```
     45008
      2735
    ------
    225040
   135024
  315056
  90016
  ---------
  123096880
```

113. P. Qué se ha de hacer cuando en medio del multiplicador se encuentra uno ó mas ceros?

R. En este caso se suprime la multiplicacion del multiplicando por los ceros intermedios del multiplicador, cuidando sin embargo de retirar la primera cifra del producto parcial que sigue por otro guarismo significativo de tantos lugares mas hácia la izquierda, cuantos son los ceros seguidos en medio del multiplicador.

Véanse los ejemplos siguientes:

```
I.                    II.
834                   5306
509                   3007
----                  -----
7506                  37142
4170                 15918
------               -------
424506               15955142
```

En el primero de estos dos ejemplos, despues de haber escrito en su lugar el producto parcial 7506 del multiplicando por las unidades 9 del multiplicador, se descuida la multiplicacion por el cero del multiplicador, luego el producto parcial 4170 del multiplicando por las cinco centenas del multiplicador se retira de dos lugares hácia la izquierda, á saber, uno mas de lo que se haria si no hubiera el cero en el multiplicador.

En el segundo ejemplo se ve que el segundo producto parcial 15918 se retira tres lugares hácia la izquierda, á saber, dos lugares mas por causa de los dos ceros del multiplicador.

*114. Demostracion.—La razon fundamental de la regla de la multiplicacion de un número compuesto por otro compuesto consiste en que en esta operacion primero se toma el multiplicando tantas veces como son las unidades del multiplicador, luego tantas otras veces como son las decenas, luego las centenas, etc., del multiplicador, ó en otros términos, tantas veces como dice exactamente

el multiplicador; en seguida se suman todos estos productos parciales, y la suma representa, sin caber duda, el producto total.

Pero para entender el mecanismo de la regla obsérvese que primero se multiplica el multiplicando por las unidades del multiplicador, lo que se obtiene segun la regla del N. 107; luego para multiplicar por las decenas del multiplicador se dividen éstas implícitamente en dos factores, uno que consta de la cifra significativa de las decenas consideradas como unidades, y el otro la unidad seguida de un cero, ó sea 10 (N. 111); se multiplica efectivamente por el primero, ó sea por la cifra significativa; debiera, pues, para obtener el verdadero producto parcial por las decenas, multiplicarse ademas por 10, agregándole un cero (N. 110 y 111); mas lo propio se obtiene con solo retirar la primera cifra de la derecha de este producto parcial un lugar hácia la izquierda, porque de este modo se considera como expresando decenas, pues queda colocada debajo de las decenas del primer producto parcial, y se entiende suplido el cero que le falta á la derecha. Lo propio se hace con el producto parcial que sigue por las centenas y así con los demas.

Pudieran, no hay duda, escribirse por entero todos los productos parciales con todos sus ceros, como se ve en la figura que sigue, pero se suprimen por brevedad:

```
   6347   multiplicando      | y suprimiendo los ceros....6347
    892   multiplicador      |                             892
  ------                     |                           -----
  12694 }                    |                           12694
 571230 } productos parciales |                          57123
5077600 }                    |                         50776
 -------                     |                         -------
5661524   producto total      |                         5661524
```

De cualquier modo que se escriban los productos parciales con los ceros de la derecha ó sin ellos, el producto total es siempre el mismo. Pero entiéndase bien que cuando se multiplica el multiplicando 6347 por las decenas, no es por 9 como se ha de multiplicar sino por $90=9\times10$; y cuando se multiplica por las centenas no es 8 el multiplicador parcial, sino $800=8\times100$. Lo mismo se diria de los millares, etc., si los hubiese.

*115. De la demostracion antecedente se deduce como corolario la de la regla del N. 113, pues en ese caso no se hace sino suprimir los ceros que resultarian de multiplicar el multiplicando por los ceros intermedios del multiplicador; pues el producto de un

número cualquiera por cero no puede ser sino cero ó ceros. Ahora, como segun la regla se tiene cuidado de colocar la primera cifra del producto parcial que sigue en su lugar conveniente, no puede esto alterar en nada el producto total. Véanse las figuras siguientes:

5306	y suprimiendo los pro-	5306
3007	ductos de los ceros	3007
37142		37142
0000		15918
0000		15955142
15918		
15955142		

116. P. Si el multiplicador propuesto tuviese mas guarismos significativos que el multiplicando, ¿qué podria hacerse?

R. Pues que invertir el órden de los factores no altera el valor numérico del producto (N. 103 y 104), se puede para mayor brevedad tomar por multiplicando lo que es dado por multiplicador, y de este modo se abrevia la operacion por resultar ménos productos parciales, como se ve en las figuras siguientes. Sea por ejemplo 24×8472, tendrémos:

En órden directo	24	é invirtiendo los factores..	8472
	8472		24
	48		33888
	168		16944
	96		203328
	192		
	203328		

En ámbas operaciones resulta siempre el mismo producto, pero la segunda es mas corta.

Se dice en la pregunta, cuando el multiplicador propuesto tiene mas cifras *significativas* que el multiplicando; porque como segun el N. 113 y lo que se verá en el número siguiente, se supriman en la operacion los productos parciales de los ceros del multiplicador, éstos no han de entrar en la cuenta de la cifras significativas. Sea por ejemplo 348×40005, mas corto será en este caso hacer la operacion segun el órden propuesto, aunque el multiplicador parezca tener mas cifras, pues solo dos de ellas son significativas. Véanse las figuras siguientes:

Orden directo....	348	órden inverso..	40005
	40005		348
	1740		320040
	1392		160020
	13921740		120015
			13921740

117. P. En general, si uno ó ambos factores acaban en ceros, ¿qué abreviacion puede hacerse?

R. Se descuidan en la operacion los ceros finales, se empieza á multiplicar por el primer guarismo significativo de la derecha de cada factor, y se agregan á la derecha del producto total tantos ceros cuantos hay al fin de los dos factores juntos.

En la práctica se puede escribir la operacion como aquí se ve en los ejemplos que se proponen:

I.	II.	III.
154	5700	42500
4200	23	12000
308	171	850
616	114	425
646800	131100	510,000,000

*Demostracion.—Esta es análoga á la que dimos en los números 110 y 111, donde demostramos cómo se hace la multiplicacion cuando el multiplicador es la unidad seguida de ceros, ó una cifra mayor de la unidad tambien seguida de ceros. La presente regla no es mas que un corolario de aquellas; pero para mayor claridad acabarémos de demostrarlo parte por parte. Y primeramente, cualquiera que sea el multiplicador, si éste remata en ceros lo podremos siempre dividir en dos factores, uno representado por las cifras que hay hasta la primera significativa de la derecha inclusivemente, y el otro por la unidad seguida de tantos ceros cuantos hay al fin del multiplicador. Puesto esto, multiplicando el multiplicando por el primero de los dos factores, resulta un producto tantas veces menor del verdadero cuantas expresa el segundo; para que sea exacto, pues, se ha de multiplicar aún por éste, lo que se obtiene (N. 110) con solo añadir á su derecha tantos ceros cuantos hay despues de la unidad del segundo factor, ó lo que es lo mismo, al fin del multiplicador. Así, en el primero de los tres ejemplos propuestos, el multiplicador 4200 se divide implícitamente en 42×100, luego se multiplica 154 por el primero

42, y al resultado 6468 se agregan los dos ceros del segundo, lo que da por verdadero producto 646800.

Si el multiplicando es el que remata en ceros, se puede asimismo suponer dividido en dos factores análogos á los que decimos del multiplicador. Multiplicando, pues, el primero por el multiplicador resulta un producto tanto menor del verdadero cuanto lo es el segundo de esos dos factores; se obtendrá, pues, el producto exacto multiplicando por el segundo, ó en otros términos, agregando á su derecha tantos ceros cuantos hay al fin del multiplicando. Así, en el segundo ejemplo propuesto arriba dividimos implícitamente el multiplicando 5700 en 57×100, multiplicamos el primer factor 57 por 23, y al producto 1311 agregamos los dos ceros de 100, y tenemos por producto exacto 131100.

* Si ámbos factores rematan en ceros, los podemos suponer divididos cada uno en dos factores análogos á los de que hemos hablado arriba. Multiplicando, pues, el primer factor del multiplicando por el primero del multiplicador y agregando al producto que resulta los ceros finales del multiplicador, no hay duda que multiplicamos el primer factor del multiplicando por todo el multiplicador; pero de este modo éste segundo producto que resulta aun no es exacto, sino tanto menor del verdadero cuanto es el segundo factor del multiplicando que hemos descuidado, pues no hemos multiplicado todo el multiplicando, sino un multiplicando tanto menor del verdadero cuanto es su segundo factor en que lo hemos dividido. Luego para obtener un producto exacto se ha de multiplicar aún por ese segundo factor que queda, ó lo que es lo mismo, se han de agregar á la derecha tantos ceros cuantos son los ceros finales del multiplicando. Así, en el tercer ejemplo propuesto dividimos implícitamente los dos datos 42500×12000 en estos otros $(425\times100)\times(12\times1000)$. Luego multiplicamos 425 por 12, y al producto 5100 agregamos primero los tres ceros finales del multiplicador y ademas los dos ceros finales del multiplicando, á saber, todos los ceros finales de los dos factores juntos, y tenemos por producto verdadero el número 510,000,000.

118. P. Cómo se hace la multiplicacion cuando los factores propuestos son mas de dos?

R. Se multiplica el primero por el segundo, luego el producto que resulta por el tercero, este nuevo producto por el cuarto, y así sucesivamente hasta concluir, advirtiendo que no se altera el producto total con invertir el órden de los factores. Así, si se tuviese por ejemplo 4 multiplicado por 3 multiplicado por 5, ó lo que es lo

mismo $4\times3\times5$, se multiplicaria 4 por 3, y el producto 12 por 5, y se tendria por producto total 60. Si fuese $47\times540\times673\times289$, multiplicaria 47 por 540; luego el producto 25380 por 673; en seguida el producto 17.080,740 por el factor que queda 289, con lo que se obtendria el producto total 4,936.333,860.

* Ocurre á veces, como se verá mas adelante, multiplicar un número por varios factores: este caso no presenta dificultad en la práctica, como lo indican los ejemplos precedentes. Sin embargo, como la regla que damos tenga mucha mas importancia de lo que aquí aparezca, vamos á dar su demostracion.

En el primer ejemplo propuesto $4\times3\times5$, tenemos que multiplicar el primer factor 4 por 3 multiplicado por 5, lo que puede expresarse con estas señales $4\times(3\times5)$. Multiplicando, pues, 4 por 3, el producto $4\times3=12$ es demasiado chico, á saber, 5 veces mas pequeño que el verdadero; pues el factor 4 hase de multiplicar no por 3, sino por 5 veces 3. Para tener, pues, el verdadero producto tenemos que hacer el producto $4\times3=12$ cinco veces mas grande á saber, multiplicarlo todavía por 5; luego $(4\times3)\times5=12\times5=60$ es el producto buscado.

Si los factores fuesen cuatro, por ejemplo, $4\times3\times5\times6$, la demostracion seria la misma; pues luego que se ha obtenido el producto de los tres primeros, que es $60=12\times5$, vemos que este producto es todavía 6 veces menor del verdadero; pues el 12 no se debe multiplicar solo por 5, sino por 6 veces 5; luego $12\times5=60$ se ha de multiplicar todavia por 6; luego $60\times6=360$ es el producto verdadero.

Por ser $60=4\times3\times5$ tenemos estas expresiones iguales $4\times3\times5\times6=(4\times3\times5)\times6$; y por lo mismo puede verse que $(4\times3)\times(5\times6)$, $4\times(3\times5\times6)$ son todas expresiones iguales.

Un raciocinio análogo se haria si fuesen otros ó mas los factores; luego queda demostrada la primera parte de la regla.

Solo nos queda que demostrar la segunda, esto es, la advertencia de que no se altera el producto, cualquiera que sea el órden que se siga en la multiplicacion de los factores. Esto es verdad, con tal que en la multiplicacion no se deje ninguno de ellos. Pasemos, pues, á la prueba, tomando el primer ejemplo de la regla. Hemos visto arriba que $4\times3\times5$ es igual á $4\times(3\times5)$; invirtiendo, pues, los factores que están dentro del paréntesis, lo que ciertamente puede hacerse por el N. 103, tenemos $4\times(3\times5)=4\times(5\times3)$, lo que, quitando el parentesis, resulta igual á $4\times5\times3$. En la expresion igual que tenemos tambien arriba $(4\times3)\times5$ invir-

tiendo los factores del paréntesis tenemos $(3\times4)\times5=3\times4\times5$. Luego por una observacion análoga á la de arriba $3\times4\times5=3\times(4\times5)$, é invirtiendo los factores del paréntesis, tenemos $3\times(5\times4)=3\times5\times4$. La expresion $3\times(5\times4)$ podemos considerarla como el producto de los dos factores 3 por una parte, y $5\times4=20$ por otra; en efecto, $3\times(5\times4)=3\times20$; invirtiendo, pues, el órden de los dos factores tenemos $20\times3=(5\times4)\times3=5\times4\times3$. Por último, en la expresion de arriba $4\times(5\times3)$ invirtiendo los dos factores tenemos $(5\times3)\times4=5\times3\times4$. Luego las seis expresiones siguientes:

$$4\times3\times5$$
$$4\times5\times3$$
$$3\times4\times5$$
$$3\times5\times4$$
$$5\times4\times3$$
$$5\times3\times4$$

que son las únicas posibles con tres factores colocados en órden diferente, son todas equivalentes: haciendo, pues, con ellas la operacion segun la regla, todas deben dar el mismo resultado, que en este caso particular es 60.

Si los factores fuesen cuatro, por ejemplo $4\times3\times5\times6$, las expresiones equivalentes $(4\times3\times5)\times6$, $(4\times3)\times(5\times6)$, $4\times(3\times5\times6)$, con invertir los factores que están dentro de los paréntesis, ó los paréntesis mismos, nos proporcionarian el modo de combinar los factores $4\times3\times5\times6$ de todos los modos posibles sin alterar nunca el producto.

Raciocinios análogos pueden extenderse á cualquier número de factores; luego queda demostrada generalmente la segunda parte de la regla.

119. P. Cuáles son los usos de la multiplicacion?

R. Se pueden reducir á tres: 1.º sirve la multiplicacion para hacer una cantidad un cierto número de veces mayor: 2.º para conocer el valor de muchas unidades de la misma especie, cuando ya se conoce el valor de una; y 3.º para reducir, tratándose de números concretos y complexos, las unidades superiores á inferiores.

120. P. Qué se entiende por unidades *superiores* é *inferiores?*

R. Las *superiores* son las mayores, ó las que tienen mayor valor relativamente á otras del mismo género; y las *inferiores* son las menores, ó las que tienen menor valor. Así, las libras vg. son unidades superiores relativamente á las onzas ó á los adarmes, que

son inferiores; y las mismas libras son inferiores relativamente á las arrobas. Consúltense las tablas de los complexos que ponemos en el capítulo XV.

121. P. Dadme algunos ejemplos de los tres usos de la multiplicacion.

R. Sean los siguientes:

1.º Se ha construido un barco que carga 25 toneladas, ¿cuántas cargará un barco que sea 13 veces mayor? En este problema se ve que no hay sino tomar las 25 toneladas del primero 13 veces, ó lo que es lo mismo, multiplicar 25 por 13, y el producto 325 dice las toneladas que carga el barco 13 veces mayor.

2.º Sabiendo que una vara de paño cuesta 26 reales, se quiere seber cuanto costarán 15 varas del mismo paño. Se resolverá el problema tomando el precio de una vara tantas veces cuantas son las varas que se van á coger, ó lo que es lo propio, se han de multiplicar 26 reales por 15, y el producto 390 son los reales que cuestan las 15 varas.

3.º Se quieren reducir 12 arrobas á libras, ó en otros términos, se quiere saber cuantas libras hay en 12 arrobas. Como cada arroba contiene 25 libras, se multiplicarán las 25 libras por el número de arrobas 12, y el producto 300 son las libras que hay en 12 arrobas.

Propuesto el problema de este modo no ofrece dificultal; pero si entre la especie de unidades superiores que se reducen, y las inferiores á las que se han de reducir, hubiese otra ú otras especies intermedias, entónces puede resolverse el problema de dos modos. Supongamos por ejemplo que se quiere saber cuantas onzas hay en 12 arrobas. En este caso pueden del tiro reducirse las arrobas á onzas, viendo primero que 400 son las onzas de una arroba, ó por medio de la multiplicacion, ó por medio de las tablas de números complexos, que pueden consultarse en el capítulo XV, y multiplicando 400 por 12 tenemos 4800 por producto, que son las onzas que hay en 12 arrobas. El otro modo de resolverlo seria reducir primero las 12 arrobas á libras, y las 300 libras, que son el resultado, reducirlas á onzas multiplicándolas por 16, lo que daria el mismo resultado de arriba, á saber, 4800 onzas.

Este segundo método, sin embargo, es indispensable cuando se trata de reducir un número complexo á una de sus especies inferiores; porque entónces es preciso ir agregando á los productos que salen las unidades intermedias que haya, como se ve en el ejemplo que sigue. Se quieren reducir 215 arrobas, 20 libras, 5 onzas y

7 adarmes á adarmes. Se dispone la operacion como aquí se ve:

I.		II.	
215	arrobas	215	arrobas
25		25	
1075		1075	
430		430	
5375	libras	20	
20		5395	libras
5395	libras	16	
16		32370	
32370		5395	
5395		5	
86320	onzas	86325	onzas
5		16	
86325	onzas	517950	
16		86325	
517950		7	
86325		1381207	adarmes
1381200	adarmes		
7			
1381207	adarmes		

ó bien mas corto....

En la primera de estas operaciones se reducen primero las 215 arrobas á libras multiplicándolas por 25, y al producto 5375 se le agregan las 20 libras que hay; luego la suma 5395 libras se reduce á onzas multiplicándola por 16, y se agregan al producto 86320 las 5 onzas que hay; por último, se reduce la suma 86325 onzas á adarmes multiplicando de nuevo por 16, al producto 1381200 se le agregan los 7 adarmes que quedan, y 1381207 son los adarmes que tiene el número complexo propuesto.

En la segunda operacion se hacen las mismas reducciones con la diferencia que en lugar de sumar los productos parciales de cada reduccion, y al producto total agregar las unidades que hay en el número complexo de esa misma especie; ántes de hacer la suma se escriben debajo de los productos parciales dichas unidades de la misma especie y luego se suma todo junto, lo que ahorra algunas adiciones dejando á la operacion toda la claridad necesaria.

Del mismo modo se practica en los casos análogos.

122. P. Qué prueba puede hacerse de la multiplicacion?

R. Ademas de rehacer la operacion, se puede hacer otra multiplicacion invirtiendo el órden de los factores, pues esta inversion no altera el valor numérico del producto (N. 103, 104). Mas adelante indicarémos otras pruebas.

CAPITULO VIII.

DE LA DIVISION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

123. P. Qué cosa es la *division?*

R. La *division*, que algunos llaman tambien *particion*, es una operacion de aritmética por medio de la cual se busca cuantas veces un número cabe en otro.

124. Escolio.—Para averiguar cuantas veces un número cabe en otro podria restarse el primero del segundo, y tantas veces como se pudiese repetir la sustraccion, otras tantas serian las veces que uno cabe en el otro. Así, si quiero averiguar cuantas veces el 4 cabe en el 12, empiezo á restar 4 de 12 y tengo la resta 8, de ésta resto otra vez el 4 y tengo por resta 4, restando de esta última resta otra vez el 4 tengo 0 por diferencia, señal que no hay mas que restar; y como tres son las sustracciones que he efectuado, concluyo que 4 cabe 3 veces en 12. Operando de este modo la division no difiere en nada de la sustraccion; pero como esta operacion seria generalmente larga y engorrosa, la necesidad hizo pensar en abreviarla, que es lo que vamos á indicar con las reglas de la division que vamos á proponer. De suerte que la division puede muy bien llamarse una sustraccion abreviada.

125. P. Cuales son los términos de la division?

R. Son tres, el *dividendo*, que es el número dato que contiene á otro; el *divisor* que es el otro dato contenido en el dividendo, y el *cociente* que es el resultado de la division, ó sea aquel número que indica cuantas veces el divisor cabe en el dividendo.

126. P. Cuáles son las signos de la division?

R. De dos modos puede indicarse la division: 1.º con dos puntos, uno sobre otro, puestos entre el dividendo y el divisor: 2.º colocando el divisor debajo del dividendo con una línea horizontal en medio que los separe; el signo de igualdad precede al cociente

011158