TRACTATUS IV.

TRIGONOMETRIÆ LINEAMENTA.

CAPUT I.

Notiones Trigonometricæ.

441 Defin. 1. Trigonometria est ars metiendi triangula calculo arithmetico, sivè triangula resolvendi, arithmeticam geometriæ applicando. In triangulo autem tres anguli, et tria latera inveniuntur, ex quibus tota triangulorum resolutio dependet. Quum verò innumera triangula æquiangula fieri possint, lateribus semper majoribus, aut minoribus, planum est, nec tres angulos tantum, nec aliquot latera sine angulis sufficere ad resolutionem trianguli. Porrò angulo eodem permanente, latus oppositum decrescere, vel augeri in infinitum potest. Undè nulla ratio geometrica inveniri potest inter angulum, et latus oppositum, ex qua trianguli resolutio erui valeat. Quam tamen rationem non dicunt anguli ad latera habent sectiones parallelæ (338), ad quas reduci possunt sinus, ut mox videbimus: atque ideò *functiones* ab aliquibus auctoribus appellantur, eo quod vices angulorum et laterum fungantur in proportionibus.

442 Schol. Triangula, non solum lineis re-

ctis, verum etiam curvis formari possunt: ex. g. si in sphæra tres arcus se mutuò intersecant, triangulum curvilineum formari debent. Hinc divisio trigonometriæ in *planam*, et *sphæricam* ortum duxit. Primam in hoc tractatu, brevitate nobis præfixa, trademus; alteram tantum delibabimus.

443 Defin. 2. Sit angulus BCT (fig. 34) cui radio CT circumscribatur circulus ATE*t*. 1. Perpendicularis BG à puncto B ad radium CT ducta, vocatur *sinus rectus* anguli BCT, seu arcus BT, qui talem angulum metitur: pars verò radii GT, inter sinum rectum, et arcum intercepta, dicitur *sinus versus* ejusdem anguli, et arcus. 2. Si ad punctum T radii CT ducatur perpendicularis ST, tangens circulum in puncto T, et producta ex altera parte donec occurrat CB productæ in S; ST dicitur *tangens*, CS secans ejusdem arcus BT, et anguli BCT.

444 Corol. 1. Angulus BCT, vel arcus BT ad complendam semiperipheriam deficit toto angulo obtuso BC*t*, arcu BA*t*, hic dicitur *supplementum* tam anguli, quam arcus BCT; isque est obtusi suplementum, scilicet ad 180 grad. ex quibus componitur semiperipheria circuli. Hinc idem sinus rectus BG communis est utrique angulo, et arcui BCT, et BC*t* ex quibus coalescit tota semiperipheria. TA*t*. Nam ut habeatur sinus rectus cujuscumque anguli, vel arcus, debet duci perpendicularis ad radium sivè diametrum TC*t* ex puncto concursus lateris anguli, et peripheriæ; et hæc solum potest esse BG; ea igitur communis est utrique angulo obtuso, et

acuto. Rursus tangentes, et secantes eorumdem arcuum, et angulorum etiam æquantur inter se. Ducantur enim tangens, et secans ad punctum t: erunt st, Cs (443): at in triangulis CST, Cst anguli in C, utpotè ad verticem oppositis, sunt æquales; quod pariter dicendum de angulis T et t, qui recti sunt, ac demum latus seu basis $CT = Ct$, supra quam æquales anguli jacent: ergo tota triangula æqualia sunt, ac proindè latera homologa $ST = st$, et $CS = Cs$ (334) nimirum tangentes, et secantes utriusque anguli æquales sunt.

445 Corol. 2. Si latus BC anguli BCT magis ac magis recedat à latere CT, angulus in C, et arcus BT semper crescent, donec BC confundatur cum AC: tunc ACT erit rectus, sector ABTC quadrans, et sinus rectus BG continenter augescens fiet radius AC. Hic dicitur *sinus totus*, quia major quocumque alio sinu recto. Pariter sinus versus GT eadem proportione crescens, æquabitur radio CT. Demum CS, antea secans tangentem ST, evadet ipsi parallela, adeòque numquam concurrent, sed erunt infinitæ.

446 Corol. 3. Omnes circulorum chordæ sunt duplus sinus rectus dimidiæ partis arcus ab ipsis subtensi. Nam sinus BG, productus usque ad punctum D, fit integra chorda arcus BTD; at radius CT, quum sit perpendicularis chordæ BD, eam bifariàm secat (303). ergo tota BD dupla est BG, seu sinus recti. Deindè in triangulis BCG, DCG, $BC = DC$; at anguli in G sunt recti (443); ergo $BC^2 = BG^2 +$

CG^2 et $CD^2 = DG^2 + CG^2$; ergo detracto communi quadrato CG^2, quæ remanent $BG^2 = DG^2$, et $\sqrt{BG^2} = \sqrt{DG^2} = BG$, et DG: et BD dupla BG, seu sinus recti (345).

447 Corol. 4. In triangulo rectangulo BCG, si hypotenusa BC assumatur pro radio circuli, seu pro sinu toto, cathetus BG erit sinus rectus anguli sibi oppositi: similiter altera catus anguli sibi oppositi: similiter altera cathetus CG esset sinus rectus alterius anguli B; quod manifestum erit, si centro B radio BC describatur circulus alter. Quod si non jam hypothenusa, sed una ex cathetis pro radio circuli describendi assummatur, altera cathetus erit tangens circuli ejus lineæ, quæ sinus rectus est anguli assumpti pro centro, quum sit ad ejus extremitatem perpendicularis: ex. g. si CG indicetur pro radio, BG erit tangens anguli BCG, et hypotenusa BC secans ejusdem. Idem eveniret in altera catheto CG, BG desumpta pro radio.

448 Defin. 3. Si angulus non est rectus, alter angulus, in quo deficit à recto, vel per defectum, vel per excessum, dicitur ejus *complementum.* Talis est angulus ACB (fig. 34) respectu utriusque BCT, et BCt; in primo per defectum in altero per excessum; quia primus deficit à recto parte ACB, secundus eadem quantitate ipsum superat. Deindè sinus rectus anguli complementi dicitur *cosinus:* tangens anguli complementi dicitur *cotangens*, atque ejusdem secans *cosecans* respectu utriusque anguli tam obtusi, quam acuti, cujus est complementum. Sic perpendicularis Bb ad radium AC

est cosinus angulorum BCT, et BC*t*; quia sinus est rectus anguli complementi ACB, atque ejusdem anguli tangens, et secans est cotangens, et cosecans prædictorum angulorum.

449 Corol. 1. Pars radii CG à sinu recto BG divisa, est æqualis cosinui angulorum, quorum est sinus BG. Nam anguli ACG, et BGC sunt recti, quum ACT sit quadrans circuli, et BG sinus rectus; at etiam in *b*, et B anguli sunt recti; sunt enim B*b*, et CG perdendiculares AC, et BG: est igitur B*b*CG parallelogrammum, cujus latera opposita sunt æqualia (351); ergo CG=B*b*.

450 Corol. 2. Si in triangulo rectangulo BCG hypothenusa BC sumatur pro radio, cathetus BG erit sinus rectus, atque altera cathetus CG erit cosinus ejusdem anguli BCG: et contra centro B descripto circulo, CG erit sinus rectus, atque alterum perpendiculum BG cosinus anguli B.

451 Schol. Frequentiùs sinus rectus simplici nomine sinus inuitur. Brevitatis gratia sic scribi solent sin. pro sinu: r. pro radio: tang. pro tangente: sin. v. pro sinu verso: cos. et cos. pro cotangente, et cosecante.

CAPUT II.

Trigonometriæ fundamenta.

452 Theor. 1. *Retento eodem angulo, lineæ trigonometricæ, quas functiones vocant, sunt radiis proportionales.* Nimirum quæ pars respectu sui radii fuerint, sinus, cosinus, tangens, cotangens, secans, cosecans etc. in circulo majori eadem etiam erit in circulo minori respectu ejusdem radii minoris. *Dem.* Describantur (fig. 35) omnes lineæ trigonometricæ arcuum similium AF, G*l* sub angulo ABF: AT sit tangens arcus AF; BS secans; FE sinus rectus; BE cosinus; CS cotangens. Et similiter in arcu G*l* lineæ respondentes G*t*, B*s*, *el*, *e*; B, D*s*. Triangula omnia ABS, EBF, GB*s*, *e*B*l* sunt similia: nam angulus in B communis, in A, E, G, *e* rectus: ergo omnia triangula sunt similia, et latera homologa proportionalia (338). En proportiones laterum.

BF : B*l* :: EF : *el* :: EB : *e*B
BA : BG :: AS : G*s* :: BT : B*t*
BC : BD :: CS : D*s* :: BS : B*s*

In quibus proportionibus continetur ratio linearum trigonometricarum cum proprio radio, ut attentè eas inspicienti manifestum erit.

453 Corol. Ex dictis patet linearum trigonometricarum absolutas magnitudines, à magnitudinibus radiorum, non angulorum pendere: augeri enim possunt vel minui, angulis intactis, ut in exemplo adducto factum est. Angulo namque in B eodem semper manente, sinus, et reliquæ functiones crescere infinitè possunt, radiis continenter adauctis. Magnitudines verò *respectivæ* seu *comparativæ* ab augmento radiorum minimè desumuntur. Etenim quæ pars est sinus EF (fig. 35), etiam est et sinus *el* in calculo trigonometrico; quum uterque sinus sit anguli 45°, seu dimidii quadrantis.

Atque hæc quidem relativa magnitudo ea est quæ spectari debet in functionibus; ita ut major, aut minor sinus ille dicatur, qui major, vel minor fuerit in graduum enumeratione. In casu figurato uterque sinus æqualis erit, est enim sinus 45°, tam in majori, quam in minori arcu. Contrà verò sinus totus BD in minori quadrante dimidio graduum numero major est altero EF; qui est sinus 45°; quantumvis hic attenta magnitudine absoluta alterum duplo, excedat.

454 Theor. 2. *In triangulo latera sunt ut sinus angulorum, qui ipsis opponuntur. Dem.* Sit (fig. 13) triangulum ABC: per angulorum vertices circumscribatur circulus; erit latus AB ad AC, ut sin. ang. C ad sin. ang. B. Nam chordæ circulorum sunt duplus sinus angulorum, sivè arcuum ab ipsis subtensorum (446); ergo chorda AB est duplus sinus anguli C; et altera AC etiam duplus sinus anguli. B. est igitur AB : AC :: 2. sin. ang. C: 2 sin. ang. B. Et quum dimidia etiam sint ut tota, erit AB : AC :: sin. ang. C: sin. ang. B. nimirum latera ut situs angulorum, qui ipsis è regione sunt.

455 Corol. Quum in triangulo majori angulo opponatur majus latus, minori minus, æqualibus æqualia (330); tum etiam sinus majoris anguli major, minoris minor, æqualium æquales erunt. Neque tamen indè arguere licet, angulos esse in ratione sinuum: jam enim ostensum est (441) angulos minimè rationem laterum sequi; et quum sinus laterum rationem sequantur, et theor. præced. demonstratum est, horum non angulorum sinus rationem servabunt. Verum tamen est, angulo decrescente, sinum etiam minui; evanescente, evanescere: at nulla constans ratio invenitur inter ipsos et sinus, quemadmodum nec inter angulos et latera.

456 Theor. 3. *In quovis quadrilatero circulo inscripto duo rectangula ex lateribus oppositis, æquantur rectangulo ex duobus diagonalibus ejusdem. Dem.* Sit quadrilaterum ADCE (fig. 18) circulo inscriptum; dico rectangulum $AD\times CE+AE\times CD=AC\times DE$. Fiat angulus $m=n$. Triangula AEF, CDE angulos habent in A et D m et n æquales per constructionem; in A et D etiam æquales, quippe eidem arcui CE insistentes: sunt ergo similia, atque adeo AE : DE :: AF : DC. Est igitur $AE\times DC=AF\times DE$ (200): nimirum rectangulum sub DE et parte AF alterius diagonalis, æquale rectangulo sub AE et DC.

Deinde triangula ADE CEF sunt similia: nam angulus $AED=CEF$: quum pars $m=n$, et altera utrique communis: angulus $ADE=ECF$: insistunt enim eidem arcui AE (311); ergo AD : CF :: DE : CE; et $AD\times CE=CF\times DE$; scilicet aliud rectangulum $AD\times CE$ æquale est rectangulo sub eadem DE et parte altera FC: et reducendo $DE\ (AP\times CF)=DE\times AC=AE=DC+AD\times CE$; rectangulum nempè sub diagonalibus æquale est duobus rectangulis laterum oppositorum quadrilateri.

457 Schol. Ex hoc theoremate deductæ sunt tabulæ sinuum, cujus usus in trigonometria frequentissimus. Chorda enim 60 graduum æ-

qualis est radio: eo igitur diviso in quot placuerit partes, ad normam hujus divisionis reliquæ chordæ deducuntur; et dimidium chordæ dat sinum quæsitum. Inutile esset singillatim omnia tradere problemata, quæ ad constructionem tabularum inventa sunt: jam enim in plerisque libris matematicis tabulæ confectæ reperiuntur, undè labor iste prorsus inutilis foret. Nobis satis est ea tradere, quæ tironi philosopho maximè conducunt ad physicas veritates condiscendas.

CAPUT III.

Usus sinuum in calculo trigonometrico.

458 Schol. Plerùmque sinus ope tabularum habentur, in quibus gradus, et minuta prima, deindè sinus inveniuntur. Animadvertendum tamen, non omnes eadem methodo procedere. Sunt qui gradus, minuta, sinus tantum proponunt, quum ex his deduci possint reliqua. Alii sinibus sinus logarithmicos substituunt, ut facilitati et brevitati consulant. Prolixiores alii opus singulare excuderunt, in quo òmnia in columnis separatis, et sibi respondentibus, concinnata sunt. Novissimè Gardiner Anglus, et Toaldus Venetus hujusmodi tabulas absolutissimas evulgarunt, in quibus omnia, quæ ad calculos trigonometricos necessaria sunt, collecta invenies. Tabularum usus ex resolutione problematum manifestus fiet. Animadvertendum tamen radium = 10, 000, 000, 000 usurpatum

fuisse in constructione tabularum: nunc verò tres ultimæ cyphræ omittuntur: quoniam hæc omissio nullum errorem sensibilem inducit.

459 Problema 1. *Anguli, aut arcus quadrante minoris functiones in tabulis invenire.* Resol. Sint ex. g. inveniendæ lineæ trigonometricæ anguli 30°, 10′: invento in tabularum prima columna numero graduum, et minutorum 30°, 10′, aut alterius dati, in secunda columna, linea ipsa currente, invenietur sinus = 50251. 70: in tertia tangens = 58123: 53: in quarta secans = 115664. 80. Quod si adsint logarithmi in tabulis, ut nonnumquam solet, in columna quinta et sexta eosdem reperies: qui quidem unicè apponuntur, ut si aliqua ex lineis trigonometricis per aliam multiplicanda, aut dividenda sit, logarithmi præsto sint. In aliis verò logarithmos, omissis sinibus, reperies; quod nullam ad praxim difficultatem addit.

460 Probl. 2. *Anguli, aut arcus quadrante majoris sinum atque alia invenire.* Solut. Quum jam præmonitum sit angulo obtuso, atque acuto ejusdem supplemento communes sinus, atque alias fractiones esse (444); dato angulo obtuso, nil aliud quærendum restat, quam ejusdem supplementi numerum graduum, et minutorum; quibus inventis, hujus anguli functiones erunt, et alterius. Sit datus angulus, aut arcus 149°, 50′, cui inveniendus sit sinus: subtrahe à 180°, 149°, 50′, residuum erit 30°, 10′: hujus anguli sinus est etiam alterius 149°, 50, ut et reliquæ lineæ trigonometricæ, quæ pro illo acuto designatæ sunt.

461 Probl. 3. *Cosinum, cotangentem, et cosecantem dati anguli invenire.* Solut. Quæratur ejusdem anguli complementum (448); hujus sinus, tangens, et secans erit alterius cosinus, cotangens, et cosecans. Inveniendæ sint anguli 30°, 10′, reliquæ functiones: dic 90°—(30° +10′)=59+50′; hujus anguli sinus tangens, et secans erunt et lineæ alterius quæsiti sinus, tangens, et secans. Quod ut facilius, et brevius obtineretur in tabulis, ita artificiosè dispositi sunt gradus, ut minoribus è regione eorum complementa respondeant; atque adeò omnes functiones præ oculis semper habeantur: uti in exemplo adducto gradui 30 completo immediatè respondet gradus 60: minuto verò adaucto, respondet gradus 59, 59′ et sic deinceps, altero crescente, altero minuente eadem proportione.

462 Probl. 4. *Dato sinu, aut aliqua ex cæteris functionibus, invenire angulum ipsi respondentem.* Solut. Facilis negotii res erit, si datus sinus reperiatur in tabulis; inibi enim et angulus, sivè gradus ipsi conveniens invenietur. Quod si datus sinus non sit notatus in tabulis, signum est ad minuta secunda pertinere. Jam verò notetur differentia, quæ inter duos sinus proximè majorem, et proximè minorem, ex his quì in tabulis reperiuntur, intercedit: deindè inter datum, et proximè minorem: demum instituatur proportio inter duas inventas differentias, 60, et numerum x inveniendum. En exemplar: sit datus sinus logarithmicus 9. 9030900: quæsito in tabulis proximè majore

sinu logarithmico 9.9031084, et proximè minore 9.9030136; eorumdem differentia est =948. Differentia vero inter 9.9030900, ac 9.9030136=764. Jam instituatur sequens analogia: 948 : 764 :: 60″ : x=48″, neglecta minutia $\frac{336}{948}$, quæ vix tertiam partem minuti secundi adæquat. Quum vero sinus logarithmici prædicti respondeant, major 53°, 8′, minor 53°, 7′; datus erit 53°, 7′, 48″.

463 Schol. In tabulis vulgaribus minuta secunda non reperiuntur; quippè ad calculos geometricos minus necessaria. Ad supputationes verò astronomicas omninò secundorum habenda est ratio; quandoquè etiam minutorum tertiorum. Ex dictis numero superiore facilè eruitur methodus supputandi minuta secunda, inveniendi nimirum sinum, aut logarithmum ipsi respondentem. Sit datus angulus 36°, 52′ 12″, Subducatur differentia inter sinus logarithmicos angulorum 36°, 53′, et 52″: deindè instituatur sequens analogia 60 : 10 :: ut differentia inventa ad x. En typum

Sin. log. 36°. 53′=9.7782870
Sin. log. 36°. 52′=9.7781186

Differ.=1684

Jam 60 : 12 :: 1684 : $x=336+\frac{48}{60}$; quod ad 337 quam proximè accedit: itaque hic numerus addatur (67) sinui logarithmico

gradus 36°.52=9.7781186
237

habebitur sinus 36°, 52′, 12″=9.7781523.

Eadem est praxis, si loco logarithmorum, sinus inveniatur, aut sinus, et logarithmi, ut in tab. Ulacquii, Gardineri, er Toaldi.

CAPUT QUARTUM.

RESOLUTIO TRIANGULORUM.

§. I.

Resolutio trianguli rectanguli.

464 Defin. Resolutio trianguli est, ejus partes incognitas medio cognitarum deducere. Jam præmonitum fuit tres angulos ad resolutionem trianguli non sufficere; undè opus est aut aliquot latera, et angulos; aut unum angulum, atque aliquot latera cognoscere, ut cetera deducantur. In triangulo rectangulo notus est angulus rectus, cujus sinus æqualis est radio: hinc sufficit ad ejus resolutionem, duas alias ex partibus præcognoscere; nimirùm latus, et angulum.

465 Probl. 1. *Datis cathetis, invenire reliquas partes trianguli rectanguli.* Solut. Sit triangulum (fig. 36) ABC rectangulum in B, cujus perpendicula AB, BC, cognita sunt: ex gr. in proportione 2 : 3. 1. Hypothenusa AC etiam sine trigonometria invenire potest; etenim $AC^2 = AB^2 + BC^2$; ergo $AC^2 = \surd$ ($AC = \surd$ (AB^2 BC^2) 2. Ut inveniatur angulus C, assumpto BC in radium, AB erit tangens (447): ergo BC : AB :: sin. tot.: ad tang. ang. C(452). At BC : AB :: 3 : 2 :: 1000000 : x=6666666 neglecta minutia; cui respondet in tabulis gradus 41°, 48′ proximè. 3. Cognito angulo C=41°, 48′; angulus A ejus complementum facilè innotescit=90—41°, 48′ =48°, 12′. 4. Hypotenusa etiam hac analogia deducitur.

Sin. A : BC :: sin. tot. : AC.

466 Probl. 2. *Latere, et angulo datis in triangulo rectangulo, invenire reliqua.* Solut. Inveniatur alter angulus metodo supra enuntiata; deindè sinus hac proportione deducentur; alterutrius anguli sinus ad datum latus, ut sinus totus ad latus inveniendum. Sic ex gr. datus angulus A, et latus AB, angulus C erit complementum ad 90°. Deindè ut inveniatur latus AC, fiat

Sin. ang. C : AB :: sin. tot : AC.

Demum cathetus altera BC hac proportione deducetur:

Sin. ang. C : AB :: sin ang. A : BC.

467 Probl. 3. *Hypothenusa, et angulo acuto cognitis, reliqua ignota investigare.* Solut. Altero acuto, ut supra invento, latus angulo dato oppositum hac analogia deducitur: radius ad sinum dati anguli, ut hypothenusa ad latus quæsitum. Sit datus angulus C (fig. 36), præter hypothenusam AC; analogia erit:

R : sin. ang. C :: AC : AB.

Quod si datus sit angulus A fiat.

R : sin. ang. A :: AC : BC.

468 Schol. Ex methodo hactenus tradita facilè deduces, ad resolutionem triangulorum, prius inveniendos esse angulos, deindè latera investiganda. A sinibus enim angulo-

rum pendet proportio inquirenda laterum, et sinuum, ut his cognitis, latera innotescant.

§. II.

Resolutio trianguli non rectanguli.

469 Probl. 1. *In quocumque triangulo non rectangulo cognitis duobus lateribus, atque uno ex angulis oppositis, invenire reliqua.* Solut. Sint cognita latera AB, BC (fig. 13), et angulus quicumque oppositus alterutri ex duobus lateribus, ut A. Primum anguli; deindè latus ignotum debet inquiri. Quod ad angulos attinet, sequenti analogia invenientur:

BC : sin. ang. A :: AB : sin. ang. C.

Ex hac proportione innotescit sinus anguli C; quo cognito, et angulus C, et tertius statim apparet. Demum latus ignotum hac proportione eruetur:

Sin. ang. A : BC :: sin. ang. B : AC.

470 Probl. 2. *Datis duobus lateribus, et angulo acuto ab ipsis intercepto, invenire reliqua.* Solut. Hujus problematis solutionem plerumque methodo nimis tironibus implicata tradunt auctores per semisummas et semidifferentias tangentium angulorum ignotorum. Ut faciliore via incedamus, quæ etiam pro resolutione cujuscumque trianguli sivè acuti, sivè obtusi indicari potest, en compendium resolutionis. Sit cognitus angulus C (fig. 12), et latera AC, BC illum intercipientia: reliqua investiganda sunt. Ducatur perpendicularis BE ab uno ex angulis ignotis ad latus oppositum; remanebit triangu-

lum, quod resolvi debet, in duo triangula rectangula divisum; methodo superius indicata tractandum. Ut latus BE cognoscatur, hac analogia utendum erit, in qua tres primi termini noti sunt:

Sin. ang. E : BC :: sin. ang. C : BE.

Latus deindè CE hac etiam instituta proportione eruetur.

Sin. ang. E : BC :: sin. ang. B : CE.

Angulus enim B, complementum C, supponitur notus ex methodo num. 466. Rursus quum hypothenusa BC data sit, latus $BC = \sqrt{}$ (CB) $= \sqrt{} (BE^2 + CE^2)$; atque adeò $CE = \sqrt{} (BC^2 - BE^2)$.

2. Deveniendo ad alterum triangulum, latus AE facilè invenietur, subtrahendo partem CE cognitam à tota AC etiam cognita. Sunt igitur notæ catheti hujus trianguli; ipsarum autem quadratorum summa æqualis est quadrato hypotenusæ; et radis æqualis lateri AB: adeòque triangulum totum resolutum manet. Præterea deduci etiam possent sinus angulorum A, et B sequenti analogia.

AE : BE :: sin. tot. : tang. ang. A.

BE : AE :: sin. tot. : tang. ang. ABE

(447, et 464).

471 Probl. 3. *Datis duobus lateribus et angulo obtuso ab ipsis comprehenso, reliqua invenire.* Solut. Sit ABC (fig. 37) angulus obtusus interceptus à lateribus cognitis AB, BC: demittatur perpendicularis AD in latus BC productum in D. Angulus ABD cognitus est in novo triangulo, utpotè supplementum ad duos rectos

anguli dati B; adeòque et tertius DAB, quum D sit rectus: latus etiam AB datum est: quarè per nom. 466 reliqua nota erunt. Rursus latus BD addatur BC; utrumque jam notum; subindè et AC innotescet, quæ hipothenusa est respectu totius trianguli ADC; adeòque $AC=\sqrt{(AD^2+DC^2)}$, quoniam $AC^2=AD^2+DC^2$.

472 Probl. 4. *In triangulo non rectangulo datis duobus angulis, et latere, reliqua invenire.* Solut. Ex dictis tertius angulus manifestus est, duobus præcognitis. Ut duo latera detegantur, hæc proportio instituenda est. Sint dati anguli A, C (fig. 37), et latus BC, erit

Sin. ang. A : BC :: sin. ang. C : AB.
Sin. ang. A : BC :: sin. ang. B : AC.

473 Schol. Cognitis tribus angulis, cognoscuntur sinus angulorum, adeòque et ratio laterum, quæ est ipsa sinuum. Hæc est magnitudo comparativa, quæ omninò ab absoluta diversa est (453): eisdem enim angulis, atque adeò sinubus, ad infinitum variari potest magnitudo trianguli. Undè nisi unum saltem latus innotuerit, reliqua determinari non poterunt. Datis verò tribus lateribus tantum, anguli cognosci poterunt, si prius triangulum, ad rectangulum revocetur: ut articulis 470 et 471 indicavimus; deindè resolutio procedet uti supra 465.

474 Schol 2. Quum idem sinus communis sit angulo acuto, et ejus supplemento, dato sinu, angulus cognosci determinatè non poterit. Hinc aliundè notum esse debet genus anguli, cujus sinus inventus est: quod etiam

ad reliquas lineas trogonometricas extendi debet (444).

CAPUT QUINTUM.

Notiones trigonometriæ sphæricæ.

475 Defin. 1. Præter ea, quæ numero 404 de sphæra tradita sunt, hic recolenda, sequentes definitiones addimus. Trigonometria sphærica est scientia, quæ triangula in sphæræ superficie á circulis maximis se mutuò intersecantibus formata, metiri docet. Dixi ab circulis maximis, reliqua enim triangula à minoribus circulis designata, trigonometria non considerat. Porrò in hac circulorum maximorum intersectione tria genera triangulorum cognoscenda ocurrunt: *rectilinea* à duobus radiis, et chorda circuli maximi effecta, *mixtilinea* à duodus radiis et arcu, lineis partim rectis, partim curva formata: ac demum *curvilinea* à tribus arcubus se mutuò intersecantibus descripta. De rectilineis nihil addendum ad ea, quæ superiùs tradita sunt; easdem enim proprietates intra sphæram habent, atque in reliquis superficiebus. Anguli mixtilinei mensura est arcus à duobus radiis interceptus.

476 Defin. 2. *Angulus sphæricus rectus* est, quem duo arcus circulorum maximorum, ad angulos rectos se dividentium, formant: *acutus*, qui recto minor; *obtusus*, qui recto major ab iisdem arcubus conformatur; quæ notiones cum angulis rectilineis ipsis communes sunt, sicut

et reliquæ triangulorum divisiones.

477 Defin. 3. Triangulum sphæricum erit æquilaterum, si tres arcus ipsum componentes æquales sunt: isoscele, si duo arcus, seu latera æqualia: scalenum, quolibet arcu diversæ magnitudinis existente. Similiter triangulum sphæricum rectangulum erit, si aliquem angulum rectum contineat; obtusangulum, si obtusum; acutangulum, si omnes acutus habeat.

478 Defin. 4. Arcus metientes angulos trianguli sphærici plerumquè non sunt, qui ipsis opponuntur; sed produci debent crura arcuum angulum formantium ad nonaginta gradus: pars circuli ab ipsis intercepta, atque ab angulo nonaginta gradibus distante, erit mensura anguli. Hinc inferes, circulum, cujus arcus dat mensuram anguli sphærici, polos habere in ipso anguli vertice. Poli enim sunt extrema axis in sphæra, atque ab ipsius æquatore 90 gradibus distantes (397). Hinc si angulus fuerit rectus, ejus arcus erit quadrans; si obtusus, quadrante major; si acutus quadrante minor.

479 Corol. 1. Si duo maximi sphæræ circuli sunt invicem perpendiculares, axis unius est diameter alterius. Nam duo plana circulorum se secabunt ad angulos rectos, atque indè duæ lineæ per centrum transeuntes talium circulorum, distabunt invicem nonaginta gradibus; adeòque quæ est diameter in uno, erit polus alterius, et vice versa (397). Undè etiam deducitur inversa propositio antecedentis; nimirum si in duobus circulis axis unius est diameter alterius, erunt perpendiculares, ac poli eorumdem quadrante distabunt.

480 Corol. 2. Quum duo circuli maximi sunt invicem inclinati, inclinationis dimensio est arcus circuli maximi 90° distantis ab eorumdem intersectione. Nam mensura talis inclinationis est angulus, cujus dimensio in triangulis sphæricis desumitur ab arcu circuli 90° remoti ab angulo (478). Præterea anguli sphærici crura magis ac magis continenter divaricantur, donec ad 90° deveniant; deindè inversa inclinatione magis semper accedunt, eo usque post alterum quadrantem denuò ad angulum conjungantur; quod simplici cujuscumque sphæræ inspectione, circulis maximis distinctæ, videre licet. Hinc circulus mensurans angulum duorum circulorum se invicem secantium debet per utriusque polos transire.

481 Corol. 3. In sphæra cœlesti, et terrestri omnes meridiani sunt æquatori perpendicularis; transeunt enim per ejusdem polos, qui et poli mundi vocantur. At sunt obliqui *eclipticæ*, quæ ad angulum $23^\circ\frac{1}{2}$ æquatori inclinata est; nisi duos meridianos nonaginta gradibus à punctis intersectionis eclipticæ, et æquatoris distantes excipias. Nam hæc linea, communis utrique plano eclipticæ, et æquatoris, est diameter utriusque circuli, atque adeò axis respectu meridiani.

482 Corol. 4. Spatium quodvis duobus circulis parallelis in sphæra interceptum, dicitur *zona*. Hujus latitudo est arcus circuli ipsis perpendicularis: hic enim eorumdem minimam

distantiam metitur. Atque hæc pauca de trigonometria sphærica dicta sufficiant, quatenus ad tractatus astronomiæ, et geographiæ physicæ conducentia: reliqua nimis implexa, et tironi philosopho parum necesaria, quæ ad resolutionem triangulorum sphericorum pertinent, illustrium auctorum vestigia sequuti libenter dimittimus.

TRACTATUS V.

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM.

CAPUT PRIMUM.

Notiones preliminares.

483 Defin 1. Sectiones conicæ ita appellatæ sunt, quod à plano conum secante diversis directionibus formentur. Si planum à vertice A (fig. 38) perpendiculariter aut obliquè ad basim secat conum ADC, hujusmodi sectio erit triangulum; nimirum duæ internæ facies coni ita divisi triangulum representabunt. Quod si planum secans basi sit parallelum, ut EH, FI, sectio erit circulus. De his duobus sectionibus nihil addendum occurrit ad ea, quæ in inferiori geometria tradita sunt, tironi philosopho necessaria.

484 Defin. 2. Sectiones, quæ antonomasticè *conicæ* vocantur, sunt sequentes. Applicetur planum directione ad quodvis coni latus parallela, ut in *ab* ad latus AC. Sectio hæc erit *Parabola*, sic dicta, quod græcis, queis dedit ore rotundo musa loqui παρα'βολη idem sonet, quod latinis æqualitas, similitudo; optimè desumpto nomine ex genuina parabolæ proprietatè, quam postea dabimus. Jam si planum