a$, aut $B=b$, remanet $S : s :: A : a$; sivè etiam $S : s :: B : b$. 3.° Quod si fuerint in ratione reciproca, ita ut unius altitudo æqualis sit alterius basi, et hujus altitudo æqualis basi primi, aut eamdem servent proportionem, erunt æqualia. Nam si $A : a :: b : B$; erit $AB=ab$ (200), atque adeò $S=s$. 4.° Demum altitudinibus et basibus inæqualibus respondet ratio composita baseon et altitudinum: scilicet ducta cujusque basi in altitudinem, quæ ratio inter producta intercedat, hæc eadem existet inter figuras invicem comparatas. Est enim tunc $S : s :: AB : ab$.

379 Theor. 1. *Omnia triangula similia, atque adeò omnes figuræ similes, quæ in triangula similia resolvi possunt, sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Dem.* Triangula similia latera homologa haben proportionalia (338): ergo $A : a :: B : b$; ergo $S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2$ (221). Nempè si quadratum unius lateris bis, ter, etc. continet quadratum lateris

homologi, superficies figuræ erit bis, ter, verbo toties major altera, et vicissim.

380 Corol. Circulorum superficies sunt in duplicata ratione, sivè ut quadrata radiorum, aut peripheriarum. Sunt enim figuræ similes, et veluti polygona infinitorum laterum considerantur (370). Hæc etiam proportio extenditur ad diametros, et arcus similes, ut ibidem annotatum est.

381 Theor. 2. *Polygonorum circulo inscriptorum majus est, quod plura habet latera minimum triangulum. Dem.* Manifestum est (fig. 25) hexagonum majorem superficiem comprehendere, quam triangulum, aut quadratum, aut pentagonum, quæ eidem circulo inscriberentur: latera enim perimetri horum polygonorum minus accederent ad circumferentiam; adeòque minus spatium occuparent. Deindè si loco hexagoni duodecagonum inscriberetur, $aFbEdF$, latera perimetri, quum minora sint, magis ad circumferentiam accedent: triangula enim duo Fcb, Ecb majora sunt, quam triangulum EcF: illud enim superant toto triangulo FbE, quod inter alterius basim, et circumferentiam clauditur, ergo tota altitudine hujusce trianguli magis accedunt ad peripheriam, quum basis FE communis utrique EcF, et FEb sit.

2. Eadem demonstratio in triangulo ADE (fig. 18) institui potest; quodcumque enim polygonum intra eamdem peripheriam inscribatur, quum plura latera habere debeat, ejus perimeter magis ad circnmferentiam accedet; adeòque majus spatium circumscribet.

382 Corol. Circulus, qui polygonum est laterum infinitorum, majorem superficiem habebit, quam reliquæ omnes figuræ intra ipsum inscriptæ; ejusque peripheria major est quacumque perimetro aliorum polygonorum intra ipsius peripheriam inscriptorum.

383 Theor. 3. *Polygonorum circulo circumscriptorum superficies major est illius, quod pauciora, minor, quod plura habet latera. Dem.* Quò plura habet latera polygonum, magis ad peripheriam circuli, cui circumscriptum est, accedit: contrà, cui pauciora sunt latera, major est ab eadem recessus; ergo et major superficies seu ambitus inclusus. Major etiam erit ejus perimeter, quippè majorem ambitum complectitur. Et ob eamdem rationem minor erit perimeter illius, quod plura habet latera, et minima perimeter seu circumferentia circuli, cui circumscribuntur polygona: triangulum verò omnium circumscriptorum majorem superficiem complectetur, et majorem perimetrum habebit.

§. V.

Plana.

384 Defin. *Planum est superficies, cui aptari potest ubique linea recta.* Talis est superficies speculi plani, saltem ad sensum. Quaquaversus enim illi linea recta accommodari potest, aut norma: quæ vices gerit lineæ rectæ, qua plana vulgò examinantur. Hinc *planum* est superficies omnium brevissima, quæ intra easdem lineas includi potest.

385 Theor. *Tria puncta plani positionem determinant, dummodò in eadem recta non sint. Dem.* Per tria puncta, quæ in eadem recta non jaceant duci potest planum, ut est manifestum: at planum hoc unicum est; nam quodcumque aliud diversum, non esset omnium brevissimum intra easdem lineas contentum; tria igitur puncta, per quæ planum transire potest, ejus positionem determinant.

386 Corol. 1. Duæ rectæ se invicem secantes, sunt in eodem plano. Nam punctum, in quo intersecantur, et duo alia puncta in qualibet ipsarum sumpta, plani positionem determinant ex præc., undè per hæc tria puncta duci potest planum. Quod si tertia alia linea has duas secet extra punctum communis intersectionis, etiam hæc jacebit in eodem plano ambabus communi: quum duo puncta lineæ positionem determinent; et supponitur duo puncta diversa cum aliis habere communia. Secus esset, si tres lineæ in unico puncto se intersecarent: hoc enim positionem lineæ rectæ determinare non potest.

387 Corol. 2. Duorum planorum intersectio est linea recta. Concipiantur duo plana se invicem ad quemvis angulum secare: evidens est, partem aliquam ipsis forè communem. At nulla pars, nisi linea recta, utrique communis esse potest. Sicut enim lineæ rectæ se invicem secantes unicum punctum commune habere possunt, ita plana unicam lineam, seu seriem punctorum in directum positorum communem habere possunt. Si enim aliud punctum, quod

non foret in directum positum, ipsis commune esse posset, tria puncta plani positionem non determinarent.

388 Corol. 3. Planum, sivè linea, cuivis plano perpendiculariter insistens, perpendicularis est omnibus lineis in plano jacentibus, ac sub ipsam transeuntibus: aliter enim, aliqua vel deprimeretur, vel elevaretur, adeòque in eodem plano non esset.

389 Corol. 4. Duo plana, aut lineæ eidem plano perpendicularia aut æqualiter ad eamdem partem inclinato, sunt inter se parallela. Distantia enim utriusque ubique eadem est. Præterea planum cui insistunt, considerari potest velut linea utrumque secans: adeòque supposita utrobique æquali inclinatione, facit angulos internum, et externum ad eamdem partem æquales: sunt igitur parallela (300).

390 Schol. Quæ de linearum positione respectiva num. 283, et sequentibus tradita sunt, ad plana æquo jure transferenda erunt. Nam 1. Planum supra planum cadens aut duos angulos rectos, aut duobus rectis æqualis facit. 2. Quod si plana mutuo secantur, valor angulorum ex utraque parte quatuor rectis æquatur. 3. In hac intersectione anguli ad verticem æquales sunt. 4. A puncto dato intra, vel extra planum, tantum una perpendicularis demitti potest. 5. Distantia à puncto quovis ad planum, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta. 6. Si duo plana parallela alio plano secentur, angulos alternos, internos, et externos ad eamdem partem æquales; et duos internos ad eamdem partem æquales duobus rectis habent. 7. Sectiones planorum parallelorum etiam sunt parallelæ. Nimirum quum duo, aut plura plana parallela alio plano secantur, intersectiones parallelæ remanent. 8. Quotcumque plana parallela alteri, erunt et parallela inter se, et omnibus aliis illis parallelis.

CAPUT III.

Stereometria, sivè de Solidis.

§. I.

Solidorum genesis.

391 Defin. 1. *Solidum* geometricum est corpus quodvis tribus dimensionibus constans; sivè longum, latum et profundum. Superficies autem corporis solidi est summa linearum, quibus ejus externa facies terminatur in qualibet dimensione. Quemadmodum autem lineam punctum continenter fluens concipimus, superficiem verò linearum aggregatum in eamdem directionem jacentium, ita corpus seu solidum continuam superficierum aggregationem imaginamur. Ad rei tamen veritatem magis accesseris, si lineam linearum infinitè minimarum congeriem, superficiem ex areolis linearum, solidum ex parvis areis solidis conceperis.

392 Defin. 2. *Prisma* solidum est pluribus planis terminatum (fig. 26), quæ parallelogramma sunt; æquè latum in tota longitudine, ac