Por último, agregarémos que para mayor seguridad es tambien útil en casos semejantes dar á hacer la misma operacion á dos ó tres individuos, y cotejar en seguida los resultados.

CAPITULO VI.

DE LA SUSTRACCION DE LOS ENTEROS.

82. P. Qué cosa es sustraccion?

R. La sustraccion es una operacion de aritmética por medio de la cual se quita un número de otro homogéneo para averiguar la diferencia.

83. P. Cuáles son los términos de la sustraccion?

R. El *minuendo*, el *sustraendo* y la *resta*.

P. Qué es el *minuendo?*

R. El *minuendo* es el número de quien se resta ó quita otro, y en aritmética es siempre mayor que el otro.

P. Qué es el *sustraendo?*

R. *Sustraendo* es el número que se resta del minuendo.

P. Qué es la *resta?*

R. La *resta* ó resíduo es lo que queda del minuendo despues de haberle quitado el valor del sustraendo; por consiguiente es el resultado de la sustraccion. La resta llámase tambien *diferencia*, porque señala la diferencia que hay entre el minuendo y el sustraendo; y á veces llámase *exceso*, porque es lo que tiene el minuendo demas del sustraendo.

84. P. Cuál es el signo de la sustraccion?

R. Es una línea horizontal que se pone entre el minuendo y el sustraendo, y que se lee *ménos*. Ademas se usa tambien el signo de igualdad, y se coloca delante de la resta. Así 9—4=5, se lee *nueve ménos cuatro es igual á cinco*. De esta manera pueden hacerse todas las sustracciones de los números dígitos.

85. En la operacion de sustraccion se valen algunos de las mismas expresiones del ejemplo que acabamos de dar, ó mas brevemente *nueve ménos cuatro, cinco;* otros dicen: *quien de nueve resta* ó *quita cuatro, deja cinco;* ó bien, *si de nueve quito cuatro, quedan cinco;* ó mas corto, *de nueve cuatro, cinco.* Todos estos modos son buenos; pero debe cuidar mucho el maestro que sus discípulos no se acostumbren á repetir siempre la expresion *quien de nueve paga cuatro, debe cinco,* que exceptuando ciertos casos, no solo es impropia sino hasta ridícula; y por lo mismo se evitará esta y otra tautología: *quien de cuatro paga cuatro, paga.*

Hay quien toma los términos inversamente, y dice: *de cuatro á nueve van cinco,* en donde el verbo *van* tiene el sentido de *faltan.* Este método es muy útil y muy usado, particularmente en la operacion de la division, cuando se resta de memoria el producto del divisor por el cociente de los dividendos parciales, como verémos en su lugar.

86. P. No hay alguna tabla que pueda servir para los principiantes?

R. Puede ser útil la siguiente:

1 —	1 =	0	4 —	4 =	0	7 —	7 =	0
2	1	1	5	4	1	8	7	1
3	1	2	6	4	2	9	7	2
4	1	3	7	4	3	10	7	3
5	1	4	8	4	4	11	7	4
6	1	5	9	4	5	12	7	5
7	1	6	10	4	6	13	7	6
8	1	7	11	4	7	14	7	7
9	1	8	12	4	8	15	7	8
10	1	9	13	4	9	16	7	9
2 —	2 =	0	5 —	5 =	0	8 —	8 =	0
3	2	1	6	5	1	9	8	1
4	2	2	7	5	2	10	8	2
5	2	3	8	5	3	11	8	3
6	2	4	9	5	4	12	8	4
7	2	5	10	5	5	13	8	5
8	2	6	11	5	6	14	8	6
9	2	7	12	5	7	15	8	7
10	2	8	13	5	8	16	8	8
11	2	9	14	5	9	17	8	9
3 —	3 =	0	6 —	6 =	0	9 —	9=	0
4	3	1	7	6	1	10	9	1
5	3	2	8	6	2	11	9	2
6	3	3	9	6	3	12	9	3
7	3	4	10	6	4	13	9	4
8	3	5	11	6	5	14	9	5
9	3	6	12	6	6	15	9	6
10	3	7	13	6	7	16	9	7
11	3	8	14	6	8	17	9	8
12	3	9	15	6	9	18	9	9

87. P. Cómo se hace la sustraccion cuando uno ó ámbos datos son números compuestos?

R. Cuando uno ó ámbos datos son números compuestos, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de manera que las unidades correspondan á las unidades, etc., como se practica con los sumandos. Luego tirada una raya horizontal por debajo, se empieza á restar las unidades del sustraendo de las del minuendo, y se escribe debajo de la raya y de las unidades la diferencia parcial que resulta; luego se hace lo mismo con las decenas y las centenas, y se prosigue así hasta que no haya mas cifras que restar en el sustraendo; si despues de esto quedan aún algunas cifras á la izquierda del minuendo, se bajan, como están, á la izquierda de la resta.

El siguiente ejemplo hará ver la aplicacion de la regla. Supongamos que deba restarse el número 8236 de 18749, se escriben los datos uno debajo de otro, como aquí se ve:

18749 minuendo.
8236 sustraendo.
———
10513 resta.

y tirada la raya se empieza á restar las unidades del sustraendo de las del minuendo, diciendo: *quien* de 9 quita 6 deja 3, se escribe la resta parcial 3 debajo de la raya y de las unidades; paso luego á las decenas y digo, de 4... 3, 1, que escribo debajo de las decenas; sigo con las centenas, diciendo, de 7... 2, 5, que escribo debajo de las centenas; sigo con los millares, y como 8 restado de 8 no deja ninguna diferencia, pongo 0 debajo de los millares; por último, como el sustraendo no tiene decenas de millares que restar, bajo la decena de millar del minuendo á la izquierda de la resta en su propio lugar, y tengo una resta total de 10513.

*88. Demostracion.—Nada hay que decir sobre la sustraccion de los números dígitos. En cuanto á los números compuestos se escriben uno debajo de otro en el órden que se ha dicho para ver mas claramente los sustraendos y los minuendos parciales, y se tira la raya horizontal por debajo para separar los datos del resultado. Se empieza por la derecha, á saber, por las unidades, porque á veces hay sustraendos parciales mayores que sus correspondientes guarismos en el minuendo, y en este caso seria una confusion si se empezase por la izquierda, como se verá claramente por la regla siguiente. Por último, la razon intrínseca de restar las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, etc., consiste en que lo mismo es quitar de un golpe del minuendo el valor total del sustraendo, que quitar separadamente las unidades, las decenas, las centenas, etc., de éste, de las unidades, decenas, centenas, etc., de aquel.

89. P. Cómo se hace la sustraccion cuando alguno de los guarismos del sustraendo sea mayor que su correspondiente del minuendo?

R. En este caso se toma en el minuendo una unidad del guarismo que le sigue inmediatamente á la izquierda, y contándola como diez se une al guarismo de la derecha, y de esta suma se resta el guarismo del sustraendo. Luego el guarismo de la izquierda en el minuendo se considera disminuido de una unidad para el resto de la operacion. Todo esto se verá claro en el ejemplo que sigue:

623745 M.
38024 S.
———
585721 R.

Despues de haber restado los guarismos 4 y 2 del sustraendo de los guarismos 5 y 4 del minuendo se sigue cero en el sustraendo; pero por ser cifra insignificativa nada le quita al 7 correspondiente del minuendo: de consiguiente escribo 7 entero en la resta debajo de las centenas. Luego veo que el guarismo 8 de los millares no se puede restar de su correspondiente 3; tomo una unidad del guarismo 2, que sigue inmediatamente á la izquierda en el minuendo, esta unidad trasportada de un lugar hácia la derecha vale 10, y sumando con 3, resulta 13: digo, pues, quien de 13 quita 8 deja 5, que coloco debajo de la raya. Prosigo luego considerando el guarismo 2 siguiente solamente como 1, y digo quien de 1 quita 3, no puede; agrego como ántes 10 unidades al 1, y digo quien de 11 quita 3, deja 8, que escribo abajo. Por último, el guarismo 6 de la izquierda lo considero como 5, y como no hay mas guarismos que restar en el sustraendo, lo escribo debajo de la raya, y tengo una resta total de 585721.

*90. Demostracion.—La demostracion de esta regla se funda en el sistema de numeracion decimal. En efecto, cada unidad del guarismo que está á la izquierda de otro vale diez unidades de la especie de éste (N. 45). En este caso, pues, se descompone el número para poder hacer la operacion; así, si de 34 quiero restar por ejemplo 18, descompongo 34 en 20+14, luego resto las 8 unidades del sustraendo de las 14 del minuendo, y coloco la resta parcial 6

en su lugar; en seguida resto la decena del sustraendo 18 no de las 3 decenas sino de las 2 que quedan en el minuendo, ó sea de 20.

91. Esto es lo que se practica en general para la sustraccion; pero el mismo resultado saldria, si en lugar de considerar el guarismo de la izquierda del minuendo como disminuido de una unidad, se considerase el guarismo correspondiente que sigue en el sustraendo como aumentado de una unidad. En efecto, en el ejemplo anterior la misma diferencia resulta de restar 1 decena de 2 decenas, que de restar 2 decenas de 3 decenas; pues 20−10=10, y 30−20=10. Este segundo método es muy usado en la division, como verémos en su lugar.

92. P. Cómo se hará cuando en el minuendo se encuentren ceros?

R. Si hay un solo cero seguido á la izquierda de un guarismo significativo, el cero se considera como diez, y el guarismo siguiente disminuido de una unidad. Pero si los ceros son muchos y seguidos, entónces se considera el primero de la derecha de la série como diez, y los demas como nueve, y el primer guarismo significativo de la izquierda como disminuido de una unidad.

Véanse los tres ejemplos siguientes:

	I.	II.	III.
M.	640	10007	68032
S.	338	3456	4374
R.	302	6551	63658

En el primero de estos ejemplos empiezo á restar el 8 de 10, luego el 3 no de 4, sino de 3. En el segundo, despues de haber restado el 6 del 7, resto el 5 de 10, el 4 siguiente de 9, el 3 siguiente de 9 tambien, y luego como se ha de disminuir la cifra significativa 1 de la izquierda del minuendo de una unidad, nada queda que bajar á la resta.

En el tercero empiezo á restar el 4 de 12, luego el 7 no de 13 sino de 12 de nuevo; en seguida el 3 no de 10, como deberia ser, sino solo de 9 por estar disminuida esta decena de una unidad que se unió al guarismo de la derecha; luego el 4 de la izquierda del sustraendo se resta del 8 disminuido, ó sea de 7; por último, no habiendo mas cifras que restar en el sustraendo, se baja entero á la resta el 6 que queda á la izquierda del minuendo.

*93. Demostracion.—La razon de la regla se entenderá fácilmente descomponiendo un número que acabe en varios ceros seguidos; por ejemplo, 1000 es igual á 999+1, en donde vemos

que quitando una unidad á 1000 todos sus ceros se vuelven 9, y la primera cifra significativa 1 queda disminuida de una unidad, ó desaparece; devolviendo, pues, la unidad que habiamos quitado, pero de manera que se una con el último 9 de la derecha, tendrémos 1000 ó sea 999+1=990+10; esta última descomposicion es la que usamos implícitamente en la regla que hemos dado.

94. P. Cuál es la prueba de la sustraccion?

R. La prueba de la sustraccion es una adicion, á saber: tirada una línea horizontal debajo de la resta, se suma el sustraendo con la diferencia, y si la suma es igual al minuendo es señal que la sustraccion fué bien ejecutada.

Tomando vg. el tercer ejemplo de arriba, y practicando la prueba, como aquí se ve:

68032 minuendo
4374 sustraendo
———
63658 resta
———
68032 suma del sustraendo con la diferencia

concluimos que la sustraccion fué bien hecha, porque la suma del sustraendo con la diferencia iguala el minuendo.

*95. Demostracion.—La resta no es mas que el exceso que sobra del minuendo despues de haber quitado de él el sustraendo. Luego es evidente que el minuendo es igual al sustraendo mas la resta; y viceversa, el sustraendo mas la resta, igualan juntos el minuendo. Esta verdad es el fundamento de la regla de la prueba de la sustraccion.

96. Aunque sea verdad lo que hemos dicho en el capítulo precedente que la única prueba de la adicion verdaderamente útil para la práctica es repetir la adicion en órden inverso; sin embargo, la sustraccion puede tambien servir de prueba para esa operacion y esto de diferentes modos. Pondrémos aquí uno por ser muy ingenioso y porque puede servir de ejercicio para los principiantes.

Sea el siguiente ejemplo:

3624
537
8439
674
7205
———
20479
~~2120~~

Para probar si la suma total 20479 es exacta, se empieza á sumar por la izquierda la columna de los millares, y la suma parcial 18 se resta de 20 que se halla escrito debajo de esta columna, y la resta 2 se escribe por debajo. Se sigue sumando la columna de las centenas, y la suma 23 se resta de 24, número compuesto de la cifra 2, que se escribió como resta debajo de los millares, y de la cifra 4 que hay debajo de los centenares; debajo del mismo 4 se escribe la resta 1, y se tira una raya encima del 2 que precede como para borrarlo. Se suma luego la columna de las decenas, y la suma 15 se resta de 17, número compuesto de la cifra 1 que se puso debajo de las centenas, y de 7 que está debajo de las decenas; debajo de este 7 se escribe la resta 2 y se borra la cifra 1 que precede. Por último, se resta la suma parcial 29 de la columna de las unidades tambien de 29, número compuesto de la cifra 2 que se puso debajo de las decenas y de la cifra 9 que está debajo de las unidades. Como no hay diferencia, borro el 2 y escribo 0 debajo del 9, y ésta es la señal de que la adicion fué bien ejecutada; pero si la última resta fuese en lugar de 0 alguna cifra significativa, seria prueba de alguna equivocacion.

* Reparando bien esta regla se ve claro que aquí no se hace sino descomponer por medio de la sustraccion lo que se compuso con la adicion. En efecto, la cifra que en la suma está escrita debajo de la última columna de la izquierda con la cifra que le precede á la izquierda, si la hay, expresa la suma parcial de la misma columna mas las decenas que se llevaron de la columna precedente de la derecha: restando, pues, la suma parcial de esta misma columna, la resta expresa las decenas que se llevaron de la precedente. Esta misma resta, que se escribe por debajo, juntamente con la cifra que está debajo de la columna que sigue á la derecha, expresa la suma de esta columna mas las decenas que se llevaron de la columna precedente; estas decenas son, pues, las que quedan por resta despues de haber quitado la suma parcial de la segunda columna, y así sucesivamente. La última resta que esta por debajo juntamente con la cifra escrita debajo de la columna de las unidades expresa exactamente la suma parcial de esta última columna; restándola, pues, debe dar por resultado 0. Así es que si el último resultado fuese otra cifra diversa de 0, ó bien si la última resta por debajo de las decenas juntamente con la cifra de debajo de las unidades fuese un número menor ó mayor de la suma parcial de la columna de las unidades, se concluiria que ha habido equivocacion.

Esta especie de prueba puede servir, como deciamos, de ejercicio á los principiantes y para que se acostumbren á descomponer los números, pero solo cuando los sumandos no son muchos. Pues si éstos fuesen tantos que las sumas parciales de las columnas contuviesen no solo decenas sino centenas, aunque pudiese tambien practicarse, se haria sin embargo tan engorrosa que mas valdria dejarla.

CAPITULO VII.

DE LA MULTIPLICACION DE LOS ENTEROS.

97. Que es la *multiplicacion?*

R. La *multiplicacion* es una operacion por medio de la que se toma un número tantas veces como dice otro.

*98. No hay duda que para tomar un número tantas veces como dice otro podria escribirse el primero tantas veces como dice el segundo y luego hacerse la adicion. De este modo esta operacion seria la misma que la adicion. Pero la dificultad que resultaria de escribir un mismo número muchas veces, particularmente cuando el número que indica las veces es muy grande, hizo pensar en abreviar la operacion y esto es lo que enseñan las reglas que vamas á dar en seguida; de manera que la multiplicacion puede llamarse una adicion abreviada.

99. P. Cuáles son los términos de la multiplicacion?

R. El *multiplicando*, el *multiplicador* y el *producto*.

P. Decidme qué cosas son estos términos.

R. El *multiplicando* es el número dato que se ha de tomar tantas veces como dice otro; el *multiplicador* es aquel dato que sañala cuantas veces se ha de tomar el multiplicando. Cada uno de estos dos términos toma ademas el nombre de *factor*. El *producto* es el número que expresa el resultado de la multiplicacion.

100. P. Cuál es el signo de la multiplicacion?

R. El siguiente ($\times$), que se pone entre los dos factores. Así, $4\times3=12$, se lee: *cuatro multiplicado por tres es igual á doce*, ó simplemente, *cuatro por tres, doce*. Hay tambien quien usa un punto en lugar del signo $\times$; pero como el punto tiene en matemática otro uso, no nos parece bien emplearlo como signo de multiplicacion.