distantiam metitur. Atque hæc pauca de trigonometria sphærica dicta sufficiant, quatenus ad tractatus astronomiæ, et geographiæ physicæ conducentia: reliqua nimis implexa, et tironi philosopho parum necesaria, quæ ad resolutionem triangulorum sphericorum pertinent, illustrium auctorum vestigia sequuti libenter dimittimus.

TRACTATUS V.

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM.

CAPUT PRIMUM.

Notiones preliminares.

483 Defin 1. SECTIONES CONICÆ ita appellatæ sunt, quod à plano conum secante diversis directionibus formentur. Si planum à vertice A (fig. 38) perpendiculariter aut obliquè ad basim secat conum ADC, hujusmodi sectio erit triangulum; nimirum duæ internæ facies coni ita divisi triangulum representabunt. Quod si planum secans basi sit parallelum, ut EH, FI, sectio erit circulus. De his duobus sectionibus nihil addendum occurrit ad ea, quæ in inferiori geometria tradita sunt, tironi philosopho necessaria.

484 Defin. 2. Sectiones, quæ antonomasticè *conicæ* vocantur, sunt sequentes. Applicetur planum directione ad quodvis coni latus parallela, ut in *ab* ad latus AC. Sectio hæc erit *Parabola*, sic dicta, quod græcis, queis dedit ore rotundo musa loqui παρα'βολη idem sonet, quod latinis æqualitas, similitudo; optimè desumpto nomine ex genuina parabolæ proprietatè, quam postea dabimus. Jam si planum

directione qualibet utrumque latus attingente, ac secante dividat conum, ut in EG; sectio hoc modo facta dicitur *ellipsis*, quod latinè *defectio* redderetur: idem enim est græcis ἐλλείπω, quod latinis *deficio*. Nimirum sectio hæc, contra ac parabola, ab æqualitate deficit, uti infra videbimus. Producta autem sectione extra planum eadem directione EG, basim coni DC, sive planum basis similiter productum attinget, ac secabit in K. Demum si sectio extra verticem A, quacumque alia directione fiat, quæ alterutri laterum AC, AD parallela non sita; ac basim DC intra conum secet, *hyperbola* dicitur hujusmodi sectio, ut in H*h*. Crura videlicet hyperbolæ excedunt, atque ampliora sunt parabolæ cruribus: undè nomen factum huic sectioni, eo quod ὑπερβάλλω excedere significet: excesus verò in ejus æquatione palàm fiet. Breviùs; *parabola* oritur, quando unum tantum latus in cono asignari potest, cui planum secans sit parallelum: *ellipsis* quum nullum ex lateribus assignari potest, cui parallelum sit planum secans, quoniam omnia secat: demum *hyperbola* nascitur, quando duplex invenitur latus, quibus planum secans sit parallelum.

485 Defin. 3. Ad indolem curvæ investigandam, aut in plano describendam, ducantur rectæ MM, *mm* (fig. 40), quæ *ordinatæ*, sivè ordinatim applicatæ ad diametrum dicuntur. Diameter verò VX *axis* vocatur, atque ab ordinatis perpendiculariter dividitur: ac vicissim axis ordinatas perpendiculariter, atque in-

super bifariàm patitur. Reliquæ diametri extra axim jacent, eique sunt parallelæ. Pars inter verticem seu supremum curvæ punctum, et ordinatas intercepta, dicitur *abscissa*: partes verò, in quas axis dividit ordinatas, *semiordinatæ* dicuntur, aut brevitatis gratia etiam *ordinatæ* à nonnullis solent nominari. Algebricè abscissa littera x, semiordinata verò y solet denotari; nisi plures occurrant abscissæ atque ordinatæ in eodem calculo, quæ tunc litteris aliis confusionis vitandæ gratia notantur.

486 Schol. Quum circulus una ex curvis sit, quæ tironibus familiarior est, non abs re fuerit prædictas notiones ad eumdem transferre. Sit AMB (fig. 39) semicirculus insistens diametro AB: perpendicularis PM erit semiordinata; AP abscissa; vertex A; axis AB. Jam verò ex geometria notum est, MP perpendicularem ad diametrum esse mediam proportionalem inter ejusdem segmenta (344): scilicet MP est media proportionalis inter segmenta AP, BP; atque adeò $MP^2 = AP \times BP$. Fiat $AB = a$; $AP = x$; $MP = y$; quum sit $AP = x$; erit $BP = a - x$; adeòque $x : y :: y : a - x$, et $ax - x^2 = y^2$. En æquationem ad circulum, per quam hujusmodi curva circularis à quacumque alia discerni potest. Omnia enim puncta peripheriæ circularis, quæ hanc curvam perficiunt, eamdem rationem ad diametrum dicunt. Nam à quovis peripheriæ puncto ductis diametro et abscissis, ratio constans erit. $ax - x^2 = y^2$. Undè circulus est *curva*, *in qua rectangulum sub abscissa*, *atque altera diametri parte*; *aut quod*

idem valet, sub abscissa et diametra abscissa mulctato, æqualis est semiordinatæ quadrato: quæ definitio traderetur, si circulus tamquam sectio conica deberet explicari; atque adeo inter ellipses computandus foret.

487 Defin. 4. *Quantitates constantes* in curva dicuntur, quæ semper manent invariatæ, crescentibus, aut decrescentibus aliis. In circulo diameter, et radius erunt ejusdem mensuræ, quacumque varietate occurrente inter abscissas, et ordinatas; quæ idcircò quantitates variabiles vocantur, quod augmenti, aut decrementi capaces sint. Augetur enim quantitas AP (fig. 39), crescente ordinata MP; eaque minuente a centro ad circumferentiam minuitur, ita ut, in puncto A concurrentibus, utraque deveniat=o, sivè evanescat. Hoc itidem in aliis curvis evenit respectu abscissarum atque ordinatarum.

488 Defin. 5. Inter quantitates constantes recensetur *parameter*. Hæc est recta quædam invariabilis, ad quam referuntur abscissarum augmenta, vel decrementa in ordine ad æquationem cum semiordinatis. Parameter æquatur ordinatæ per focum transeunti *Focus* vero est punctum constans in axe sumptum, ad quod refertur curvæ cujuscumque ductus. Curvæ MVM (fig. 40) parameter æquatur rectæ MFM: punctum verò F focus est, undè deflectio curvæ MVM definitur.

CAPUT SECUNDUM.

Parabola.

489 Defin. Parabola est *curva, in qua semiordinatarum* PM, PM (fig. 40) *quadrata æqualia sunt rectangulo ex parametro et abscissa.* Hæc propietas modo demonstranda, charasteristica est parabolæ notio. Apollonius Pergæus, celebre inter antiguos mathematicos nomen, hanc curvam maximè illustravit, undè *Apolloniana* à nonnullis solet appellari.

490 Problema. *Parabolam in plano describere.* Solut. Sumatur extra curvam quædam recta ED (fig. 40), quæ *directrix* appellatur, eo quod ad conformationem curvæ dirigat. In recta ED sumatur quodvis punctum G, ad quod ducatur perpendicularis VX: hæc erit axis parabolæ. In hoc axe punctum sit quoddam F, ad placitum sumendum: pars axis inter FG intercepta bifariàm dividatur in V: hic erit vertex parabolæ, atque in F focus ipsius. Per punctum F ducatur perpendicularis MFM, ad axem VX, atque utrinquè æqualis rectè FG, seu dupla ejusdem FG: hæc erit æqualis parametro curvæ describendæ (488). Ducantur deindè aliæ perpendiculares MM, *mm* ad axem VX, et parallelæ MFM, quæ erunt ordinatæ parabolæ: sicut et VF, VP etc. ejusdem abscissæ, à quibus curvæ ductus determinari debet (488). Ut vero punctum semiordinatæ, per quod curvam describere oportet, inveniatur

intervalum cujusvis abscissæ PV à directrice ED, sivè distantia PG circino transferatur à puncto F ad semiordinatam, in qua punctum P abscissæ sumptum est uti in Fm factum vides: puncta omnia in semiordinatis hoc modo inventa designabunt parabolæ ductum à curva VMmM utrinquè describendum. Demonstratio ex dictis numero superiore, et sequenti patebit.

491 Theor. I. *In parabola modò descripta, quadrata semiordinatarum æquantur rectangulo ex abscissa in parametrum.* *Dem.* Semiordinatam Pm voco y: ejus abscissa dicatur x: GV=FV dico a. Quum GV+FV=FM, erit GV=$\frac{1}{4}$MFM, quæ dupla est FM (per præced). Jam in triangulo rectangulo FPm, Fm^2=FP^2+Pm^2 (345); et Pm^2=Fm^2—FP^2; ac FP^2=Fm^2—Pm^2. Traducantur valores ad formulas algebricas; Fm=GP=$a+x$; adeòque Fm^2=$(a+x)$ $(a+x)=a^2+2ax+x^2$ (129): Pm^2=$y\times y=y^2$. FP=$x-a$; ac proindè FP^2=$(x-a)$ $(x-a)$=$x^2-2ax+a^2$ (132). Comparando igitur valores erit;

$$a^2+2ax+x^2=y^2+x^2-2ax+a^2$$

Et transp. $y^2=a^2+2ax+x^2-x^2+2ax-a^2$

Et reducen. $y^2=4ax$.

At $4a$=MFM: nam GV=a, et GF=$2a$=FM, adeòque tota MFM=$4a$, quæ est parameter curvæ descriptæ. Rectangulum itaquè $4ax$, ex abscissa in parametrum, æquale est semiordinatæ quadrato. Hæc demonstratio in qualibet ex semiordinatis iterari potest.

491 Corol. 1. In parabola, quadrata ordinatarum sunt ut abscissæ. Nam parameter est

semper quantitas invariata in eadem parabola; adeòque, quum ordinatæ crescant, aut decrescant juxta proximiorem, aut remotiorem à foco distantiam, atque æquatio $y^2=4ax$ constans sit; uno ex factoribus eodem semper manente, scilicet $4a$, alter nempe x debet variari; ad eumque referri incrementa, aut decrementa ordinatarum, seu quadratorum earumdem.

492 Corol. 2. Quoniam crescente axe, abscisse pariter concrescunt, eodem proportionali incremento quadrata ordinatarum augebuntur; atque adeò eorumdem radices. Parabola igitur non est curva in se rediens, ut circulus atque ellipsis: promoto enim axe, parabolæ crura, quæ ab ordinatis determinantur, juxta earum incrementa divaricabuntur, ac semper recedent.

493 Corol. 3. Axis parabolæ VX ordinatas bifariàm secat: est enim utrinquè $y^2=4ax$; sivè dicta parametro p, $y^2=px$; ergo $\surd\, y^2=y=\surd\,(px)$: semiordinatæ æquales eidem radici px.

494 Corol. 4. Parameter est tertia proportionalis ad abscissam, et semiordinatam. Etenim deducta ex æquatione $y^2=px$ proportione: erit $x:y::y:p$ (402). Nam $\frac{y^2}{x}=p$. Quod si per alterum factorem dividas $\frac{y^2}{p}=x$, proportio erit; $p:y::y:x$; abscisa videlicet est tertia proportionalis ad parametrum, et semiordinatam, atque hæc ubiquè media proportionalis inter utramque.

495 Corol. 5. Si in parabola $x=p$; erit $y^2=p^2$; atque $y=p$. In puncto nimirum, in quo abscissa est æqualis parametro; semiordinata, parameter, atque abscissa æquales sunt.

496 Corol. 6. Assumpta $x=\frac{1}{2}p$, erit $y^2=\frac{1}{2}pp=\frac{1}{2}p^2$; et $y=\sqrt{(\frac{1}{2}p^2)}$; ac deducendo proportionem (202), $\frac{1}{2}p : y :: y : p$. Quamdiù abscissa fuerit dimidium parametri, semiordinata erit media proportionalis inter semiparametrum, et parametrum. Quid si non jam abscissa, at semiordinata æqualis sit semiparametro? Respondeo, tum fore abscissam quartam partem parametri. Nam $y=\frac{1}{2}p$; et $y^2=\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}pp=px$, ergo $x=\frac{1}{4}p$. Quùm verò in foco semiordinata semiparametro æqualis sit, abscissa erit quarta pars parametri; et hæc tertia proportionalis ad parametrum, ac semiordinatam in foco sumptam (494).

497 Theor. 2. *Quadratum semiordinatæ cujuscumque quadruplum est rectanguli ex abscissa illi respondente in distantiam foci á vertice. Dem.* Sit abscissa VP (fig. 40), et semiordinata Pm: dico Pm^2 quadruplum fore VP×VF. Nam VF$=\frac{1}{4}p$ (496), et PV$=x$; quarè PV×VF$=\frac{1}{4}px$. At Pm^2 $y^2=px$: ergo Pm^2 quadruplum rectanguli ex abscissa in distantiam verticis à foco.

498 Corol. Distantia foci á vertice est tertia proportionalis ad abscissam, et dimidiam semiordinatam. Quoniam $y^2=px$; erit $\frac{1}{4}y^2=\frac{1}{4}px$: et $\frac{1}{4}\frac{y^2}{x}=\frac{1}{4}p$; deductaque proportione $x : \frac{1}{2}y :: \frac{1}{2}y : \frac{1}{4}p$. Abscissa ad dimidiam semi-

ordinatam, ut hæc ad distantiam foci à vertice.

499 Theor. 3. *Recta ex foco parabolæ ad extremitatem semiordinatæ cujuscumque, æqualis est abscissæ illi respondenti, plus distantia foci à vertice. Dem.* Sit VP (fig. 40) abscissa cui respondet semiordinata Pm : dico F$m=$PV+FV. Etenim VF$=\frac{1}{4}p$ (496), et PV$=x$; idcircò FP$=x-\frac{1}{4}p$. Jam verò.

F$m^2=$Pm^2 +FP^2 (345) $=y^2+x^2-\frac{1}{2}px+\frac{1}{16}p^2$.

Et substituendo $y^2=px$, erit F$m^2=px+x^2-\frac{1}{2}px+\frac{1}{16}p^2$.

Et reducendo F$m^2=x^2+\frac{1}{2}px+\frac{1}{16}p^2$.

Et extracta utrinquè radice : F$m=x+\frac{1}{4}p$.

Recta ex foco ad extremitatem semiordinatæ æqualis abscissæ, plus distantia foci à vertice.

500 Corol. Quum distantia foci à directrice sit dupla distantiæ foci à vertice, intervallum inter directricem, et verticem æquale erit distantiæ foci à vertice; atque adeò æquale rectæ ductæ à foco ad punctum concursus semiordinatæ cum parabola. En quomodò inventa sit methodus parabolam in plano describendi.

501 Probl. 2. *Ad quodlibet parabolæ punctum tangentem ducere.* Solut. Sit datum punctum m semiordinatæ Fm, ad quod ducenda sit tangens (fig. 40). E foco F ad datum punctum ducatur recta Fm; atque ex eodem puncto altera Dm=Fm, et ad directricem AD perpendicularis. E foco F ad punctum D ducatur recta FD, eaque bifariàm secetur in n; per duo puncta nm ducatur recta Anm; hæc erit tangens parabolam in puncto dato m. *Dem.* Linea

Anm curvam tangit in puncto m; reliqua ejusdem puncta extra curvam sunt. Primum ex constructione manifestum est; alterum oportet demostrare. Triangulum DFm est isoscele: nam Dm=GP=Fm (500): quumque basis DF bifariàm divisa sit in n; triangula Fmn, Dmn æqualia erunt, et rectangula ad n (294). Ducantur DM, FM: triangula FMn, DMn, erunt etiam æquàlia, ob Fn=Dn, latus Mn utrique commune, et angulos ad n rectos (333). Quapropter si ducatur LM ad directricem perpendicularis, DM erit hypotenusa trianguli DLM, atque idcircò major LM cujus quadratum superat toto quadrato DL (345). At FM=DM; ergo FM major LM: et punctum M extra parabolam: quum LM mensura sit distantiæ á foco ad punctum in linea FM à parabola intercipiendum (499). Clariùs; curva parabolica debet transire per punctum, in quo linea FM æqualis sit LM (500); quumque FM major sit LM, ejus extremitas extra parabolam est.

502 Corol. Linea, seu diameter Bm axi parellela, concurrens in puncto contactus m cum Fm, facit angulum BmM=Fmn. Est enim ad verticem oppositus Dmn=Fmn (501); atque adeò Fmn æqualis (290). Ex hac proprietate parabolæ deducitur phænomenon speculorum parabolicorum, in quibus omnes radii paralleli, uti Bm, Km, ad focum F reflectuntur facientes angulum reflexiones, angulo incidentiæ patem, uti constanti lege in physicis observatur.

CAPUT TERTIUM.

Ellipsis.

503 Defin. 1. Ellipsis est *curva, in qua semiordinatarum quadrata eam inter se rationem dicunt, quam habent rectangula partium abscissarum, sive segmentorum axis.* Nimirum in ellipsi EG (fig. 41 et 42), $my^2 : MY^2 :: Ey \times Gy : EY \times GY$. Hoc discrimen circulum inter atque ellipsim intercedit, quod in circulo quadrata semiordinatarum æqualia sunt rectangulis respondentium abscissarum: in ellipsi verò proportio tantum reperitur. Quod si ellipsis curvatura adeò inflecteretur, ut quadrata semiordinatarum non jam proportionalia, verum æqualia segmentis axis in rectangulum erectis forent, ellipsis abiret in circulum.

504 Defin. 2. Quum verò inæqualis sit ellipseos curvatura, ut maxima à minima inflexione discerneretur, duo axes inventi sunt, qui se ad angulos rectos invicem secantes, alter *axis major*, vel *transversus*, secundus verò et *minor* et *conjugatus* audit. Major quidem Ab (fig. 42) per centrum ellipseos transiens, ejus longitudinem metitur, conjugatus autem DE, alterum perpendiculariter ad centrum secans, latitudinem seu minimam inflexionem designat. Undè ab utroque axe in quatuor partes æquales, atque similes ellipsis dividitur.

505 Defin. 3. Diameter ellipseos est quæcumque recta ab una in alteram perimetri par-

tem per centrum ducta: undè diametri in ellipsi plures; axes verò duo tantum assignari possunt. Quod si ita diameter una super aliam cadat, ut parallelas altera alterius bifariàm dividat, diametri conjugatæ vulgò dicuntur.

506 Defin. 4. Duo sunt in ellipsis axe majore puncta, quæ focorum vice funguntur. Peculiaris eorundem proprietas est, ut ductis rectis è duobus prædictis focis ad quodlibet perimetri punctum, harum rectarum summa æqualis sit axi majori, veluti infra demonstrabitur. Hinc facilè est invenire ellipsis focos; diviso nimirum bifariàm axe majore AB (fig. 42), ductoque minore DE, atque intervallo AC, aut BC è punctis D, aut E, rectis FE, Ef designatis; puncta F, f ellipseos focos indicabunt.

507 Defin. 5. Parameter in ellipsi est tertia proportionalis ad utrumque axem: undè quum duo sint axes in ellipsi, et duæ parametri in eadem invenientur. Si axem majorem in primum proportionis terminum assumpseris, tertia proportionalis erit ejusdem parameter: quod si primum terminum posueris axem conjugatum, parameter ipsi repondens est tertia proportionalis ad axes minorem et majorem.

508 Theor 1. *In ellipsi quadrata semiordinatarum sunt, ut rectangula sub segmentis axis ipsis respondentibus.* **Dem.** Sint in cono ACD (fig. 41) FH, BL circuli paralleli; EG ellipsis; MY, my applicatæ tam circulo, quam ellipsi comunis in triangulis EHy, EBY, Hy : BY :: Ey : EY (338): atque ob eamdem rationem in triangulis GLY, GFy, Fy : LY :: Gy : GY. In circulis vero $my^2 : MY^2 :: Fy \times Hy : LY + BY$ (370, 486).

2. Si ducantur invicem duæ primæ proportiones, producta adhuc erunt proportionalia (207): en proportiones, et producta:

$$Hy : BY :: Ey : EY$$
$$Fy : LY :: Gy : GY$$
$$Fy \times Hy : LY \times BY :: Gy \times Ey : GY \times EY.$$
$$\text{At } my^2 : My^2 :: Fy \times Hy : LY \times BY$$
$$\text{Ergo etiam } my^2 : MY^2 :: Gy \times Ey : GY \times EY.\ (209).$$

Quadrata nimirum semiordinatarum, ut rectangula sub analogis axis partibus, quæ semiordinatis respondent.

509 Corol. 1. Quadratum dimidii axis minoris est ad quadratum dimidii axis majoris, ut quadratum cujuscumque semiordinatæ ad rectangulum ex abscissis analogis illi respondentibus. Nam (fig. 42) $MP^2 : DC^2 :: AP \times BP : AC \times BC$; at $AC = BC$; ergo $MP^2 : DC^2 :: AP \times BP : AC^2$; et invertendo $DC^2 : MP^2 :: AC^2 : AP \times BP$; et alternando $DC^2 : AC^2 :: MP^2 : AP \times BP$; in qua proportione continentur quadratum dimidii axis minoris, majoris, semiordinatæ, ac rectangulum abscissarum ipsi respondentium. Quum verò dimidia sint ut tota, eadam proportio erui potest inter quadrata integrorum axium: ergo $DE^2 : AB^2 :: MP^2 : AP \times BP$.

510 Corol. 2. Proportionem inventam ad formulas algebricas translaturis, esto axis major $AB = 2a$; minor $DE = 2b$: semiordinata de more $= y$; abscissa à vertice computata AP, aut $BP = x$: idcircò $AC = a$; $DC = b$; $AB - BP = 2a$

$-x$, et rectangulum $AP \times BP = 2ax - x^2$. Erit igitur $MP^2 : AP \times BP :: DC^2 : AC^2$, facta denominatione.

$$y^2 : 2ax - x^2 :: b^2 : a^2;$$

et mediis, atque extremis ductis; $a^2 y^2 = 2ab^2 x - b^2 x^2$

et dividendo per a^2; $y^2 = \frac{2ab^2 x - b^2 x^2}{a^2}$

Habes æquationem ellipsis, referentem proportionem ordinatas inter atque abscissas à vertice computatas.

511 Corol. 3. Deducta ex equatione $y^2 = \frac{2ab^2 x - b^2 x^2}{a^2}$ proportione (202), erit $a^2 : b^2 :: 2ax - x^2 : y^2$; sivè multiplicando primos terminos per 4: $4a^2 : 4b^2 :: 2ax - x^2 : y^2$. Atque extracta radice $2a : 2b :: \sqrt{(2ax - x^2)} : y$. Nimirum semiordinata in ellipsi est quarta proportionalis ad axem majorem, conjugatum, et semiordinatam circuli descripti in axe majore, cui etiam inscripta sit ellipsis, habeantque communes abscissas. (486) En igitur ex præsenti corollario unam ex methodis ellipsis describendæ. Esto diameter circuli axis major ellipsis: datus sit, aut eligatur ad placitum axis conjugatus, qui in circulo perpendiculariter ad axem majorem ipsum bifariàm dividens, atque ab ipso pari æqualitate divisus designetur: ducantur deindè semiordinatæ ad circulum, ad quas inquiratur singillatim quarta proportionalis (349) assumptis pro tribus terminis proportionis dimidio axe majore, minore, atque semiordinata circuli; quartus terminus in qualibet analogia erit semiordinata ellipsis, præter cujus extremitatem perimeter ellipseos inflecti debet.

512 Corol. 4. Ponamus $a = b$: erit $a^2 = b^2$; factaque divisione præcedentis æquationes $y^2 = \frac{2ab^2 x - b^2 x^2}{b^2}$, emergit $y^2 = 2ax - x^2$, quæ est æquatio ad circulum. Undè eruere licet circulum speciem ellipseos esse, in qua axis conjugatus axi transverso æqualis est. Atque eidem axium comparationi insistendo; quò magis axis minor ad majorem accesserit; eò minor erit differentia circulum inter, atque ellipsim. Contra verò decrescente axe conjugato, prolixior ellipsis evadet, atque ab æqualitate cum circulo plus recedet.

513 Schol. Ex hac diversitate in figura elliptica, quæ à differentia minima inter ipsam, et circulum, ad confusionem ferè cum linea recta potest deduci, orta est *excentricitas* ellipseos, quæ est diferentia inter focos, et centrum ejusdem. Excentricitas littera c solet designari. Hæc autem propter rationem nuper allatam in ellipsibus valde compressis ad perimetrum maximè accedere debet; quò verò plus ad similitudinem cum circulo accesserint, excentricitatem minui necesse est.

514 Theor. 2. *Quadratum excentricitatis ellipseos, æquatur differentiæ quadratorum semiaxis majoris, et conjugati:* videlicet $c^2 = a^2 - b^2$. *Dem.* In triangulo rectangulo ECf (fig. 42) $Ef^2 = EC^2 + Cf^2$ (345); et $fC^2 = Ef^2 - EC^2$. Enimverò $Ef = BC$ (506): ergo $fC^2 = BC^2 - EC^2$: nimirum $c^2 = a - b^2$

515 Corol. 1. Excentricitas, sivè differentia foci à centro est media proportionalis inter semiaxium summam, eorumque differentiam. Nam si ducatur $(a+b)$ $(a-b)$, productum est a^2-b^2, et quum $c^2=a^2-b^2$ erit $c=(a+b)$ $(a-b)$; et deducta proportione, $a+b : c :: c : a-b$ (202).

516 Corol. 2. Axis minor est media proportionalis inter segmenta axis majoris in alterutro foco secti; sivè inter alterutrius foci distantiam ab utroque vertice. Est enim $c=a^2-b^2$: ergo $a^2=b^2+c^2$; et $b^2=a^2-c^2=(a+c)$ $(a-c)$. Deducta igitur proportione (202), $a+c : b :: b : a-c$. Enimverò $a+c=AC+Cf=Af$ (fig. 42); et $b=EC$; atque $a-c=Bf$; ergo $Af : EC :: EC : Bf$; segmenta videlicet axeos in foco sunt extrema proportionis, axis minor utrumque medium.

517 Teor. 3. *Ordinata* M*f*mC (fig. 42) *per focos ellipsis transiens, æquatur ipsius parametro. Dem.* $Mf : EC^2 :: Af\times Bf : AC\times BC$ (508): at $Af\times Bf=EC^2$ (516); ergo $Mf^2 : EC^2 :: EC^2 : AC\times BC$. Rursus $AC=BC$: igitur $Mf^2 : EC^2 :: EC^2 : AC^2$; et permutando extrema $AC^2 : EC^2 :: EC^2 : Mf^2$; et multiplicando per 4; $4AC^2 : 4EC^2 :: 4EC^2 : 4Mf^2$. Ad demum extrahendo radicem $2AC : 2EC :: 2EC : 2Mf$, sivè M*fm*; ordinata scilicet per focos transiens tertia proportionalis ad axem majorem et minorem, quæ est parametri definitio (507).

518 Corol. 1. Ex dictis facilè est, datis axibus, invenire parametrum. Nam instituta proportione axis majoris et minoris, tertia proportionalis erit parameter axis majoris: nimirum $2a : 2b :: 2b : p$, littera p designante parametrum; sivè divisa per 2 prima ratione, adhuc erit, $a : b :: 2b : p$; ac $p=\frac{2b^2}{a}$.

519 Corol. 2. Quum axes in ellipsi constantes sint, nec augmentum, aut decrementum patiantur, uti abscissæ, atque oidinatæ, parameter etiam quantitas constans erit in ellipsi.

520 Schol. Abscissæ in ellipsi posunt etiam à centro computari. Esto CP (fig. 42) abscissa ab centro computata, quam assumis cum reliquis ellipsis lineis comparandam; erit $AP=a-x$, $BP=a+x$; $AP\times BP$ $(a-x)$ $(a+x)$: et multip. ac reductione facta a^2-x^2. Quamobrem superius (510) inventa proportio $MP^2 : AP\times BP :: DC^2 : AC^2$ in hanc abibit:

$$y^2 : a^2-x^2 :: b^2 : a^2;$$

ductisque extremis et mediis, $a^2\ y^2=a^2\ b^2-b^2\ x^2$

et transp. $y^2=\frac{a^2\ b^2-b^2\ x^2}{a^2}$

En alteram æquationem inter semiordinatas atque abscissas à centro computatas.

521 Probl. 1. *Ellipsim motu continuo describere.* Solut. Esto datus, vel ad libitum assumptus axis AB (fig. 42), in quo foci F, *f*, sivè dati, sivè delecti sint: filium longitudinis AB in duobus punctis F, *f*, ab extremitatibus ritè affigatur, ut possit stilo probè tenso utrinquè circumduci; linea sivè perimeter ADEB sic descripta erit ellipsis. *Dem.* Si ostendero in curva

modò designata æquationem ad ellipsim inveniri, extra dubium erit ellipsim descriptam fuisse: quod sic præstabo. 1. Positio fili tensi curvam describentis in quocumque puncto designetur, ex gr. FM, Mf? quum verò filum sit æquale AB, erit FM+M$f=2a$; differentia autem inter FM, et Mf dicatur $2d$; adeòque F M$=\frac{2a-2d}{2}=a-d$; et M$f=\frac{2a+2d}{2}=a+d$ (110). Ducatur semiordinata MP$=y$, dividens FMf in duo triangula rectangula FMP, MPf recta Pf=PC+Cf erit$=c+x$; et FP$=c-x$ (515, 520.)

2. In triangulis prædictis Mf^2=MP^2+fP^2=MP^2+(PC+Cf)^2: et FM^2=MP^2+FP^2=MP^2+(FC—CP)^2 (345). Valoribus algebricis linearibus substitutis, erunt

M$f^2=a^2+2ad+d^2$=MP^2+(PC+Cf)$^2=y^2+c^2+2cx+x^2$

FM$^2=a^2-2ad+d^2$=MP^2+(FC—CP)$^2=y^2+c^2-2cx+x^2$

Subtracta utrinquè inferiore ab superiore æquatione, factaque reductione; quas operationes brevitatis gratia sedulitati studiosi perficiendas committimus;

deducitur $4ad=4cx$; et $d=\frac{cx}{a}$ et $d^2=\frac{c^2x^2}{a^2}$.

Substituatur hic valor in prima æquatione; emerget $a^2+2a\frac{cx}{a}+\frac{c^2x^2}{a^2}=y^2+c^2+2cx+x^2$ (104).

sive deleto a; $a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx=y^2+c^2+2cx+x^2$;

et delendo utrinque $2cx$; $a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}=y^2+c^2+x^2$ (104, 2):

ac tollendo fraction. $a^4+c^2x^2=a^2y^2+a^2c^2+a^2x^2$ (104, 3):

et transp. $a^2y^2=a^4+c^2x^2-a^2c^2-a^2x^2$

et divid. utrinquè per a^2-c^2; $\frac{a^2y^2}{a^2-c^2}=a^2-x^2$ (ibid. 4.)

Rursus $a^2-c^2=b^2$=EC^2 (516): adeòque si substituatur $b^2=a^2-c^2$, erit $\frac{a^2y^2}{b^2}=a^2-x^2$:

exterminata fract. $a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$.

Demum transp. $y^2=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a}$

Habes æquationem ad ellipsim superiùs traditam in curva modò circumducta.

522 Corol. Summa rectarum ductarum à duobus focis ad idem perimetri punctum æqualis est axi majori: adeòque tam FM+Mf, quam FE+Ef, aut quæcumque aliæ similiter ducendæ, æquales erunt AB. Et vicissim si summa prædictarum linearum æqualis est axi majori, punctum concursus erit in perimetro.

523 Prob. 2. *Ad ellipsim tangentem ducere.* Solut. Esto punctum M, ad quod ducenda sit tangens: producatur fM ultra M in S, donec sit MS=MF, et ducta FS, bifariàm dividatur; punctum bisectionis, et M directionem dabit lineæ TMr, quæ erit tangens ellipsis ad punctum M. *Dem.* Quoniam omnia latera homologa triangulorum FMT, SMT æqualia sunt cons-

structa, erunt æqualia (332): ergo et rectangula ad T (294): quapropter omnia puncta T*r* æquè distant utrinque à S, F. Ducatur S*r*=F*r*; latera S*r*, *fr*, in triangulo S*fr* majora sunt quam S*f* (272): at *f*S=M*f*+MF=AB (522): ac demum *fr*+S*r*, sive æquale F*r* majora sunt *f*S=FM+M*f*=AB: ergo punctum *r* extra ellipsim est (521, 522). Omnia igitur puncta lineæ T*r* extra ellipsim sunt, præter assignatum M, in quo ellipsim tangit.

524 Corol. Recta FM, ab uno ex focis ad punctum contactus M ducta, facit angulum FMT=*f*M*r*, quem altera recta, ab respondente foco ducta ad idem M, punctum contactus format cum eadem tangente T*r*. Nam ex praxi superius assignata ad tangentem cuilibet puncto (M) ducendam SMT=FMT: at *f*M*r* est ad verticem oppositus SMT=FMT: ergo et *f*M*r* æqualis erit (290).

CAPUT QUARTUM.

Hyperbola.

525 Defin. I. Quum hyperbola sit *sectio coni plano axi parallelo, aut alia directione, quæ alterutri laterum parallela non sit, ac basim intra conum secet* (484); concipiamus conos duos verticibus oppositos CBV, EDV (fig. 43) ita ut recta AVF communis axis utriusque sit. Enimverò si planum GL directione ad hyperbolam composita latus utrumque conorum secuerit, evidens est duas hyperbolas utrinquè factum iri; quæ hyperbolæ conjugatæ apud geometras audiunt.

526 Defin. 2. Axis hyperbolæ extra curvam sumitur; estque illa distantia, quæ inter ejusdem, atque alterius conjugatæ verticem intercedit MN axis hyperbolæ GM erit; alterius vero LN idem intervallum ab N in M sumptum: atque hic quidem primus axis dicitur. Secundus autem est linea VO alteri perpendicularis, ipsum bifariàm dividens, atque itidem ab eodem bisectus. Ordinatæ perindè atque in aliis curvis computantur: abscissæ etiam sunt partes interceptæ inter verticem et analogam ordinatam. Et hæc quidem intra curvam: alias verò abscissas et ordinatas infra dabimus.

527 Defin. 3. Si triangulum EVD, in quod conum derivetur directione à vertice ad basem perpendicularis bisectum, ita constituatur, ut hyperbolam MG intra crura intercipiat, ambo sub eodem plano respondentia; latera duo trianguli VE, VD, hyperbolæ asymptoti dicuntur.

528 Corol. Quum ED sit basis trianguli EVD, cujus latera sunt asymptoti hyperbolæ; atque etiam diameter sit circuli EFD; major erit quam chorda *ab*, quæ basim, ut ita dicam, hyperbolæ metitur (280). Concipiamus conum in infinitum produci: proculdubiò asymptoti, atque hyperbola continenti proportione crescent, manente tamen eadem ratione inter diametrum ED, et chordam *ab*. Intervallum nimirum asymptotorum ED pari casu

crescet, quo chorda ab distendetur: ergo semper invicem accedent, quin unquam coincidant; quod asymptotis nomen præbuit; perindè quasi non *coincidentes* dicerentur. Hinc ortum est theorema paradoxo simile; quod nimirum hyperbolæ crura semper propiùs ad asymptotos accedunt, quin unquam possint cum iisdem concurrere.

529 Defin. 4. Ordinatæ, atque abscissæ hyperbolæ in asymptotis pariter sumi possunt. Sumpto AB, AE (fig. 44) asymptoti descriptæ, aut describendæ hyperbolæ: in his sumantur AD, AF æquales, compleaturque parallelogrammum ADVF: deindè in asymptotis accipiantur ad libitum partes, uti AC, AE, AG, AB ea lege, ut latus AD=DV parallelogrammi sit semper media proportionalis inter partem in asymptoto abcissam, atque aliam parallelam alteri asymptoto ducendam: ex gr.

AC : DV :: DV : CL
AG : FV :: FV : GK
AE : DV :: DV : EN etc.

linea per puncta NLVKM transiens, erit hyperbola: ejus abscissæ in asymptotis, erunt AD, AC, AG etc.: ordinatæ autem EN, CL, GK etc.

530 Corol. 1. Esto abscissa de more $=x$, ordinata$=y$, latus DV aut FV vocetur d; quum sit $x : d :: d : y$; erit $xy=d^2$; ergo quæcumque demum sit abscissa in asymptoto capta, semper rectangulum ex ipsa in respondentem ordinatam, æquale erit quadrato DV, aut FV, sive

parallelogramo ADVF eidem æquali (354).

531 Corol. 2. Comparando abscissas abscissis, atque ordinatas ordinatis, esto AC, aut AG$=x$; CL, aut GK$=y$; AE$=$X; EN$=$Y; quum sit $xy=d^2$; XY$=d^2$; erit XY$=xy$; et X$:x::y:$Y (202). Nempè abscissæ sunt in ratione inversa, aut reciproca ordinatarum, et vice versa.

532 Corol. 3. Considerando rectam AD veluti abscissam in asymptoto AE, erit AD: DV :: DV : y. Verum AD=AF (530): et quum AD, VF sint parallelæ, AF=DV (351): ergo etiam y æqualis AD: sivè ordinata huic abscissæ respondens, est ipsum potentiæ latus AD: atque idcircò punctum V est in hyperbola. Sumendo aliam abcissam AF huic æqualem in asymptoto AB, eadem methodo demonstratur, ordinatam illi respondentem fore ipsum latus potentiæ AF: ergo crura hyperbolæ in puncto V concurrere debent; ipsumque est vertex prædictæ curvæ, è quo ejusdem crura divergere incipiunt.

533 Corol. 4. Quoniam reliquæ ordinatæ oK, pM ulterioribus abscissis Ao, Ap respondentibus supra verticem V in asymptoto AE æquales sunt respondentibus abscissis alteriu- asymptoti AB (354): eadem proportio, quæ inter abscissas, latus constans hyperbolæ, atque ordinatas illic invenitur; hic etiam ordine permutato reperietur: nempè quæ hic ordinata illic abscissa, et vice versa vocabitur. Est igitur Ao : DV :: DV : oK, sivè $x : d :: d : y$: ac rursus Ap : DV :: DV : pM; seu X : d :: d : Y, et

$xy = XY$; deductaque proportione $x : X :: Y : y$. En iterum inversam rationem inter abscissas, atque ordinatas supra verticem positas.

534 Corol. 5. Ordinatæ asymptoti AE perpetuò decrescunt, recedendo à vertice V versus E: nam crescentibus abscissis, eodem medio remanente, opus est ordinatas decrescere, ut constans sit proportio assignata num. 530. Quum verò datis duabus lineis, tertia proportionalis semper reperiri queat (344); evidenter deducitur, asymptotorum latera, atque hyperbolæ crura continenter accedere, quin umquam ad contactum deveniant. Habes alteram demonstrationem theor. num. 528 indicati.

535 Corol. 6. Contra atque de ordinatis infra verticem ostensum est, evenit in aliis ordinatis supra verticem sumptis: hæ videlicet jugiter increscunt juxta majorem accessum à D versus A, ea lege ut nulla ordinata assignanda sit; cujuscumque demum magnitudinis supponatur, qua major inveniri non possit. Etenim crura hyperbolæ ad contactum asymptotorum devenire non valent (528, 534): poterit igitur inter utrumque duci linea finitè in infinitum, uti vulgò ajunt, quin assinari possit punctum *non plus ultra* ordinatis definiens: sivè è quo duci non possit aliqua ordinata. Hoc item est alterum paradoxo simile in hyperbola. Quod in uno latere ostendimus, dictum habe de altero hyperbolæ crure cum sibi respondente asymptoto: in qua adamussim comprobantur omnia, quæ ad unum tantum latus demonstravimus. In adducta verò hyperbola asymptoti angulum rectum formando, rectum pariter faciunt angulum cum sibi respondentibus ordinatis; atque adeò perpendiculares ipsis sunt. Manifestum autem est, quemcumque angulum in asymptotis supposueris, eumdem et in ordinatis ad asymptotos comparatas repertum iri: quum ordinatæ unius asymptoti, alteri asymptoto sint parallelæ (299).

536 Schol. Hyperbola hactenus descripta, quæ et apolloniana audit, est curva secundi gradus, quippè æquationem $xy = d^2$ tantum continens. Quod si alteram hyperbolam descripseris, in qua $x^2 : d^2 :: d : y$, hæc erit tertii gradus; quoniam $x^2y = d^3$, sive tertiam potentiam includens. Exemplo tamen clariss. auctorum, qui philosophicas institutiones tradiderunt, à prolixiori curvarum investigatione libenter supersedemus; quum hactenus tradita, satis superque sint ad ea, quæ in physicis exponentur, dilucidanda.