hace la sustraccion, y se pone la resta debajo de una raya. Despues se baja la cifra siguiente del dividendo total al lado de la resta, y se hacen con este nuevo dividendo parcial las mismas operaciones que con el primero; y así se prosigue hasta que no haya mas cifras que bajar en el dividendo total, y si queda una resta, se escribe el quebrado que resulta al lado del cociente total.

Si alguno de los dividendos parciales no contiene el divisor, se pone un cero en el cociente, y se baja otra cifra del dividendo total, si la hay, ó si no, se pone la resta que quede al lado del cociente total, cuando esta tenga alguna cifra significativa, como se dijo ántes.

138. P. Cuando no se puede conocer á primera vista el número de veces que cabe el divisor en un dividendo parcial, ¿de qué expediente nos valdremos para conocerlo con exactitud?

R. Cuando no se conoce á primera vista el cociente parcial, el mas seguro expediente para conocerlo con exactitud, y que ahorra el escribir y borrar los tanteos necesarios, es el siguiente. Se busca primero cuantas veces la primera cifra del divisor cabe en la primera, ó en las dos primeras del dividendo parcial, cuando este tenga una cifra mas que el divisor, advirtiendo de tomar el cociente mayor que pueda dar, pero que nunca ha de pasar de 9; luego se multiplica la primera cifra del divisor por este cociente, y sin escribir nada se resta con la mente el producto de dicha ó de dichas cifras del dividendo, y se une mentalmente la resta, como decenas, con la cifra siguiente del dividendo parcial; se busca luego si en este conjunto la cifra siguiente del divisor cabe el mismo número de veces, se hace de nuevo con la mente la multiplicacion por el mismo cociente y la sustraccion como ántes; y se sigue ensayando cifra por cifra todas las que hay en el divisor. Si todas caben por lo ménos el mismo número de veces que la primera en su respectiva cifra del dividendo unida á la resta anterior, podrá escribirse con seguridad el cociente parcial, que resulta, en su lugar. Pero si alguna de las cifras del divisor no cabe en su dividendo respectivo por lo ménos un mismo número de veces que la primera, se concluye que el cociente parcial es demasiado fuerte; se disminuye pues de una unidad ántes de escribirlo en su lugar, y se ensaya de nuevo como ántes cifra por cifra hasta que se encuentre el verdadero cociente. Se ha de notar ademas que si en el ensayo de las cifras sucede que despues de haber restado un producto la diferencia sea 9 ó mas, sin otro ensayo se puede escribir con seguridad el cociente encontrado ántes.

139. P. Explicadme estas reglas con algun ejemplo.

R. Como la operacion de la division no deja de ofrecer algunas dificultades, por esto daremos los tres ejemplos siguientes para que se aprenda mejor á superarlas.

I.		II.		II.	
123,2,5	25	3972,1,0	785	9695,6,6,4	1387
100		3925		8322	
	493		506		$6990+\frac{534}{1387}$
232		4710		13736	
225		4710		12483	
75		0		12536	
75				12483	
0				534	

En el primero de estos ejemplos como 12 es menor que el divisor 25, cojo las tres primeras cifras de la izquierda del dividendo, y digo, en 123 cuántas veces cabe el 25? Para uno que tenga un poco de práctica en la multiplicacion, sabiendo que $25\times4=100$, no es difícil de ver que cabe 4 veces; pero si un principiante no lo ve á primera vista, debe hacer uso de la regla que hemos dado de ensayar cifra por cifra el divisor; y entónces dirá en 12 el 2 cabe 6 veces, y restando el producto $2\times6=12$ de 12, no queda resta; pero como el guarismo 3 que se sigue en el dividendo parcial no contiene el guarismo 5 del divisor 6 veces tambien, se concluye que el cociente 6 es demesiado fuerte. Se disminuye luego de una unidad, y se ensaya con 5 diciendo en 12 el 2 cabe 5 veces, ahora $2\times5=10$, de 10 á 12 van 2 de resta, que vale 20, lo que unido al guarismo 3 que sigue en el dividendo vale 23; pero como el guarismo 5 del divisor no cabe tampoco 5 veces en 23, concluyo que este otro cociente 5 es tambien demasiado fuerte. Ensayo otra vez por 4, y digo, en 12 el 2 cabe 4 veces, $2\times4=8$, de 8 á 12 van 4, que valen 40, y 3 que sigue en el dividendo valen 43; y viendo claramente que el guarismo 5 del divisor cabe 4 veces en 43 con un sobrante, escribo luego con seguridad de no tener que borrar el guarismo 4 en el cociente. Multiplico en seguida todo el divisor 25 por 4, escribo y resto el producto 100 del dividendo parcial 123, al lado de la resta 23 bajo el guarismo 2 que se sigue en el dividendo total, y tengo 232 por segundo dividendo parcial. Prosigo la division por 25, y si no veo á primera vista el cociente (lo que aquí no es difícil para un práctico), ensayo como ántes diciendo, en 23 el 2 cabe

9 veces, porque sé por la regla que no puede caber mas; ahora $2\times9=18$, de 18 á 23 van 5 que valen 50, y 2 son 52, en 52 el 5 del divisor cabe tambien 9 veces, y sobra; escribo luego 9 en el cociente al lado del 4, multiplico 25 por 9, escribo y resto el producto 225 del dividendo parcial 232, y al lado de la resta 7 bajo el 5 que queda en el dividendo total. Parto en seguida por 25 el tercer dividendo parcial 75, y si no veo á primera vista el cociente, ensayo como ántes diciendo, en 7 el 2 cabe 3 veces, $2\times3=6$, de 6 á 7 va 1 que vale 10, y 5 son 15; en 15 el 5 cabe 3 veces; concluyo luego que el 3 es el cociente parcial, y lo escribo en el cociente total al lado del 9; multiplico el divisor 25 por 3, resto de 75 el producto 75, y como 0 es la resta, 493 es el cociente total que buscaba.

En el segundo ejemplo se empieza á ver la necesidad de hacer el ensayo conforme proponemos en la segunda regla; se repara ademas que despues de haber restado el producto del divisor por el primer cociente parcial 5 hay una resta 47, al lado de la cual bajando la cifra siguiente 1 del dividendo total tenemos un dividendo parcial 471 que no contiene el divisor; se pone pues 0 en el cociente al lado del 5, se baja la otra cifra 0 del dividendo, y se prosigue la division.

En el tercer ejemplo se ve aun mas marcada la necesidad de ensayar cifra por cifra el divisor hasta la última, particularmente con las cifras del primer dividendo parcial 9695; lo que se hace diciendo, 1 en 9 cabe 9 veces, y queda nada; mas como 3 no cabe en 6 tambien 9 veces, ensayamos con 8, diciendo 1 en 9 cabe 8 veces, y sobra 1 que junto al 6 da 16; pero 3 en 16 no cabe 8 veces; ensayo luego por 7 y digo, 1 en 9...7, y van 2, que junto al 6 son 26, el 3 en 26 cabe 7; $3\times7=21$, de 21 á 26 van 5 que junto al 9 son 59; en 59 el 8 cabe 7 veces, $7\times8=56$, de 56 á 59 van 3; juntando 3 á la última cifra del dividendo parcial 5 tengo 35; en 35 el 7, última cifra del divisor, no cabe 7 veces; concluyo que el cociente parcial 7 aun es demasiado grande, y ensayo por 6 diciendo el 1 en 9 cabe 6 veces y van 3, 3 junto al 6 da 36; en 36 el 3 cabe 6 veces, $3\times6=18$, de 18 á 36 van 18; y por ser la resta 18 mayor de 9, infiero sin ensayar mas adelante que las demas cifras del divisor han de caber por lo ménos 6 veces en sus dividendos respectivos, y escribo, sin temor de borrar, el cociente parcial 6 en su propio lugar. Multiplico en seguida el divisor por el cociente parcial 6, resto el producto 8322 del dividendo parcial 9695, y tengo por resta 1373, bajo la cifra 6 del dividendo á su lado, y tengo por segundo dividendo parcial 13736; ensayo como ántes el divisor con él, diciendo,

en 13 el 1 cabe 9 veces (pues segun la regla en este caso se ha de ensayar la primera cifra del divisor con las dos primeras del dividendo parcial, y por otra parte sabemos que ningun cociente parcial puede ser mayor de 9), de 9 á 13 van 4 que valen 40, y 7 son 47, en 47 el 3 cabe ciertamente 9 veces; $3\times9=27$, de 27 á 47 van 20, y por ser esta resta mayor de 9, ya no se necesita ensayar mas y con seguridad escribo 9 en el cociente al lado del 6. Multiplico por 9 el divisor, resto el producto del segundo dividendo parcial, bajo al lado de la resta la otra cifra 6 del dividendo, y tengo por tercer dividendo parcial 12536. Hago con él y el divisor un ensayo análogo al anterior, escribo en su lugar el otro cociente parcial 9 que resulta, y despues de restado el producto del divisor por él, me queda una resta 53, á su lado bajo la última cifra 4 del dividendo, y como 534 no contiene el divisor, escribo 0 en el cociente; pero no habiendo mas cifras que bajar, pongo la resta 534 al lado del cociente con el divisor por debajo.

*140. Demostracion.—La demostracion de la regla de la division en el tercer caso (N. 137) es idéntica con la que dimos para el 2.º caso en los números 131, 132, 133 y 135; pues toda division puede siempre considerarse como una descomposicion del producto que se formó con la multiplicacion. La única diferencia que ocurre en este caso es que los dividendos parciales pueden contener, ademas del producto parcial que les corresponde, no solo decenas, sino tambien centenas, millares, etc., de los productos parciales inferiores, y este exceso que queda despues de hacer la sustraccion respectiva, es la resta que se ha de juntar con la cifra siguiente que se baja del dividendo total para formar otro dividendo parcial. Para no repetir, pues, las cosas ya dichas, bastará poner á la vista del estudiante la figura siguiente, en la que se ven las dos operaciones contrarias de la multiplicacion y division; y en la segunda reproducidos exactamente todos los productos parciales de la multiplicacion, pero en órden inverso, como que en la multiplicacion se empieza por la derecha y en la division por la izquierda.

```
Multiplicando..........      473
Multiplicador..........     6538
                          ------
                          3784
Productos parciales.....  1419
                          2365
                          2838
                          ----------------
Producto total y dividendo. 3092,4,7,4 | 473  divisor
                            2838       |------
                            ----       | 6538 cociente
                             2544
                             2365
                             ----
                             1797
                             1419
                             ----
                              3784
                              3784
                              ----
                                 0
```

*141. No debemos sin embargo dejar sin demostracion la regla que proponemos en el número 138 para conocer con exactitud y sin necesidad de borrar nada el número de veces que el divisor cabe en un dividendo parcial, cuando esto no se puede discernir á primera vista.

Decimos entónces que se subdivide con la mente el dividendo parcial en tantos otros pequeños dividendos parciales y ponemos por principio que *cada cifra del divisor ha de caber en su pequeño dividendo parcial respectivo por lo ménos el mismo número de veces que la primera cabe en el suyo.* La razon de este lema consiste en que todas las cifras del divisor han sido multiplicadas por la misma cifra del cociente que se busca; todas, pues, han de caber un mismo número de veces en sus pequeños dividendos parciales respectivos. Si alguna de las cifras del divisor no cabe pues en su respectivo dividendo parcial el mismo número de veces que las precedentes en los suyos, es una prueba cierta de que el cociente parcial que cogiamos era demasiado grande, y la causa de esta diferencia es debida á las decenas, centenas, etc., que se les agregan á veces de los productos inferiores á los superiores. De consiguiente se debe disminuir de una unidad ese cociente parcial y hacer otro ensayo; pero si ni así bastase, se prosigue disminuyendo y ensayando hasta que todas las cifras del divisor quepan por lo ménos el mismo número de veces en sus dividendos respectivos.

*142 Analicemos para mayor claridad el ejemplo de la figura precedente (N. 140). En la division que allí se hace del dividendo total 3092474 por el divisor 473 se coge por primer dividendo parcial grande 3092, que son millares; analizando éste se ve que se compone del producto parcial grande del divisor 473 por la cifra 6 de los millares del cociente, á saber 2838, mas de un sobrante de 254 millares, que proviene de los productos parciales inferiores. El producto 2838 se compone á su vez de todos los productos parciales pequeños que se ven en la figura siguiente:

```
  473
    6
  ----
    18
   42
  24
  ----
  2838
```

Descomponiendo pues 3092, ó en otros términos, tomando á su izquierda el pequeño dividendo parcial 30, capaz de contener la cifra 4 del divisor, vemos que en apariencia la contiene 7 veces, pues $4\times7=28$, y que ademas deja 2 de resta. Si 7 es verdaderamente el cociente, no hay duda que formando el segundo dividendo parcial pequeño de la resta 2, considerada como decenas, y de la cifra 9 que sigue en el dividendo, el conjunto 29 deberá contener la segunda cifra del divisor 7 tambien 7 veces, y dejar ademas una resta que unida como decenas á la última cifra del dividendo parcial 2, forme otro dividendo parcial pequeño que contenga la última cifra 3 del divisor tambien 7 veces; pues en esta hipótesis todas las cifras del divisor se hubieran multiplicado por 7 (N. 141). Pero ensayando veo que la cifra 7 del divisor no cabe 7 veces en el pequeño dividendo parcial 29; de donde infiero que el cociente 7 es demasiado grande; en efecto, en nuestro caso no es por 7 sino por 6 que se multiplicó. Disminuyendo luego este cociente de una unidad, y restando con la mente el producto $4\times6=24$ de 30, resulta una resta 6, que son decenas relativamente á la cifra siguiente del dividendo, 4 de las cuales han provenido de las decenas del pequeño producto parcial precedente 42, y 2 del producto parcial grande 2365, como puede verse en las dos figuras antecedentes. Esas decenas eran las que faltaban al pequeño dividendo parcial 29 en la primera hipótesis; pues en lugar de las 4 que le pertenecen realmente, solo se le daban 2. Uniendo luego las 6 decenas á la cifra 9 siguiente ten-

go por dividendo parcial 69, en el que la cifra 7 del divisor cabe ciertamente 6 veces, y queda una resta 27 proveniente de las decenas y centenas de los productos inferiores. En caso que en 69 no cupiera el 7 por lo ménos 6 veces, por un raciocinio análogo al precedente se inferiria que el cociente 6 seria demasiado grande, y fuera preciso disminuirlo de una unidad y hacer otro ensayo; y lo propio se entiende del dividendo parcial que sigue relativamente á la cifra 3 correspondiente del divisor, y de otros tambien si los hubiese. Juntando por fin las 27 decenas de resta á la última cifra 2 del dividendo 3092, tengo por dividendo parcial 272, en el que la cifra 3 del divisor cabe sin duda 6 veces con una resta que pertenece á los productos anteriores, y que por medio de la sustraccion que se hace en la operacion se devuelve á su propio lugar. Concluyo, pues, que 6 es seguramente la primera cifra de la izquierda del cociente, la cual en este caso ha de expresar millares (N. 132). Un análisis semejante puede hacerse de todos los demas dividendos parciales.

*143. En la demostracion antecedente juntamos la resta 27 con la cifra 2 del dividendo para ensayar la cifra 3 del divisor; pero en la operacion esto no es preciso, como decimos en la regla; pues cuando la resta es 9 ó mas, ya no hay necesidad de proseguir el ensayo. En efecto, el dividendo parcial formado con esta resta y la cifra que sigue en el dividendo debe ser por lo ménos 90; ahora cualquiera sea la cifra del divisor que se ensaye, siempre cabrá en 90 tantas veces como la primera en su dividendo parcial, y restando luego de 90 el producto de esta cifra del divisor por el cociente, dejará una resta por lo ménos igual á 9; pues el mayor producto de un número dígito por otro dígito, que es 9×9, no pasa de 81. Esta resta igual por lo menos á 9 junta á la cifra siguiente del dividendo formará necesariamente otro dividendo parcial igual por lo ménos á 90, y así sucesivamente; de suerte que todas las demas cifras del divisor cabrán ciertamente en sus dividendos parciales por lo ménos tantas veces cuantas la primera cabe en su dividendo parcial, que es lo que queremos averiguar con el ensayo. No hay, pues, necesidad de proseguirlo cuando una de las restas es 9 ó mas.

*144. Lo que sí importa mucho en hacer el ensayo es coger siempre el cociente mayor que pueda dar la primera cifra del divisor comparada con su pequeño dividendo parcial por no correr el riesgo de coger un cociente menor del verdadero; pues entónces el tanteo que proponemos no bastaría para conocer el error. Así, si en elejemplo precedente hubiésemos cogido por cociente 5 en lugar de

7, y luego de 6 (N. 142), ensayando hubiéramos visto que todas las demas cifras del divisor caben tambien en sus dividendos parciales por lo ménos 5 veces; pero no por eso hubiéramos conocido que 5 es un cociente falso y menor del verdadero.

*145. Cuando decimos de coger por primer ensayo el cociente mayor que pueda dar, y luego ir disminuyéndolo de una en una unidad, si es necesario, entendemos siempre que el cociente no pase de 9. Pues si pudiese llegar á 10, deberia tambien haber por lo ménos un dividendo parcial grande de mas, si lo que buscamos es el primer cociente parcial (N. 132); ó bien seria señal de que el cociente parcial precedente está equivocado y menor del verdadero, si el cociente parcial que se busca fuese despues del primero, como se verá mas claramente por el número 149.

*146. Esta tambien es la razon porque cuando el dividendo parcial tiene una cifra mas que el divisor, se ha de ensayar la primera del divisor con las dos primeras del dividendo parcial, aunque parezca ser contenida en ellas mas de 9 veces.

*147. De lo dicho en los números 141 y siguientes se concluye que el cociente hallado con este tanteo no pudiendo ser ni mayor ni menor, debe ser el verdadero; á ménos pues que no se haya deslizado alguna equivocacion por descuido del que hace el ensayo, lo que sucederá rara vez cuando se sepa operar, se puede escribir sin miedo de tener que borrar el cociente parcial así buscado.

Ni se tema que este modo de ensayar sea demasiado largo; pues al cuarto ó quinto tanteo todo lo mas ha de salir el verdadero cociente parcial. La práctica ademas enseñará el modo de discernirlo con prontitud.

148. P. Si en la operacion sucediese que el producto del divisor por un cociente parcial fuese mayor de su dividendo parcial, ¿qué deberia inferirse?

R. Que ha habido equivocacion en la operacion, y que el cociente parcial que se ha cogido es demasiado grande: de consiguiente se tiene que enmendar la falta disminuyendo de una ó mas unidades el cociente parcial, segun sea necesario.

* Demostracion. El dividendo parcial contiene necesariamente el producto del divisor por el cociente parcial, y á veces las decenas de los productos inferiores (N. 131); si sucede pues que el producto del divisor por un cociente parcial sea mayor que su dividendo parcial, es claro que no puede ser él el verdadero producto, y de consiguiente que el cociente parcial que se coge es tambien mayor del verdadero.

149. P. Si despues de haber restado el producto del divisor por un cociente parcial de su dividendo parcial respectivo, la resta fuese igual ó mayor del divisor, ¿qué se inferiria?

R. Que el cociente parcial está equivocado y menor del verdadero; y sin pasar adelante seria preciso ensayar de nuevo el divisor con el dividendo parcial para corregir el error.

* Demostracion. Si la resta de que se habla es igual ó mayor del divisor es una prueba que el divisor cabe en el dividendo parcial mas veces de lo que equivocadamente se creia; se enmienda pues el error con otro ensayo. Véase lo que se dijo en el número 145.

De estos dos últimos números 148 y 149 se ve que no obstante de lo acertadas que son las reglas de division que hemos dado, puede sin embargo equivocarse uno, no por falta de las reglas, sino por descuido del operador. Muy rara vez sucederá esto si se ponen en práctica con un mediano cuidado.

150. P. Será siempre preciso en la division de un número compuesto por otro compuesto escribir los productos y las restas debajo de los dividendos parciales?

R. Aunque el método que hemos dado en la regla (N. 137) sea el mas acertado, particularmente cuando se trata de operaciones delicadas; sin embargo, cuando uno tenga mucha práctica, puede contentarse con solo escribir la resta, haciendo las dos operaciones de multiplicacion y sustraccion á la vez, como indicamos en el ejemplo que sigue:

$$\begin{array}{r|l} 26984{,}8{,}4 & 2844 \\ 13888 & \overline{\phantom{948+\frac{2372}{2844}}} \\ 25124 & 948+\frac{2372}{2844} \\ 2372 & \end{array}$$

Separado el primer dividendo parcial, y hecho el tanteo con del divisor, encuentro 9 por cociente parcial, multiplico por él el divisor diciendo, 4 por 9 son 36, resto todo el 36 del primer guarismo 4 de la derecha del dividendo parcial, agregándole tantas decenas cuantas bastan para poder restar, que en este caso son 4. Digo, pues, de 36 á 44 van 8 (N. 85), escribo 8 debajo del guarismo 4 del dividendo, y llevo con la mente 4 de las decenas que he agregado. En seguida, para que la operacion salga exacta, podria considerar el guarismo siguiente 8 de la izquierda del dividendo como disminuido de 4 unidades; pero es mucho mas cómodo agregar el 4 al producto siguiente que es otro sustraendo (N. 91). Digo, pues, de nuevo 4×9 son 36 y 4 que llevo son 40, resto 40 del guarismo 8 agregándole decenas suficientes, y diciendo de 40 á 48 van 8, escribo 8 en la resta, y llevo 4; busco el otro producto diciendo 8 por 9 son 72, y 4 que llevo son 76, hago la sustraccion del guarismo 9 que sigue en el dividendo con las decenas necesarias diciendo, de 76 á 79 van 3, que escribo debajo del 9 en la resta, y llevo 7. Busco el otro producto diciendo, 2 por 9 son 18, y 7 son 25, este resto de 26 que queda en el dividendo parcial diciendo, de 25 á 26 va 1, escribo 1 debajo del 6 del dividendo, y tengo por resta 1388.

A su lado bajo la cifra siguiente 8 de la derecha del dividendo, hago el tanteo con el divisor, y encuentro por segundo cociente parcial 4. Hago una operacion análoga á la primera diciendo 4 por 4 son 16, á 18 van 2 que escribo, y llevo 1; 4 por 4 son 16 y 1 son 17, á 18 va 1, que escribo en la resta y llevo 1; 8 por 4 son 32, y 1 son 33, á 38 van 5, y llevo 3; 2 por 4 son 8, y 3 son 11, á 13 van 2 que escribo. Al lado de la resta 2512 bajo la última cifra 4, prosigo la operacion del mismo modo con el último dividendo parcial, y tengo por último el cociente total $948+\frac{2372}{2844}$.

*151. Escolio.—Examinando el ejemplo que acabamos de dar, se ve cuan incierta es la regla que dan algunos aritméticos, aun de nombradía, para el tanteo de los cocientes parciales, á saber que cuando la segunda cifra del divisor es notablemente mas grande que la primera, por ejemplo 8 ó 9 comparativamente á 1, 2, 3, 4 ó 5, se considera la primera como aumentada de una unidad para hacer el tanteo. Pues poniéndola en práctica con el primer dividendo parcial del ejemplo precedente, resultaria por primer cociente parcial 8, con el fastidio despues de tener que borrar para enmendar el error: mientras con nuestro método se encuentra del tiro el verdadero cociente 9 (N. 144 y 145). Por esto nos abstenemos de dar á los estudiantes semejante regla.

152. P. Si el dividendo acaba en ceros y el divisor es la unidad seguida de ceros, ¿nó se puede hacer alguna abreviacion?

R. Si el dividendo tiene por lo ménos tantos ceros finales cuantos tiene el divisor, sin hacer otra operacion se quita en el dividendo un número de ceros finales igual á los del divisor, y el número así reducido es el cociente. Así por ejemplo 250 : 10=25, y 3480000 : 1000=3480. Pero si el dividendo no contiene tantos ceros finales como el divisor, se abrevia entónces como se dice en la cuestion siguiente, ó como se hará ver en el capítulo de los quebrados decimales.

* Demostracion de la primera parte. Ya hemos visto (N. 110) que segun el sistema de numeracion decimal se multiplica un número entero por 10, 100, 1000, etc., con solo agregar á su derecha