7 adarmes á adarmes. Se dispone la operacion como aquí se ve:

I.		II.	
215	arrobas	215	arrobas
25		25	
1075		1075	
430		430	
5375	libras	20	
20		5395	libras
5395	libras	16	
16		32370	
32370		5395	
5395		5	
86320	onzas	86325	onzas
5		16	
86325	onzas	517950	
16		86325	
517950		7	
86325		1381207	adarmes
1381200	adarmes		
7			
1381207	adarmes		

ó bien mas corto....

En la primera de estas operaciones se reducen primero las 215 arrobas á libras multiplicándolas por 25, y al producto 5375 se le agregan las 20 libras que hay; luego la suma 5395 libras se reduce á onzas multiplicándola por 16, y se agregan al producto 86320 las 5 onzas que hay; por último, se reduce la suma 86325 onzas á adarmes multiplicando de nuevo por 16, al producto 1381200 se le agregan los 7 adarmes que quedan, y 1381207 son los adarmes que tiene el número complexo propuesto.

En la segunda operacion se hacen las mismas reducciones con la diferencia que en lugar de sumar los productos parciales de cada reduccion, y al producto total agregar las unidades que hay en el número complexo de esa misma especie; ántes de hacer la suma se escriben debajo de los productos parciales dichas unidades de la misma especie y luego se suma todo junto, lo que ahorra algunas adiciones dejando á la operacion toda la claridad necesaria.

Del mismo modo se practica en los casos análogos.

122. P. Qué prueba puede hacerse de la multiplicacion?

R. Ademas de rehacer la operacion, se puede hacer otra multiplicacion invirtiendo el órden de los factores, pues esta inversion no altera el valor numérico del producto (N. 103, 104). Mas adelante indicarémos otras pruebas.

CAPITULO VIII.

DE LA DIVISION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

123. P. Qué cosa es la *division?*

R. La *division*, que algunos llaman tambien *particion*, es una operacion de aritmética por medio de la cual se busca cuantas veces un número cabe en otro.

124. Escolio.—Para averiguar cuantas veces un número cabe en otro podria restarse el primero del segundo, y tantas veces como se pudiese repetir la sustraccion, otras tantas serian las veces que uno cabe en el otro. Así, si quiero averiguar cuantas veces el 4 cabe en el 12, empiezo á restar 4 de 12 y tengo la resta 8, de ésta resto otra vez el 4 y tengo por resta 4, restando de esta última resta otra vez el 4 tengo 0 por diferencia, señal que no hay mas que restar; y como tres son las sustracciones que he efectuado, concluyo que 4 cabe 3 veces en 12. Operando de este modo la division no difiere en nada de la sustraccion; pero como esta operacion seria generalmente larga y engorrosa, la necesidad hizo pensar en abreviarla, que es lo que vamos á indicar con las reglas de la division que vamos á proponer. De suerte que la division puede muy bien llamarse una sustraccion abreviada.

125. P. Cuales son los términos de la division?

R. Son tres, el *dividendo*, que es el número dato que contiene á otro; el *divisor* que es el otro dato contenido en el dividendo, y el *cociente* que es el resultado de la division, ó sea aquel número que indica cuantas veces el divisor cabe en el dividendo.

126. P. Cuáles son las signos de la division?

R. De dos modos puede indicarse la division: 1.º con dos puntos, uno sobre otro, puestos entre el dividendo y el divisor: 2.º colocando el divisor debajo del dividendo con una línea horizontal en medio que los separe; el signo de igualdad precede al cociente

011158

del modo siguiente: $12 : 4 = 3$, ó bien $\frac{12}{4} = 3$, y se lee en ambos casos *doce dividido por cuatro es igual á tres*, en donde 12 es el dividendo, 4 el divisor, y 3 el cociente.

127. P. Cuántos casos se pueden distinguir en la operacion de la division?

R. Tres: 1.º cuando se trata de dividir un número que no tenga mas de dos guarismos por un divisor dígito que sea mayor que el guarismo de las decenas del dividendo, si las tiene.

2.º Cuando el dividendo es compuesto y el divisor dígito, pero no con la condicion del primer caso.

3.º Cuando el dividendo y divisor son ambos compuestos.

128. P. Cómo se parte en el primer caso?

R. Cuando el dividendo no pasa de dos cifras, y el divisor es dígito y mayor que la cifra de las decenas que haya en el dividendo, la sola tabla pitagórica bien sabida es suficiente para buscar el cociente sin escribir nada en la operacion. Se considera, pues, el dividendo como un producto, el divisor como un factor y se busca por medio de la tabla el otro factor que viene á ser en este caso el cociente. Sea vg. $56 : 8$, la tabla me dice que $8 \times 7 = 56$, concluyo luego que 7 es el cociente que busco.

Demostracion.—El cociente indica cuantas veces el dividendo contiene al divisor (N. 124); es claro, pues, que si se toma el divisor tantas veces como dice el cociente, debe dar por resultado el dividendo: luego el dividendo se puede considerar como un verdadero producto del divisor por el cociente, el divisor como un factor, y el cociente, que se busca, como el otro factor. De consiguiente, la operacion de la division se reduce aquí á buscar el segundo factor, á saber, un número tal que si por él se multiplica el divisor, el producto sea el dividendo, y esto se conoce en este caso fácilmente por medio de la tabla pitagórica, como se ve por el ejemplo que hemos dado en la regla.

Escolio.—Decimos en la regla que el divisor dígito debe ser mayor en su valor absoluto que la cifra de las decenas del dividendo, si las tiene; pues si el divisor fuese igual ó menor de la cifra de las decenas del dividendo, no podria resolverse el problema por la sola tabla pitagórica, no encontrándose en este caso ningun otro factor dígito en la tabla que sirviendo de multiplicador del divisor dé por producto el dividendo. Y la razon intrínseca de esto consiste en el que para obtener en el producto un número de decenas igual por lo ménos al factor dígito propuesto, no puede éste multiplicarse por un factor menor de 10. Sea, por ejemplo,

$84 : 6$, como el divisor 6 es menor que la cifra 8 de las decenas, no es posible encontrar en la tabla un factor dígito por el que multiplicado el 6 dé por resultado 84; en efecto, 9 que es el mayor número dígito no basta, pues $6 \times 9 = 54$. Este caso está incluido en la regla siguiente.

129. P. Pero si en este caso el dividendo no contiene exactamente al divisor y deja una resta, ¿qué se ha de hacer?

R. Si el dividendo no contiene exactamente al divisor, se toma por cociente el factor que dé con el divisor el producto inferior mas aproximado al dividendo propuesto, y al lado del cociente se escribe la diferencia que hay entre este producto y el dividendo, con el divisor por debajo en forma de una division indicada, precedidos, ó no, del signo mas. Así, si tuviese que partir 37 por 5, veo que el cociente se halla entre 7 y 8, mas como $5 \times 8 = 40$ es demasiado grande, tomaré 7, y el producto 35 lo resto de 37, y la diferencia 2 la escribo á su lado con el divisor, como sigue: $37 : 5 = 7 + \frac{2}{5}$, ó bien $\frac{37}{5} = 7\frac{2}{5}$; lo que por ahora leeremos, 37 *dividido por* 5 *es igual á* 7 *mas dos dividido por cinco.*

La resta 2 dividida por cinco, no pudiendo dar una unidad porque no puede contener el 5 ni una vez, es lo que se llama un quebrado. Verémos mas adelante cómo se lee y cómo se avalua. Del mismo modo se escriben las restas en los demas casos cuando ocurran.

130. P. Cómo se divide un número compuesto por un número dígito?

R. Cuando el dividendo es compuesto de dos guarismos, y el de las decenas en su valor absoluto es igual ó mayor del divisor dígito, ó bien cuando el dividendo es compuesto de mas de dos guarismos, se escribe el divisor al lado del dividendo, separándolo con una raya vertical; otra raya horizontal se tira por debajo del divisor; luego se separa con una coma la primera cifra, ó las dos primeras de la izquierda del dividendo cuando una no baste para contener al divisor lo ménos una vez, y se divide este dividendo parcial por el divisor, á saber: se ve por medio de la tabla pitagórica cuantas veces el divisor cabe en él, y el cociente parcial que resulta se escribe debajo del divisor; luego se multiplica el divisor por el cociente y el producto se escribe debajo del dividendo parcial, del cual se resta, colocando la diferencia debajo del producto, si la hay. Se baja en seguida al lado de la resta la cifra que sigue en el dividendo, separándola ademas en el mismo dividendo con una coma, y esta cifra unida á la resta forma otro dividendo par-

cial, que se parte de nuevo por el divisor, y se coloca el cociente parcial que resulta á la derecha del otro. Se vuelve á multiplicar el divisor por este segundo cociente parcial, y el producto se resta de su dividendo parcial respectivo. Y así se sigue bajando otra cifra del dividendo, y haciendo las mismas operaciones hasta que no quede ya ningun guarismo que bajar en el dividendo. Los guarismos escritos debajo del divisor dan el cociente total. Si quedase al fin una resta, se escribiria al lado del cociente, como se dijo en el caso primero (N. 129) con el divisor por debajo.

Todo esto se ve claro en los ejemplos siguientes. Sea el número 84 que deba partirse por 6, escribo los datos como aquí se ve:

```
Dividendo... 8,4 | 6 divisor
              6  |
             ——  |
             24  | 14 cociente
             24
             ——
              0
```

separo con una coma la primera cifra de la izquierda del dividendo 8, y digo 6 en 8 cabe una vez ([a]), escribo 1 debajo de la raya del divisor, que es el lugar del cociente, multiplico el divisor 6 por 1, escribo el producto 6 debajo del dividendo parcial 8, hago la sustraccion, y pongo por debajo de una raya la resta 2; al lado de ésta bajo la otra cifra del dividendo 4, y digo 6 en 24 cabe 4 veces, escribo 4 en el cociente á la derecha del 1, multiplico el divisor 6 por este otro cociente parcial 6, y resto el producto 24 del dividendo parcial 24, lo que da 0 por diferencia. Si hubiese otra cifra en el dividendo, la bajaria al lado del cero, y ésta seria el nuevo dividendo parcial que seguiria partiendo por el divisor 6; pero como no hay mas y no hay resta que poner, concluyo que 14 es el cociente total que buscaba.

Examínese este otro ejemplo:

([a]) Hay quien dice tambien 8 *repartido entre* 6, ó simplemente 8 *entre* 6 *es igual á* 1. Esta expresion no es mala, aunque como para repartir 8 entre 6 es preciso observar cuantas veces el 6 cabe en el 8, la expresion que adoptamos nos parece preferible. Las siguientes expresiones que algunos no dejan de usar, á saber 8 *entre* 6 *les cabe á uno*, ó bien esta otra, 4 *entre* 5 *no les cabe*, no tienen sentido lógico ni gramatical, pues segun el diccionario de la Academia *caber* significa *ser contenido*.


```
Dividendo 13,4,2,7,3 | 5          divisor
          10         |————————
          —          | 26854+3/5 cociente
           34
           30
           —
            42
            40
            —
             27
             25
             —
              23
              20
              —
               3
```

En este ejemplo se observa que, siendo la primera cifra 1 de la izquierda del dividendo menor del divisor 5, se ha de coger por primer dividendo parcial 13, y por quedar 3 de resta al fin de la operacion, se escribe ésta al lado de la parte entera del cociente con el divisor 5 por debajo.

*131. Demostracion.—Hemos visto (N. 128) que el dividendo se puede considerar como un producto que tiene por factores el divisor y el cociente, y que conociendo un factor, á saber el divisor, por medio de la division buscamos el otro, á saber el cociente. Bajo este respecto, la division no es sino una descomposicion en sus productos parciales del producto total, que se supone haber sido formado por la multiplicacion. Si estos productos parciales fuesen señalados clara y distintamente en el dividendo, la operacion seria muy fácil; pues en el caso que consideramos la sola tabla pitagórica nos hiciera conocer inmediatamente los diferentes cocientes parciales, cualesquiera que fuesen, unidades, decenas, ú otra cosa; y entónces seria indiferente empezar la operacion por la izquierda ó por la derecha. Pero en la multiplicacion se suman los productos parciales, y de este modo las decenas de un producto inferior pasan á unirse con las unidades del producto superior siguiente: de aquí resulta la oscuridad y la necesidad de ocurrir al artificio de que nos valemos para buscar los cocientes parciales.

Empezamos, pues, á coger á la izquierda del dividendo una ó dos cifras, á saber, cuanto basta para contener una vez por lo ménos al divisor: pues si esta parte que separamos con una coma, fuese menor que el divisor, no podria expresar tampoco el producto parcial del divisor por la primera cifra de la izquierda del

cociente, que debe ser significativa. En efecto, la menor cifra significativa es 1, y el divisor multiplicado por 1 da por resultado el mismo divisor, pero nunca un producto menor que él. Este primer dividendo parcial que cogemos debe, pues, contener necesariamente el producto parcial del divisor por la primera cifra de la izquierda del cociente, y ademas, si hay alguna resta, las decenas que en la adicion de los productos parciales se llevaron del producto anterior.

Se examina luego por medio de la tabla pitagórica cuantas veces el divisor cabe en este primer dividendo parcial, y lo que resulta es la primera cifra de la izquierda del cociente, y que se escribe en su propio lugar. Luego multiplicamos por ella el divisor, y el producto lo restamos del dividendo parcial. Si no hay diferencia, es señal de que el dividendo parcial cogido no contiene mas que ese producto parcial de la precedente multiplicacion; pero si hay resta, esas unidades son las decenas que se llevaron y que pertenecen al producto parcial siguiente: se unen, pues, á la cifra que sigue y que se baja del dividendo al lado de esta misma resta, y todo junto forma el segundo dividendo parcial.

Este contiene á su vez necesariamente el producto parcial del divisor por la segunda cifra de la izquierda del cociente, y á veces una resta que proviene de las decenas que se llevaron del producto parcial precedente. Se hace, pues, la misma operacion que ántes, á saber, se busca por medio de la tabla pitagórica la segunda cifra del cociente y se coloca en su lugar; se resta del segundo dividendo parcial el producto del divisor por ella, y se escribe la resta, si hay, en su lugar, y así se prosigue hasta que no hay más cifras que bajar en el dividendo.

De este modo se obtiene cifra por cifra toda la parte entera del cociente. Si al fin de la operacion no queda ninguna resta, es señal de que el cociente es un número entero: mas si queda alguna, no pudiendo ésta provenir de las decenas que se llevan de otro producto, pues no representa decenas sino unidades, se concluye entónces que ademas de la parte entera del cociente hay en él otra menor de la unidad, a saber, un quebrado, que multiplicado por el divisor da un producto menor que el divisor mismo, aunque formado de algunas unidades que se agregaron al último producto parcial entero. Pero como hemos de tratar de los quebrados en su propio lugar, por esto nos contentamos con decir en la regla como se ha de escribir y leer esta resta por lo pronto.

El encontrarse á veces incorporadas en un dividendo parcial las

decenas que se llevaron del producto parcial precedente, dice la razon por qué se empieza la operacion por la izquierda; pues de otro modo no pudieran separarse por medio de la sustraccion las decenas que sobran de los dividendos parciales, ni conocerse cuales son los verdaderos cocientes parciales.

*132. Corolario.—De la explicacion que hemos dado del mecanismo de la regla se infiere que aun ántes de hacer la operacion se puede conocer cuantas son las cifras que han de salir en el cociente; pues el primer dividendo parcial de la izquierda debe dar una, y luego como cada cifra que se baja del dividendo da tambien una, deberán salir tantas cuantas son las cifras que quedan del dividendo total despues del primer dividendo parcial mas una.

*133. Aunque la demostracion que hemos dado sea bastante clara, sin embargo servirá para mejor convencerse examinar la figura siguiente:

```
Multiplicando..........  4758
Multiplicador..........     8
                        ------
                        ( 64
Productos parciales.....( 40
                        ( 56
                        ( 32
                        ------
Producto total y dividendo  38,0,6,4 | 8      divisor
                            32       |------
                            --       | 4758  cociente
                             60
                             56
                             --
                              46
                              40
                              --
                               64
                               64
                               --
                                0
```

Esta figura representa dos operaciones contrarias, la primera es la multiplicacion de 4758 por 8, con la que se compone el producto 38064, y la otra es la division, con la que se descompone este mismo producto considerado como dividendo por el multiplicador 8 considerado como divisor, y que da por cociente el otro factor, á saber, el multiplicando 4758.

En la division se ve que el primer dividendo parcial de la iz-

quierda 38 (que son millares) es compuesto del producto parcial de los 4 millares del factor 4758 por el factor 8, á saber, 32 millares, mas otros 6 millares, que provienen de las decenas que se le agregaron con la adicion de los productos parciales anteriores, esto es, 5 decenas del producto 56, y otra decena proveniente de la adicion de las 4 decenas del producto 40 y de las 6 unidades del producto 56. Restando, pues, el producto parcial 32 del primer dividendo 38 resultan por resta las 6 decenas que se le agregaron. Bajando á su lado el cero del dividendo total tenemos el segundo dividendo parcial 60 compuesto del producto parcial 56 mas las 4 decenas que se le agregaron del producto parcial 40. El tercer dividendo parcial 46 es compuesto del producto parcial 40 mas las 6 decenas del producto anterior 64; finalmente, el último dividendo parcial 64, conteniendo exactamente el producto parcial 64, nada deja de resta.

134. P. Cuando el divisor no cabe en alguno de los dividendos parciales que van saliendo en la operacion, ¿qué se debe hacer?

R. Cuando el divisor no cabe en un dividendo parcial, se pone cero en el cociente, y al lado del mismo dividendo se baja la cifra siguiente del dividendo total, y se divide todo por el divisor; pero si ni aun así cupiese el divisor, se escribiria otro cero en el cociente, y se bajaria otra cifra, y así en adelante hasta que quepa, y si no quedase mas cifra que bajar, se escribiria la resta al lado del cociente con el divisor por debajo. Véanse los ejemplos siguientes:

I.

```
49,5,6 | 7
49     |----
—      | 708
 056
  56
  —
   0
```

II.

```
64,0,7 | 8
64     |-------
—      | 800+7/8
 007
```

En el primero de estos ejemplos despues de haber escrito 7 en el cociente, y restado el producto 49, al lado de la diferencia 0 bajo el 5; pero como 7 no cabe en 5, escribo 0 en el cociente, y bajo la otra cifra 6 al lado del 5: luego divido 56 por 7, hago las demas operaciones, y como no hay resta, 708 es el cociente total.

En el segundo despues de haber restado 64, bajo al lado de la resta 0 la otra cifra 0 del dividendo total; pero como los dos ceros no contienen el divisor, escribo 0 en el cociente y bajo la cifra 7 del dividendo; mas como los ceros de la izquierda no tienen valor, y 7 es menor del divisor 8, pongo otro cero en el cociente, y por no haber mas cifras que bajar pongo al lado del cociente total el quebrado $\frac{7}{8}$.

*135. Demostracion.—Cuando despues de bajada una cifra del dividendo total el dividendo parcial que resulta no contiene al divisor, es una prueba que en el cociente no hay cifra significativa correspondiente, sino cero: pues el divisor multiplicado por la menor cifra significativa, que es 1, debe dar por producto, y en nuestro caso por dividendo parcial por lo ménos una cantidad igual al divisor. De otra parte la cifra significativa que puede tener á veces el dividendo parcial menor del divisor proviene en este caso de las decenas que se llevaron del producto anterior. Por esto despues de haber escrito cero en el cociente se considera con razon este dividendo parcial como una resta que queda de decenas, al lado de las que se baja la otra cifra del dividendo total para formar el dividendo parcial siguiente. Cuando no quedan mas cifras que bajar en el dividendo total, entónces esta resta no pudiendo provenir de otro producto del divisor por otra cifra significativa de la parte entera del cociente, proviene necesariamente del producto del divisor por una cantidad menor de la unidad, á saber por un quebrado; de consiguiente despues de haber escrito cero en el cociente se escribe á su lado la resta con el divisor por debajo, como se ve en el segundo ejemplo propuesto en el número antecedente.

136. P. Será siempre necesario escribir los productos del divisor por los cocientes parciales, y las restas debajo del dividendo?

R. Siendo muy fácil la division cuando el divisor es un número dígito, bastará, como uno haya adquirido un poco de práctica, escribir el cociente solamente, haciendo con la mente las demas operaciones.

Advertimos ademas que no debe un principiante pasar adelante ántes que sepa hacer de este modo la operacion.

137. P. Cómo se parte un número compuesto por otro compuesto?

R. Se sigue una regla análoga á la que dimos por el segundo caso (N. 130), á saber: se escribe el dividendo y divisor con las rayas necesarias; se separan con una coma á la izquierda del dividendo tantas cifras cuantas bastan para contener lo ménos una vez el divisor; se ve cuántas veces el divisor cabe en este primer dividendo parcial, y se escribe el cociente parcial que sale en su propio lugar. Luego se multiplica todo el divisor por el guarismo hallado del cociente, se escribe el producto debajo del dividendo parcial, se