Para probar si la suma total 20479 es exacta, se empieza á sumar por la izquierda la columna de los millares, y la suma parcial 18 se resta de 20 que se halla escrito debajo de esta columna, y la resta 2 se escribe por debajo. Se sigue sumando la columna de las centenas, y la suma 23 se resta de 24, número compuesto de la cifra 2, que se escribió como resta debajo de los millares, y de la cifra 4 que hay debajo de los centenares; debajo del mismo 4 se escribe la resta 1, y se tira una raya encima del 2 que precede como para borrarlo. Se suma luego la columna de las decenas, y la suma 15 se resta de 17, número compuesto de la cifra 1 que se puso debajo de las centenas, y de 7 que está debajo de las decenas; debajo de este 7 se escribe la resta 2 y se borra la cifra 1 que precede. Por último, se resta la suma parcial 29 de la columna de las unidades tambien de 29, número compuesto de la cifra 2 que se puso debajo de las decenas y de la cifra 9 que está debajo de las unidades. Como no hay diferencia, borro el 2 y escribo 0 debajo del 9, y ésta es la señal de que la adicion fué bien ejecutada; pero si la última resta fuese en lugar de 0 alguna cifra significativa, seria prueba de alguna equivocacion.

* Reparando bien esta regla se ve claro que aquí no se hace sino descomponer por medio de la sustraccion lo que se compuso con la adicion. En efecto, la cifra que en la suma está escrita debajo de la última columna de la izquierda con la cifra que le precede á la izquierda, si la hay, expresa la suma parcial de la misma columna mas las decenas que se llevaron de la columna precedente de la derecha: restando, pues, la suma parcial de esta misma columna, la resta expresa las decenas que se llevaron de la precedente. Esta misma resta, que se escribe por debajo, juntamente con la cifra que está debajo de la columna que sigue á la derecha, expresa la suma de esta columna mas las decenas que se llevaron de la columna precedente; estas decenas son, pues, las que quedan por resta despues de haber quitado la suma parcial de la segunda columna, y así sucesivamente. La última resta que esta por debajo juntamente con la cifra escrita debajo de la columna de las unidades expresa exactamente la suma parcial de esta última columna; restándola, pues, debe dar por resultado 0. Así es que si el último resultado fuese otra cifra diversa de 0, ó bien si la última resta por debajo de las decenas juntamente con la cifra de debajo de las unidades fuese un número menor ó mayor de la suma parcial de la columna de las unidades, se concluiria que ha habido equivocacion.

Esta especie de prueba puede servir, como deciamos, de ejercicio á los principiantes y para que se acostumbren á descomponer los números, pero solo cuando los sumandos no son muchos. Pues si éstos fuesen tantos que las sumas parciales de las columnas contuviesen no solo decenas sino centenas, aunque pudiese tambien practicarse, se haria sin embargo tan engorrosa que mas valdria dejarla.

CAPITULO VII.

DE LA MULTIPLICACION DE LOS ENTEROS.

97. Que es la *multiplicacion?*

R. La *multiplicacion* es una operacion por medio de la que se toma un número tantas veces como dice otro.

*98. No hay duda que para tomar un número tantas veces como dice otro podria escribirse el primero tantas veces como dice el segundo y luego hacerse la adicion. De este modo esta operacion seria la misma que la adicion. Pero la dificultad que resultaria de escribir un mismo número muchas veces, particularmente cuando el número que indica las veces es muy grande, hizo pensar en abreviar la operacion y esto es lo que enseñan las reglas que vamas á dar en seguida; de manera que la multiplicacion puede llamarse una adicion abreviada.

99. P. Cuáles son los términos de la multiplicacion?

R. El *multiplicando*, el *multiplicador* y el *producto*.

P. Decidme qué cosas son estos términos.

R. El *multiplicando* es el número dato que se ha de tomar tantas veces como dice otro; el *multiplicador* es aquel dato que sañala cuantas veces se ha de tomar el multiplicando. Cada uno de estos dos términos toma ademas el nombre de *factor*. El *producto* es el número que expresa el resultado de la multiplicacion.

100. P. Cuál es el signo de la multiplicacion?

R. El siguiente ($\times$), que se pone entre los dos factores. Así, $4\times3=12$, se lee: *cuatro multiplicado por tres es igual á doce*, ó simplemente, *cuatro por tres, doce*. Hay tambien quien usa un punto en lugar del signo $\times$; pero como el punto tiene en matemática otro uso, no nos parece bien emplearlo como signo de multiplicacion.

101. P. Hay alguna tabla que sirva para la multiplicacion de los números dígitos?

R. Hay la siguiente, que es indispensable aprender bien de memoria, al derecho, al revés y salteada:

1 × 1 = 1			4 × 1 = 4			7 × 1 = 7		
1	2	2	4	2	8	7	2	14
1	3	3	4	3	12	7	3	21
1	4	4	4	4	16	7	4	28
1	5	5	4	5	20	7	5	35
1	6	6	4	6	24	7	6	42
1	7	7	4	7	28	7	7	49
1	8	8	4	8	32	7	8	56
1	9	9	4	9	36	7	9	63
2 × 1 = 2			5 × 1 = 5			8 × 1 = 8		
2	2	4	5	2	10	8	2	16
2	3	6	5	3	15	8	3	24
2	4	8	5	4	20	8	4	32
2	5	10	5	5	25	8	5	40
2	6	12	5	6	30	8	6	48
2	7	14	5	7	35	8	7	56
2	8	16	5	8	40	8	8	64
2	9	18	5	9	45	8	9	72
3 × 1 = 3			6 × 1 = 6			9 × 1 = 9		
3	2	6	6	2	12	9	2	18
3	3	9	6	3	18	9	3	27
3	4	12	6	4	24	9	4	36
3	5	15	6	5	30	9	5	45
3	6	18	6	6	36	9	6	54
3	7	21	6	7	42	9	7	63
3	8	24	6	8	48	9	8	72
3	9	27	6	9	54	9	9	81

102. Esta misma tabla la dispuso ingeniosamente en un cuadrado de 81 casillas el filósofo Pitágoras, y por eso se llama *tabla pitagórica*. En ella se colocan los números dígitos en las casillas de la primera línea horizontal de arriba; las casillas de la segunda línea horizontal contienen respectivamente el duplo de los de arriba, la tercera el triple, y así en adelante, como aquí puede verse:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para servirse de esta tabla y buscar el producto correspondiente á dos factores cualesquiera, que sean números dígitos, se coloca un dedo sobre uno de los factores que se encuentra en una de las casillas de la primera línea horizontal de arriba, y otro dedo se coloca sobre el otro factor que se halla en una de las casillas de la primera columna vertical de la izquierda. Luego se baja el primer dedo por lo columna que le corresponde, y se corre de izquierda á derecha el segundo por la línea correspondiente. El número que se halla en la casilla en donde se encuentran los dos dedos, será el producto. Supongamos que se quiera saber el producto de 8 por 7; se coloca un dedo sobre el 8 de arriba y otro sobre el 7 de la primera columna de la izquierda, y el número 56 que se halla en la casilla en donde se encuentran los dedos, es el producto buscado.

103. P. Se cambia acaso el valor del producto con invertir el órden de los factores?

R. Considerando los factores como números abstractos, el valor del producto no se altera con invertir los primeros; porque el mismo resultado da, vg., 3 multiplicado por 4, que 4 multiplicado por 3, á saber 12, como se ve en la tabla pitagórica.

* Demostracion.—Aunque el principio sentado en la regla parezca por sí evidente; sin embargo, como se hace uso de él en várias demostraciones que siguen mas adelante, pondrémos aquí

para mayor satifaccion del estudiante la demostracion que suelen dar de él célebres matemáticos, que no deja de ser ingeniosa. Así, para probar que $4\times3=3\times4$, escribimos tres líneas horizontales con cuatro unidades cada una del modo siguiente:

1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1

Es claro que si quiero saber cuantas unidades hay en esta tabla, el mismo resultado obtendré si á la primera línea horizontal de cuatro unidades voy agregando sucesivamente las otras dos, tambien de cuatro unidades cada una, lo que en otros términos quiere decir: si tomo las cuatro unidades tres veces, esto es, si multiplico 4 por 3; ó bien si considerando las cuatro líneas verticales de la tabla, compuesta cada una de tres unidades, agrego sucesivamente á las tres unidades de la primera línea las tres de cada una de las otras tres líneas; ó en otros términos, si tomo tres cuatro veces, á saber si multiplico 3 por 4.

La demostracion se hace general con advertir que cualquiera que sea el número de las unidades de los dos factores, siempre será posible formar una tabla análoga á la precedente, con la que se haria el mismo raciocinio.

*104. Escolio.—Decimos que no varia el valor del producto considerando los números en abstracto; pues si consideramos los factores como concretos, no hay duda que puede variar la especie del producto invirtiendo los factores. Darémos para mayor claridad los dos ejemplos siguientes: Supongamos, vg., que tengo que dar á 4 mozos 3 pesos á cada uno, es claro que multiplicando el número de pesos que he de dar á cada uno por el número de mozos, á saber 3 por 4, tengo por producto 12 pesos. Supongamos luego que quiero saber á cuantos mozos puedo dar de comer con 3 pesos, suponiendo que con un peso puedo dar de comer á 4 de ellos. En este caso fácilmente se comprende que multiplicando el número de mozos por el número de pesos, á saber 4 por 3, se tiene por producto 12 mozos. De todo esto se concluye que el valor numérico y abstracto del producto es siempre el mismo, á saber 12, sea que se multiplique 3 por 4, ó 4 por 3; pero si quiero saber su valor concreto y específico, esto es, si quiero conocer si son 12 mozos ó 12 pesos, entónces se tiene que examinar el valor concreto del verdadero multiplicando, cualquiera que sea el órden que se siguió en la operacion, pues el producto sigue la especie del multiplicando.

105. P. Considerando el valor de los factores, cuántos casos se pueden dar en la multiplicacion de los enteros?

R. Varios: 1.º puede proponerse el multiplicar un número dígito por otro dígito; 2.º un número compuesto por un dígito; 3.º un número dígito por uno compuesto; 4.º finalmente un número compuesto por otro compuesto.

106. P. Cómo se multiplica un número dígito por otro dígito?

R. Por medio de la tabla de multiplicacion. Así, $7\times8=56$.

107. P. Cómo se multiplica un número compuesto por uno dígito?

R. Se escribe el multiplicador dígito debajo de las unidades del multiplicando compuesto, y tirada una línea horizontal por debajo, se multiplica cada cifra del multiplicando por el multiplicador, empezando por las unidades sencillas y valiéndose de la tabla de multiplicacion: de los productos parciales solo se escriben las unidades debajo de la línea y de la cifra del multiplicando que les corresponde y se llevan con la mente las decenas para juntarlas al producto parcial siguiente; el último, sin embargo, se escribe por entero. Las cifras que quedan escritas debajo de la línea expresan el producto total.

Todo esto se ve aplicado en el siguiente ejemplo. Se debe multiplicar vg. 90572 por 4, escritos los factores y tirada la raya como aquí se ve:

```
  90572
      4
 ------
 362288
```

empiezo á multiplicar las unidades 2 del multiplicando por el multiplicador 4 diciendo, *dos por cuatro*, ó lo que es lo mismo, *cuatro por dos, ocho;* y como el producto parcial 8 no tenga decenas, lo escribo debajo de la raya y de las unidades del multiplicando. Paso luego á las decenas 7, y digo, 7 por 4, 28; escribo las unidades 8 debajo de la raya y de la cifra correspondiente del multiplicando, á saber, de las decenas, y llevo las dos decenas para juntarlas al producto siguiente. Multiplico, pues, las centenas 5 por 4, y al producto parcial 20 le agrego las 2 decenas que llevaba del producto anterior, lo que da 22; escribo las dos unidades debajo de la raya en el lugar correspondiente y llevo las dos decenas. Paso á los millares y digo, 4 veces cero, ó 4 veces nada es igual á nada ó á cero; y si no llevase nada del producto anterior, escribiria 0 debajo de la raya en su lugar correspondiente; pero como en este caso llevo 2 decenas, escribo 2, y nada llevo para el producto si-

guiente. Por último, multiplico las decenas de mil 9 por 4, y por no haber mas cifras en el multiplicando escribo por entero en su lugar el producto parcial 36, con lo que tengo un producto total de 362288.

*108. Demostracion.—La razon de esta regla consiste en que lo propio es tomar del tiro todo entero el multiplicando tantas veces como dice el multiplicador, como tomar primero tantas veces sus uninades, luego otras tantas sus decenas, luego el mismo número de veces sus centenas, y así en adelante, y reunir en una sola suma todos los productos parciales que van resultando. Esta segunda operacion de sumar los productos parciales, se hace abreviadamente escribiendo debajo de la raya y de la cifra correspondiente las unidades de cada producto parcial y juntando las decenas al producto siguiente. Lo mismo sucederia si se escribiesen por entero todos los productos parciales y luego se sumasen, como se ve en la siguiente figura:

90572	ó dejando los ceros	90572
4		4
8		8
280		28
2000		20
0000		0
360000		36
362288		362288

pero la operacion seria mucho mas larga.

Por esta misma razon de abreviar la suma de los productos parciales se empieza á multiplicar por la derecha y no por la izquierda; porque si se quisiese hacerlo así, seria indispensable escribir por entero todos los productes parciales, por no poderse llevar las decenas á otro producto parcial, como se ve en la figura que sigue:

90572	ó dejando los ceros	90572
4		4
360000		36
0000		0
2000		20
280		28
8		8
362288		362288

De todo esto aparece que la regla que hemos dado arriba (N. 107) no solamente es racional, sino mas breve que los demas métodos que pudieran practicarse.

109. P. Cómo se multiplica un número dígito por un número compuesto?

R. Como hemos visto ántes (N. 103 y 104), el valor abstracto ó numérico del producto no varia con invertir los factores; será, pues, mas breve en este caso tomar por multiplicando el número compuesto y por multiplicador el número dígito, y luego operar conforme á la regla precedente (N. 107).

Así, si tuviésemos que multiplicar el número 4 por 90572, invirtiendo el órden de los factores tendriamos $90572 \times 4 = 362288$.

* Téngase bien presente lo que dijimos en el N. 104, á saber: que aunque sea verdad que el valor abstracto ó numérico del producto no varie por la inversion de los factores; sin embargo, si queremos saber su especie en concreto, tenemos entónces, aun haciendo la inversion en la operacion, que examinar bien cual es el verdadero multiplicando.

110. P. Cómo se multiplica un número por 10, por 100, por 1000, ó en una palabra, por la unidad seguida de ceros?

R. Un número entero se multiplica por la unidad seguida de ceros con solo escribir á su derecha tantos ceros como hay en el multiplicador propuesto. Así, por ejemplo, $32 \times 10 = 320$; $3 \times 100 = 300$; $250 \times 1000 = 250{,}000$; $75 \times 10{,}000 = 750{,}000$.

*Demostracion.—La demostracion se deduce directamente del sistema de numeracion decimal (N. 45, 47); pues sabemos por éste que colocando una cifra á la derecha de otra, esta última vale diez veces mas, ó lo que es lo propio, se multiplica por diez; poniéndole á la derecha dos cifras valdria cien veces mas, y así en adelante. Luego colocar á la derecha de un número entero uno, dos, tres, etc., ceros, será lo mismo que multiplicar este número por 10, por 100, por 1000, etc., ó sea por la unidad seguida de tantos ceros como hay en el multiplicador; pues no solo la última cifra de la derecha, sino todas las demas que se le siguen á la izquierda, y de consiguiente todo el número queda multiplicado por dicho multiplicador. En efecto, si al número 32 agrego un cero á la derecha, resulta 320 en donde la cifra 2 expresa 2 decenas en lugar de 2 unidades; la cifra 3 que ántes expresaba 3 decenas, expresa ahora 3 centenas; de consiguiente, el valor relativo de cada cifra se multiplica por 10, ó en otros términos, todo el número queda multiplicado por 10. Este mismo raciocinio se puede

aplicar á cualquier número de ceros que se agregue á su derecha.

111. P. Cómo se multiplica un número entero cuando el multiplicador es compuesto de una cifra mayor que 1 seguida de ceros?

R. En este caso basta multiplicar el multiplicando por la cifra significativa del multiplicador, y luego agregar al producto tantos ceros cuantos hay en el multiplicador. La operacion se puede disponer como se ve en los ejemplos siguientes:

I.		II.	III.
472	multiplicando	2047	84036
40	multiplicador	500	80000
18880	producto	1023500	6722880000

*Demostracion.—Con esta regla se descompone implícitamente el multiplicador en dos factores, á saber: el primero es la cifra significativa de la izquierda de los ceros que se considera como expresando unidades, y el segundo es la unidad seguida de tantos ceros cuantos hay en el multiplicador propuesto. Luego multiplicando por la cifra significativa, se multiplica por un número tantas veces menor del verdadero cuanto es la unidad seguida de los ceros de multiplicador primitivo, de consiguiente el producto sale tambien tantas veces menor. Se obtiene, pues, el verdadero producto multiplicando este resultado por la unidad seguida de los ceros del multiplicador propuesto; ó lo que es lo mismo (N. 110), agregando al primer resultado tantos ceros cuantos habia en el multiplicador. Todo esto, como se ve, no altera en nada el producto buscado. Tomemos vg. el segundo ejemplo que hemos propuesto anteriormente, á saber: 2047×500, considerando que 500 es lo mismo que cinco veces ciento, lo resuelvo en los dos factores 5×100; multiplicando ahora 2047 por 5, multiplico por un número 100 veces menor del verdadero multiplicador, pues $500 = 5 \times 100$; el producto, pues, que resulta 10235 es tambien 100 veces menor del verdadero. Luego para reducirlo á su verdadero valor tengo que multiplicarlo por 100, ó lo que es lo propio, agregarle dos ceros, á saber: tantos ceros cuantos tiene el verdadero multiplicador propuesto 500, lo que da precisamente 1023500, como se ve en el ejemplo de arriba. Lo que decimos de éste puede aplicarse á todos los casos análogos.

112. P. Cómo se multiplica cuando ámbos factores son compuestos?

R. Cuando ámbos factores son compuestos, se escribe el multiplicador debajo del multiplicando, colocando las unidades, decenas, etc., debajo de las correspondientes unidades, decenas, etc., y tirada una línea horizontal por debajo, se multiplica todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador empezando por las unidades, lo que dará tantos productos parciales cuantas cifras tenga el multiplicador. Estos productos parciales se escriben uno debajo de otro, de manera que la primera cifra de la derecha del primero se coloca debajo de la columna de las unidades, la primera cifra del segundo debajo de las decenas, ó lo que es lo mismo, un lugar mas á la izquierda, y así de los demas. En seguida se tira otra línea horizontal por debajo, se suman los productos parciales, y la suma es el producto total que se busca.

Sea por ejemplo 6347×892, se escriben los factores uno debajo de otro, como aquí se ve:

6347	multiplicando
892	multiplicador
12694	productos parciales
57123	
50776	
5661524	producto total

luego se multiplica todo el multiplicando por las 2 unidades del multiplicador, como se hace cuando el multiplicador es dígito (N. 107), colocando la primera cifra 4 del producto parcial debajo de la raya y de la columna de las unidades, y las demas á su izquierda á medida que van saliendo. En seguida se multiplica del mismo modo todo el multiplicando por las 9 decenas del multiplicador, y el producto parcial 57123 se coloca debajo del primero 12694 á medida que van saliendo las cifras, y de manera que la primera cifra 3 de la derecha se coloque debajo de las decenas del primero, ó lo que es lo mismo, un lugar mas á la izquierda. Lo propio se practica con las 8 centenas del multiplicador, y debajo de los otros se escribe el tercer producto parcial 50776, colocando su primera cifra 6 un lugar mas á la izquierda de donde empieza el segundo. Finalmente se tira otra línea horizontal por debajo, se suman los tres productos parciales, y la suma 5,661,524 es el producto total que se queria hallar.

Examínese este otro ejemplo: