non foret in directum positum, ipsis commune esse posset, tria puncta plani positionem non determinarent.

388 Corol. 3. Planum, sivè linea, cuivis plano perpendiculariter insistens, perpendicularis est omnibus lineis in plano jacentibus, ac sub ipsam transeuntibus: aliter enim, aliqua vel deprimeretur, vel elevaretur, adeòque in eodem plano non esset.

389 Corol. 4. Duo plana, aut lineæ eidem plano perpendicularia aut æqualiter ad eamdem partem inclinato, sunt inter se parallela. Distantia enim utriusque ubique eadem est. Præterea planum cui insistunt, considerari potest velut linea utrumque secans: adeòque supposita utrobique æquali inclinatione, facit angulos internum, et externum ad eamdem partem æquales: sunt igitur parallela (300).

390 Schol. Quæ de linearum positione respectiva num. 283, et sequentibus tradita sunt, ad plana æquo jure transferenda erunt. Nam 1. Planum supra planum cadens aut duos angulos rectos, aut duobus rectis æqualis facit. 2. Quod si plana mutuo secantur, valor angulorum ex utraque parte quatuor rectis æquatur. 3. In hac intersectione anguli ad verticem æquales sunt. 4. A puncto dato intra, vel extra planum, tantum una perpendicularis demitti potest. 5. Distantia à puncto quovis ad planum, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta. 6. Si duo plana parallela alio plano secentur, angulos alternos, internos, et externos ad eamdem partem æquales; et duos internos ad eamdem partem æquales duobus rectis habent. 7. Sectiones planorum parallelorum etiam sunt parallelæ. Nimirum quum duo, aut plura plana parallela alio plano secantur, intersectiones parallelæ remanent. 8. Quotcumque plana parallela alteri, erunt et parallela inter se, et omnibus aliis illis parallelis.

CAPUT III.

Stereometria, sivè de Solidis.

§. I.

Solidorum genesis.

391 Defin. 1. *Solidum* geometricum est corpus quodvis tribus dimensionibus constans; sivè longum, latum et profundum. Superficies autem corporis solidi est summa linearum, quibus ejus externa facies terminatur in qualibet dimensione. Quemadmodum autem lineam punctum continenter fluens concipimus, superficiem verò linearum aggregatum in eamdem directionem jacentium, ita corpus seu solidum continuam superficierum aggregationem imaginamur. Ad rei tamen veritatem magis accesseris, si lineam linearum infinitè minimarum congeriem, superficiem ex areolis linearum, solidum ex parvis areis solidis conceperis.

392 Defin. 2. *Prisma* solidum est pluribus planis terminatum (fig. 26), quæ parallelogramma sunt; æquè latum in tota longitudine, ac

duobus planis, seu basibus parallelis, superiore, et inferiore terminatum. Pro numero laterum basis diversa nomina sortitur prisma, nimirum triangulare, quadragulare, pentagonum etc. Omnia enim solida concipi possunt á basi generali; in prismate, si basis sibi parallela semper ascendat, solidum describet prismaticum triangulare, aut quadrangulare, pro natura baseos: quod etiam ad reliquas figuras extendi potest. Et hoc quidem erit prisma *rectum*, si ejus axis, qui est linea recta ab ejus perimetro æqualiter distans, est basibus perpendicularis. Quod si axis fuerit basibus inclinatus, prisma erit *obliquum*.

393 Defin. 3. Species etiam prismatis sunt *cubus*, et *parallelopipedum*. Cubus est solidum sex planis quadratis terminatum, quales sunt tali lusorii. Parallelopipedum sex etiam planis terminatur, quorum opposita tantum sunt æqualia. Si ad angulos rectos latera formata sint, erit parallelopipedum *rectangulum*; secus *obliquangulum*.

394 Defin. 4. Si planum generans, seu basis circulus sit, solidum erit *cylindrus* (fig. 27). In quo si axis AB sit perpendicularis basi FBC, cylindrus erit rectus: si axis inclinatus sit basi, obliquus. Altitudo, sivè prismatis, sivè cylindri, sivè alterius solidi est perpendicularis à summitate basis superioris ad inferiorem productam, ubi opus sit, ut evenit in obliquis. In rectis verò ipsemet axis mensura est altitudinis.

395 Defin. 5. *Pyramis* est solidum basi polygona et puncto terminatum (fig. 28). Juxta numerum laterum basis diversis nominibus donatur pyramis. *Triangularis*, si basis sit triangularis; *quadrangularis*, ut est sepulcrum Cestii ad portam Ostiensem quod unicum est antiquitatis monumentum in nativa integritate conservatum, in hoc antiquitatum romanorum nativo solo. Reliqua enim, aut diruta, videmus, ut amphiteatrum Flavium, aut in aliam conversa figuram, ut pantheon Agrippæ. Ceterum pyramis erit recta, si axis à vertice ad basim perpendiculariter cadat; secus obliqua erit, cujus obliquitatis mensura est inclinatio axis ad basim.

396 Defin. 6. *Conus* est pyramis basi circulari (fig. 29). Ejus genesis concipi potest triangulo, sivè plano trianguli ABC integra circumvolutione, supra rectam AB immotam, descriptum. Si axis AB perpendiculariter cadat supra basim CD, conus erit rectus: obliquus autem, si in alterutram partem inclinet. Quod si plano aliquo basi parallelo EF conus vertice AEF mulctetur, reliquum CDEF, dicitur *conus truncatus*.

397 Defin 7. Si semicirculus (fig. 30) ACB circa immotam diametrum AB circunducatur, donec ad locum, undè discessit, redeat, *sphæram* describet. Diameter immota, circa quam sphæra circumagitur, est illius axis, cujus extrema puncta AB dicuntur sphæræ poli. Circulus maximus à polis distans nonaginta gradibus, seu quadrante, dicitur sphæræ *æquator*. Punctum æquè distans ab omnibus superficiei punctis, est centrum sphæræ: lineæ à centro

ad superficiem ductæ, sunt sphæræ radii. Si aliquo plano HI per centrum transeunte secetur sphæra, hujusmodi sectio erit circulus maximus, atque adeó omnes circuli maximi per centrum sphæræ transeunt. Reliqui circuli eo minores erunt, quo magis à centro distent.

398 Corol. 1. Duo maximi circuli sphæræ necessario se intersecant; eorumque communis sectio est diameter. Quum enim per centrum transeant, in centro se intersecare debent, et transeant, in omni linea, quæ per centrum transeat, qualis est diameter.

399 Corol 2. Puncta omnia semiperipheriæ, cujus revolutione sphæra generatur, describunt circulos parallelos; eo majores, quo propiùs ad centrum accedunt; et minores, quo longiùs ab ipso recedunt. Puncta vero á centro æquè distantia describunt circulos æquales. Jam ex circulis, maximus est, qui per centrum transit; reliqui ab ipso utrinque æquè distantes, æquales sunt. Quarè in sphæra cœlesti, et in globo terrestri tropici, et circuli polares æquales sunt: quod postea in Astronomia physica, et in Geographia usui erit. Demum ultimus circulorum parallelorum in punctum abit.

§. II.

Mensura superficierum in solidis.

400 Defin. Omnes mensuræ superficierum duplici dimensione coalescunt, latitudine nimirum, et longitudine. Undè nihil de profunditate cogitantes, externam tantum solido-

rum faciem hic considerare debemus.

401 Theor. 1. *Superficies prismatis, cujus latera rectilinea sunt basi perpendicularia, est productum ex perimetro basis in altitudinem, seu latus rectum prismatis, addita dupla basis superficie. Dem.* Singulæ facies prismatis sunt rectangula, quorum mensura est productum basis in altitudinem (357): collecta igitur summa rectangulorum superficiem prismatis componentium, habebitur ejus superficies, demptis basibus. At hæc summa est perimeter basis, ducta in altitudinem, seu latus rectilineum, ut est manifestum: habemus igitur superficiem lateralem prismatis, ducta perimetro in basim. Jam superficies basis, quum sit polygonum regulare, habebitur ex dimidio producto radii recti in perimetro (375): et quum duæ bases superior et inferior prismatis sint æquales, utriusque superficies habebitur ex integro producto radii in perimetrum.

402 Corol. 1. Cylindrus considerari potest tamquam prisma *infinitilaterum*; adeòque ejus superficies æqualis erit producto perimetri, seu circuli in ejus altitudinem, additis superficiebus utriusque basis, seu duorum circulorum (376).

403 Corol. 2. Superficies cubi constat sex quadratis æqualibus; unde ejus superficies æqualis est superficiei unius ex quadratis sexies sumpti. Quum verò parallelopipeda sex superficiebus terminentur, quorum bina æqualia sunt; inveniatur summa trium superficierum inæqualium, et hæc bis sumpta, dabit totam superficiem parallelopipedi.

404 Theor. 2. *Superficies pyramidis rectæ æqualis ex dimidio producto, ex perpendiculari ducta ex vertice ad unum ex lateribus basis, et perimetro basis; addita superficie ejusdem baseos. Dem.* In pyramide tot sunt triangula isoscelia, quot latera seu facies pyramidis: aut superficies trianguli æqualis est dimidio producto ex perpendiculari ducta in basim (358): ergo si summæ horum triangulorum addatur superficies baseos (375), habebitur tota superficies pyramidis.

405 Corol. 1. Conus considerari debet veluti pyramis *infinitilatera*, quemadmodum de cylindro dictum supra est, quum utriusque basis circulus sit. Hinc superficies coni recti habebitur ex dimidio producto perimetri, seu circuli basis ducti in latus coni; addita superficie circuli, cui insistit.

406 Corol. 2. Pyramidis plano basi parallelo truncatæ superficies concipi potest, veluti divisa in tot trapezia æqualia, quot sunt facies pyramidis. Singula autem trapezia dividi possunt in duo triangula inæqualia, quorum bases sunt latus sectionis, et latus basis pyramidis: altitudo verò utriusque distantia. Quarè ducta uniuscujusque basi in altitudinem, dimidium productum dabit *aream*, ut ajunt, seu superficiem, cujusque trianguli, atque earumdem summa trapeziorum superficiem: quibus additis superficiebus utriusque baseos, propter inæqualitatem seorsim dimetiendis, habebitur tota superficies pyramidis truncatæ.

407 Schol. Brevius, superficies pyramidis

truncatæ æqualis est dimidio producto ex distantia perpendiculari, et utriusque basis perimetro, plus duabus superficiebus utriusque basis.

408 Corol. 3. Si eodem modo tractetur conus, at dictum est modò de piramide; quum conus concipiatur velut pyramis *infinitilatera;* coni truncati superficies æqualis erit dimidio producto ex peripheria utraque in latus, seu *apothema* coni truncati; plus duabus utriusque circuli superficiebus, inter quas continetur conus.

409 Schol. Brevius, deducitur superficies lateralis coni truncati, accipiendo peripheriam circuli, æquè distantis ab utraque basi superiori, et inferiori coni truncati, eamque ducendo in latus seu apothema coni. Nam quum hæc peripheria sit media arithmetica proportionalis inter superiorem, et inferiorem basis peripheriam, æqualis est semisummæ utriusque circumferentiæ (179). Quod autem circulus GH (fig. 29) seu ejus peripheria, sit media proportionalis inter peripherias EF, DC coni truncati CDEF, sic demonstro. Ducantur perpendiculares Em, Fn; Gr; Hs: triangula EGm, GDr sunt similia: nam anguli in m et r sunt recti; in G et D, ut potè interni ad eamdem partem inter parallelas, sunt etiam æquales (299): Ergo Em: Gr :: Gm: Dr (338): at $Em{=}Gr$ ex suppositione: ergo etiam $Gm{=}Dr$. Eadem demostratio tenet in triangulis FnH, GsH ad alteram partem formatis. Idem igitur excessus est inter diametros EF, et GH, atque inter ipsam GH et DC:

ergo EF, GH, GH, DC (179. In circulis verò peripheriæ sunt in ratione diametrorum (370): sunt igitur peripheriæ in eadem ratione arithmetica, ita ut extendi valeat proportio modò enuntiata ad circunferentias trium circulorum.

420 Corol. 4. Segmentum sphæricum A*no* (fig. 30) considerari potest velut genitum à revolutione infinitarum minimarum tangentium, quarum singulæ minimum conum truncatum describunt.

411 Corol. 5. Eodem modo concipi potest *zona* sphærica, duobus circulis parallelis *lm*, *no* conclusa, velut genita à revolutione infinitarum minimarum tangentium, quarum singulæ minimum conum truncatum describunt et composita ex duobus conis truncatis HI*on*, H*lm*I per communem basim HI simul conjunctis.

412 Theor. *Si sphæræ* LH (fig. 31), aut AB (fig. 30) *circumscribatur cylindrus* EGIF, *cujus axis* LH *æqualis sit sphæræ diametro, et basis æqualis circulo maximo ejusdem sphæræ, hujus superficies æqualis erit superficiei laterali cylindri eidem circunscripti. Dem.* 1. Concipiatur particula quævis *ns* circuli genitoris infinitè minima, ita ut cum particula *s* lineæ tangentis A*s* hujus puncti confundatur: hæc tangens producta usque ad punctum A, et circa axem HL, productum in A, circumvoluta, generabit conum A*rs*, et particula *ns* conum truncatum *mnrs*. Superficiei hujus coni truncati mensura est, dimidium productum lateris *ns* in peripherias circulorum, quorum radii sunt *qn*, *ts*; seu

in peripheriam radii *po* ab utraque æquè distantem (409).

413 2. Ducatur radius C*o*=LF=D*t*, quum sint radii æqualium circulorum. Triangula omnia A*qn*, A*po*, A*ts*, *op*C sunt similia (335 et 345); et quoniam *qn*, *ts* sunt radii paralleli, erit *qt* : *ns* :: A*t* : A*s*; atque eadem proportio erit inter reliqua latera homologa (338): ergo *qt* : *ns* :: *op* : C*o*; et *qt*×C*o*=*ns*×*op* (200.) Hæc producta æqualia exprimunt superficiem sectionis cylindri DK*qt*, et coni truncati *nq ts*, Nam *qt*=DK, et D*t*=C*o*: at superficies cylindri est productum perimetri in altitudinem: ergo quùm circuli sint ut radii (370) eadem est proportio; sive ducatur in radium, sivè in perimetrum. Demum jam ostensum est aream coni truncati, qualis est *nqts*, esse æqualem producto *ns*×*op* (409). Demonstratum igitur est superficiem segmenti *nstq*=DK*qt*, quæ est segmentum superficiei lateris cylindri.

414 3. Si hæc demonstratio iteretur in quolibet segmento sphæræ comparato cum reliquis portionibus cylindri, tota superficies sphæræ æqualis erit superficiei laterali cylindri eidem circumscripti. Tirones animadvertant portionem *nqts* in figura satis adspectabilem exhiberi, ut oculis partes in demonstratione assignatæ discerni possint. Mente tamen ad particulas minimas reduci debet ut num. 350 exposuimus.

415 Corol. 1. Superficies sphæræ æqualis est producto axis, sivè diametri, in circulum sphæræ maximum; adeòque est quadrupla superfi-

ciei ejusdem circuli; quum hæc sit productum ex peripheriæ in dimidium radium, seu quartam partem diametri (376).

416 Corol. 2. Quum superficies lateralis cylindri æqualis sit superficiei sphæræ, additis duabus basibus, quæ sunt duo circuli maximi, tota superficies cylindri sextupla erit areæ circuli maximi; et cum superficie sphæræ erit, ut 6: 4, sivè ut 3: 2.

417 Corol. 3. Ad habendam superficiem sphæræ, cujus nota diameter, inveniatur primum periphæria circuli maximi juxta proportiones (n. 373) enuntiatas inter diametrum et periphæriam: hac inventa, ducatur in notam diametrum; productum dabit totam superficiem sphæræ. Manifestum est hæc omnia in tot problemata converti posse, quæ brevitatis gratia, contractiùs exposita sunt.

§. III.

Ratio superficierum.

418 Defin. Duo solida similia sunt, quum lateribus numero æqualibus, et similibus constant: ex. gr. duo cubi, duo parallelopipeda, quantumvis magnitudine differant. At pyramis, et cylindrus, prisma triangulare, et pentagonum, aut alia, quorum altitudines non essent basibus proportionales, solida simila non sunt.

419 Defin. 2. factores superficierum sunt latera, ex quibus superficies veluti creari concipitur. Sic factores lateralis superficiei cylindri, et prismatis sunt periphæria et altitudo: pyramidis dimidium latus perpendiculare ad basim, et ipsa perimeter baseos; quod etiam ad conum extendendum est: sphæræ factores sunt axis, et circulus maximus.

420 Theor. 1. *In omnibus solidis superficies sunt, ut fractorum producta. Dem.* Superficies cujuscumque solidi veluti creari concipitur ex elementis, ex quibus componuntur factores: ex gr. sint $A \times B$ factores unius, et $a \times b$ factores alterius; altitudines nimirum et bases, patet superficies fore ut $AB : ab$; quum hæc producta exprimant facta, sivè superficies: ergo $S : s :: AB : ab$, sivè superficies ut factores (378).

421 Theor. 2. *Superficies, que factorem unum habent æqualem, sunt in ratione alterius factoris. Dem.* Sint S, s duæ superficies comparandæ; quorum factores sunt $A \times B$, $a \times b$; si $A = a$, diferentia inter ipsas intercedens erit ea, quæ inter B et b reperitur: hoc est $S : s :: B : b$. Contrà verò si $B = b$, erit $S : s :: A : a$; hoc est, ut alter factorum, in quo inæqualitas reperitur; quemadmodum de figuris planis dictum est num. 378. Quarè duæ superficies solidorum habentium æquales bases aut perimetros, erunt ut altitudines, seu latera: quod si hæc sint æqualia, erunt ut perimetri: denique si utraque inæqualia sint, erunt in ratione composita, sivè ut producta $AB : ab$, scilicet altitudinum, et basium.

422 Theor. 3. *Solidorum superficies, quorum factores sunt invicem proportionales, erunt inter se, ut quadrata dimensionum homologa-*

rum. Dem. Superficies solidorum regularium reducuntur ad figuras planas rectangulas, quarum factores sunt bases, et altitudines: at figuræ similes, quarum scilicet latera homologa sint proportionalia, sunt in ratione duplicata laterum homologorum (379), ergo etiam superficies factorum proportionalium erunt, ut quadrata dimensionum homologarum.

423 Corol. Sphæræ omnes: cujuscumque magnitudinis, sunt solida similia: quæmadmodum omnes circuli sunt figuræ planæ similes (380): ideòque earum superficies erunt in duplicata ratione diametrorum, et peripheriarum, aut radiorum; sivè ut quadrata harum dimensionum.

§. IV.

Soliditas corporum.

424 Defin. Ad definiendam solditatem corporum, opus est aliqua mensura, in qua tres dimensiones reperiantur, quemadmodum ad superficies dimetiendas, mensura duplici dimensione constante opus est. Quapropter uti superficierum dimensio ad quadratum exigitur, ita etiam solidorum ad cubum reducitur. Opus igitur est, ad dimetiendum corpus triplici dimensione donatum, mensura etiam ad triplicem extensionem deducta, putà leucas, milliaria, decempedas, hexapedas, pedes, pollices, lineas, juxta uniuscujusque corporis dimetiendi indolem adhibendas. Mensura verò cubica ea dicitur, quæ sex lateribus quadratis datæ dimensionis constat. Sic pes cubicus est, cujus sex latera sunt pes quadratus; spatiumque ab

his superficiebus inclusum, est pes cubicus. Rursus si in pede cubico partes componentes considerentur, tot pollices cubici invenientur, quot continet pes quadratus in suum latus, seu radicem ductus, nimirum $12 \times 12 = 144 \times 12 = 1728$. Quod pariter ad lineas respectu pollicis applicandum est.

425 Theor. 1. *Soliditas prismatis æqualis est producto basis; seu superficiei ejusdem, in altitudinem ductæ. Dem.* Juxtà dicta de genesi solidorum, prisma gignitur à motu perallelo basis per totam altitudinem; ducta ergo basi in altitudinem, habebitur soliditas prismatis. Sit ex. gr. basis $= 10$, altitudo $= 100$; erit soliditas tota prismatis $= 1000$: nempè si ponantur pedes, erunt 1000 pedes cubici soliditas prismatis; et hæc differentia inter mensuram superficierum, et soliditatum intervenit, quod productum in dimensionem superficierum enuntiat pedes quadratos, in solidorum verò mensura dat pedes cubicos.

426 Corol. 1. Soliditas cylindri est etiam productum basis in altitudinem; quum cylindrus tamquam prisma *infinitilaterum* consideretur. Hinc duo prismata, aut duo cylindri ejusdem basis, et altitudinis sunt perfectè æqualia.

427 Corol. 2. Cubi soliditas est productum lateris; seu altitudinis in superficiem basis (424). Parallelopipedi etiam soliditas invenitur, ducta altitudine in superficiem bassis; concipi enim possunt hæc solida tamquam prismata quadrangularia, et revera talia sunt; quamvis ad par-

ticulares classes solidorum referantur, ob peculiares in ipsis propietates, geometrica speculatione dignas.

428 Theor. 2. *Soliditas pyramidis æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis: seu tertiæ parti producti ex altitudine in basim. Dem.* Sit (fig. 32) pyramis altitudinis BP, quæ sit dimidium altitudinis cubi AB; et ejusdem basis CDEF cum eodem cubo: manifestum est ex cubo AB sex oriri pyramides ejusdem basis et altitudinis ac BP: erit igitur quælibet illarum sexta pars ejusdem cubi. At mensura soliditatis cubi est productum basis in latus sive altitudinem: ergo illarum pyramidum soliditas erit productum ex basi in sextam partem altitudinis AB; aut in tertiam partem altitudinis BP; seu arit tertia pars cubi ejusdem basis, et altitudinis ac ipsa. Quum verò eadem sit mensura soliditatis prismatis, et cubi; generalior regula statui potest, pyramidis soliditatem esse tertiam partem soliditatis prismatis ejusdem basis, et altitudinis: ut patet etiam ex sequenti.

429 Theor. 3. *Prisma triangulare potest dividi in tres pyramides perfectè æquales. Dem.* Secetur (fig. 26) prisma AB, plano triangulari ADF, et ACF; habebuntur duæ pyramides ADEF, et AFBC æqualis basis ADE, BCF; atque æqualis altitudinis AB, EF. Residuum erit alia pyramis ADFC; quæ quidem ita collocetur, ut pro basi habeat triangulum ADF communis sectionis cum altera ADFE, pro cujus basi etiam assumi potest idem triangulum ADF. Sic

inversæ pyramides habent easdem bases, ut est manifestum: enimverò altitudines etiam æquales sunt, quum omnia opposita latera sint æqualia in prismate: sunt igitur tres pyramides interse æquales; et simul sumptæ æquales toti prismati AB. Mechanica demonstratio hujus theorematis argilla aut cera ob oculos proponi potest.

430 Corol. 1. Omnia prismata quorumcumque laterum dividi possunt in tot prismata triangularia, quot fuerint anguli in prismate: et quum omnia prismata triangularia sint tripla pyramidis ejusdem basis; et altitudinis, evidenter eruitur, quodcumque prisma esse triplum pyramidis ejusdem ac ipsum basis, et altitudinis; aut quod in idem recidit, pyramidem esse tertiam partem prismatis ejusdem basis, et altitudinis. Pyramis etiam polygona dividi potest in tot pyramides triangulares, in quot triangula polygonum basis resolvi potest.

431 Corol. 2. Conus pyramis infinitorum laterum (405): undè erit etiam tertia pars prismatis infinitilateri, qualis est cylindrus, ejusdem ac ipse basis, et altitudinis.

432 Corol. 3. Sphæra considerari potest veluti coalescens ex infinitis pyramidulis, quarum communis vertex est centrum sphæræ, bases autem ejusdem superficies. Mensura vero soliditatis pyramidis est tertia pars producti altitudinis in basim: erit igitur soliditas sphæræ æqualis $\frac{1}{3}$ producti ex radio in supeficiem, seu tertiæ parti radii ducti in superficiem, aut hujus tertiæ parti ductæ in radium. At sphæræ su-

perficies quadrupla est superficiei circuli maximi ejusdem sphæræ (415): soliditas ergo sphæræ habebitur, ducendo tertiam partem radii in superficiem circuli maximi quater sumptam.

§. V.

Ratio solidorum.

433 Defin. Quum soliditas sit productum superficierum in altitudines, triplex mensura in soliditate investiganda considerari debet. Nimirum superficies est productum longitudinis in latitudinem; soliditas verò profunditatis in productum harum dimensionum. Undè in comparatione solidorum triplicis hujus mensuræ habenda ratio est.

434 Theor. 1. *Cylindri, et prismata, recta, vel obliqua, ejusdem basis, diversæ tamen altitudinis, sunt inter se ut altitudines. Dem.* Ejusmodi solida æqualis basis, et altitudinis sunt æqualia (426): ergo quum bases sint æquales, altitudines verò differant, illorum diferentia ab his est desumenda.

435 Corol. Coni, et pyramides, quæ basibus æquales sunt, si altitudine differant, illorum diversitas ab hac desumetur. Sunt enim tertia pars prismatis, aut cylindri ejusdem basis, et altitudinis (430, et seq.)

436 Theor. 2. *Prismata et cylindri (idem etiam dicendum de pyramidibus et conis) quorum altitudines tantum sunt æquales, erunt inter se ut bases. Dem.* Eadem est ac theorematis præcedentis. Quod si fuerint in ratione reciproca

basium, et altitudinem: nimirum basis unius, alterius altitudini æqualis, et contra, erunt æqualia. Et vice versa omnia prismata æqualia habent altitudines, et bases reciprocè proportionales.

437 Theor. 3. *Solida similia sunt in ratione triplicata laterum homologorum, sivè sunt ut cubi prædictorum laterum. Dem.* Solida similia ea dicuntur, quorum latera homologa, tres nimirum dimensiones, ex quibus coalescunt, sunt proportionalia. At soliditas est productum altitudinis, vel axis, in superficiem, quæ ex duabus aliis dimensionibus est productum. Solida igitur sunt in ratione composita trium dimensionum homologarum; ac proindè in ratione triplicata cujuslibet: quemadmodum de superficiebus dictum est (379), esse in ratione duplicata laterum homologorum.

438 Corol. 1. Ut hactenus dicta in præcedentibus articulis generali formula comprehendamus, quæ ad solida invicem comparanda extendatur, eorum soliditates dico S, s; et A, B, C, a, b, c, eorum factores: erunt igitur $S : s :: ABC : abc$. Hinc 1.° Si $A = a$, $S : s :: BC : bc$; 2.° Si $A : a :: bc : BC$, $S = s$ (378 n. 3). 3.° In solidis similibus $S : s :: A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: C^3 : c^3$. Sit ex g. cubus $A = 27$, et cubus $a = 8$: quum sint in ratione triplicata dimensionum homologarum, et omnes dimensiones in cubo sint æquales, erit latus $A^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$; et latus $a^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$: et $A^3 : a^3 = A \times A \times A : a \times a \times a$: quæ ratio luculentissimè est triplicata laterum homologorum A et a, sivè 3

et 2; eruntque prædicti cubi in ratione triplicata 3: 2; nimirum 27: 8=3×3×3: 2×2×2.

439 Corol. 2. Sphæræ sunt in ratione triplicata diametrorum, aut radiorum, peripheriarum, aut arcuum similium. Nam quum sphæræ sint in solida similia, earumque factores seu dimensiones sint diametri, aut radii, et peripheriæ (432), sivè earum partes aliquotæ, erunt inter se ut cubi harum dimensionum. Sint duæ sphæræ S et s, quarum diametri, aut radii sint D=3, et $d=2$; erit S : s : : D^3 : d^3, sivè S: s : : 27 : 8. Etenim soliditas sphæræ habetur, ducto radio in superficiem circuli maximi (432); adeòque quum superficies circuli sint in ratione duplicata radiorum (379), sphæræ erunt in triplicata eorumdem.

440 Theor. 4. *Sphæra æqualis est duobus tertiis partibus cylindri eidem circumscripti, seu cujus basis circulus maximus, altitudo verò sphæræ diameter sit. Dem.* Esto (fig. 33) ACD quadrans circuli, qui quadrato ABDC includatur: ducta diagonali BC, et radio CG, concipiatur volvi circa immotum radium AC; planum est; integra circumvolutione descriptum iri cuadrato ABDC cylindrum; radio CD hemisphærium AD, et diagonali BC conum ABC: omnia hæc solida habebunt pro basi circulum maximum sphæræ, pro altitudine ejusdem radium.

Jam ducatur mr æqualis, et parallela AB et CD, et perpendicularis lateribus AC, BD: erit CA : AB :: Cm : mn (338); at CA=AB; ergo Cm =mn. En radios triplices sectionis: nam mr est

radius sectionis cylindri; mG sphæræ, et mn coni. Rursus in triangulo rectangulo CmG est $CG^2 = Cm^2 + mG^2$ (345): at CG=CD=mr: ergo $mr^2 = Cm^2 + mG^2$: sivè substituendo pro Cm^2, ejus æqualem mn^2, erit $mr^2 = mn^2 + mG^2$; nimirum circulus, cujus radius CG=summæ circulorum, quorum radii mn, et mG (370), seu secti cylindri æqualis est summæ sectionum hemispherii, et coni. Hæc demonstratio iterari potest in aliis sectionibus infinitè parvis, et proximis, ut ab, usque ad exhaustionem cylindri (350); ubique invenietur CG^2 seu mr^2 =quadratis sectionum sphæræ et coni; adeòque totus cylindrus ABDC æqualis hemisphærio AD, et cono ABC simul sumptis. At conus est $\frac{1}{3}$ cylindri ejusdem basis et altitudinis (431): ergo reliquæ $\frac{2}{3}$ sunt dimensio hemisphærii AD. Demum si his omnibus corporibus altitudo AF dupliciter, evidens est proditura tria solida, nimirum cylindrus, cujus basium radius AB, et FH, axis AF, sphæra, cui diameter est eadem atque axis cilindri, radius AC=AB generans circulum maximum æqualem basi cylindri; et denique conus, cujus basis radius sit eadem AB; altitudo verò, sivè axis, diameter sphæræ, æqualis axi cylindri. Quæ quidem solida etiam erunt in proportione superius assignata; scilicet conus $\frac{1}{3}$, sphæra $\frac{2}{3}$ cylindri eidem circumscripti.