uno, dos, tres ó mas ceros; viceversa, se dividirá un número entero por la misma cantidad con solo quitar á su derecha un igual número de ceros.

153. P. En general ¿qué abreviacion puede hacerse cuando el dividendo y divisor rematan ámbos en ceros?

R. Se pueden quitar en ambos términos tantos ceros finales como hay en el que tiene ménos y luego hacer la division con los términos así reducidos. Sea por ejemplo 48000 : 800, será igual á 480 : 8=60. El mismo cociente 60 resultaria si se partiese 48000 por 800. Sea este otro ejemplo 3600 : 1000, será lo mismo que 36 : 10=3+$\frac{6}{10}$.

* Demostracion.—La razon de esta abreviacion es que 800 unidades es lo mismo que 8 centenas, y 48000 unidades lo propio que 480 centenas segun el sistema decimal de numeracion. Un mismo número de veces cabrán pues 8 centenas en 480 centenas, que 800 unidades en 48000 unidades. Esta razon puede fácilmente generalizarse á todos los casos análogos; pero de esto se verá algo mas hablando de los quebrados.

154. P. Qué otra abreviacion se suele hacer cuando el solo divisor remata en ceros?

R. Cuando el solo divisor remata en ceros se suelen separar con un medio paréntesis los ceros finales del divisor, y del mismo modo otras tantas cifras de la derecha del dividendo. Luego en la operacion se consideran solamente las cifras de la izquierda de los medios paréntesis; pero al fin de la operacion al lado del cociente se escriben las cifras que se descuidaron en el dividendo precedidas de la última resta que haya, con el divisor entero por debajo. Sea por ejemplo 169805 : 1300, se dispone y se hace la operacion como aquí se ve:

16,9,8(05	13(00
3 9	
08	130+$\frac{805}{1300}$

* Demostracion.—Cuando el divisor remata en ceros y el dividendo en cifras significativas, es claro que estas últimas cifras significativas del dividendo no pueden provenir de la multiplicacion del divisor por la parte entera del cociente; pues cualquiera que sea este cociente, multiplicado por los ceros del divisor, debe dar cero por resultado. Luego las últimas cifras significativas del dividendo se pueden restar con la mente, sustituir en su lugar ceros, y considerarlas como una resta que fué agregada al dividendo, y que se ha de escribir al lado del cociente con el divisor

por debajo (N. 129, 137). Lo que queda del dividendo rematando entónces en el mismo número de ceros que el divisor, se pueden para la division suprimir en ambos los ceros finales, segun el N. 153; y esto mismo es lo que se hace separando las últimas cifras con un medio paréntesis en ambos datos. Concluida la division, si queda alguna otra cifra significativa de resta, se ha de agregar á las que ya separamos, pero conservando su valor relativo, y esto se obtiene tambien con escribir á su derecha las que se separaron en el dividendo con el medio paréntesis. Pues si ántes de hacer la operacion las hubiésemos conocido, y restado del dividendo juntamente con las demas, ese mismo valor hubieran tenido.

Así, en el ejemplo anterior, separando dos cifras con el medio paréntesis descomponemos el dividendo en estas dos partes 169800+5. Las 5 unidades no pueden provenir del producto del divisor 1300 por la parte entera del cociente; pues la última cifra del cociente, cualquiera que sea, multiplicada por cero no puede dar por producto 5 unidades; las separamos luego del dividendo considerándolas como una resta. En seguida, la primera parte del dividendo rematando en dos ceros como el divisor, se prescinde de ellos en ambos datos en la operacion. Concluida ésta, queda ademas una resta 8, que en el dividendo primitivo eran 8 centenas, las debemos pues agregar con su propio valor relativo á las otras 5 unidades, y tenemos por resta total 805. Lo propio obtenemos con solo escribir á la derecha de 8 las dos cifras 05 separadas por el medio paréntesis. Mas adelante se conocerá el verdadero valor de esta resta.

Obsérvese ademas que lo que proponemos en esta regla no es mas que una abreviacion, pues el mismo resultado se consigue haciendo la division con los datos enteros, como se ve en la figura siguiente:

1698,0,5	1300
398 0	
8 0 5	130+$\frac{805}{1300}$

155. P. Cuáles son los usos de la division?

R. Varios son los usos de la division, algunos de los cuales se verán en el discurso de la obra. Por ahora nos contentarémos con señalar cuatro de los principales.

1.º Sirve la division para hacer un número tantas veces menor, por ejemplo 2, 3, 4, etc., veces mas chico; ó lo que es lo mismo, tomar la mitad, la tercera, la cuarta, etc., parte de un número. En este caso no hay mas que hacer sino dividir el número propuesto

por 2, 3, 4, ó en general por el número de veces que se quiera reducir.

2.º Se usa la division para repartir una cantidad en cierto número de partes iguales, por ejemplo, entre un cierto número de personas. Así, si quiero repartir 15 pesos en partes iguales entre 5 pobres, divido el número dado $ 15 por el número de pobres dado, que es 5, y el cociente 3 señala los pesos que tocan á cada pobre.

3.º Sirve la division para conocer el valor de una unidad dada cuando se conoce el de muchas de la misma especie. Así, sabiendo por ejemplo que 31 varas de género han costado $ 744, se quiere saber á como sale la vara. En este caso se divide el valor total $ 744 por el número de varas 31, y el cociente 24 señala los pesos que cuesta cada una de estas varas.

4.º Sirve la division para reducir, tratándose de números concretos y complexos, especies inferiores á superiores. En tal caso se divide el número propuesto de unidades inferiores por el número de estas unidades que se requiere para formar una unidad de la especie superior; el cociente entero da unidades de la especie superior, y la resta unidades iguales á las propuestas. Así, si quiero reducir 422 onzas á libras, parto este número por 16, que son las onzas que componen una libra, y tengo por cociente 26 enteros, que son libras, y 6 de resta que son onzas.

Pero si entre las unidades inferiores propuestas y las superiores, á que se quieren reducir, hay otras intermedias, entónces es mejor ir reduciendo sucesivamente á las inmediatamente superiores. Se hayan de reducir v. g. 73343 onzas en quintales, la operacion se puede disponer como sigue:

73,3,4,3 on.	16		
93			
134	45,8,3 lib.	25	
63	208		
15	83	18,3 ar.	4
	8	23	
		3	45 quintales.

Empiezo á dividir 73343 onzas por 16, que es el número de onzas que forman una libra, y tengo 4583 por cociente y 15 onzas de resta; parto las libras por 25, que son las libras que contiene una arroba, y tengo 183 arrobas y 8 libras de resta; parto las arrobas por 4, porque 4 arrobas forman un quintal, y tengo 45 quintales y 3 arrobas de resta. Tendré, pues, por cociente total los quintales que

salieron por último cociente, y todas las restas que recojo, á saber, 45 quintales 3 arrobas 8 libras 15 onzas.

*156. Escolio.—Algo tenemos que decir sobre la especie del producto y del cociente. El producto no siendo mas que un compuesto del multiplicando repetido, es generalmente de la especie del multiplicando, cuando el multiplicador es de especie diversa, y éste se considera entónces como abstracto (N. 104); pero si los dos factores son homogéneos, el producto es heterogéneo: por ejemplo, si se multiplican varas lineales por varas lineales, el producto expresa varas de otra especie, á saber, varas cuadradas.

En cuanto al cociente, si el dividendo y divisor son heterogéneos, será de la misma especie del dividendo; pero si el dividendo y divisor son homogéneos, el cociente es heterogéneo.

En todo caso el estado de la cuestion determina siempre la especie, sea del producto, sea del cociente.

157. P. La division puede servir de prueba de alguna otra operacion?

R. La division sirve de prueba de la multiplicacion. Se parte por esto el producto por uno de los factores, y debe salir por cociente el otro factor, si la operacion está bien hecha. Así, si queremos averiguar por ejemplo, si el producto del ejemplo que dimos en el capítulo precedente (N. 112) á saber, de 6347×892 es verdaderamente 5661524, dividiremos este producto por uno cualquiera de los factores, y si la operacion está bien hecha, el cociente debe ser el otro factor.

158. P. Y cuál será la prueba de la division?

R. La multiplicacion. Se multiplica por esto el divisor por la parte entera del cociente, ó viceversa, al producto se le añade la resta si la hubo; y esta suma, ó bien el solo producto, si no hubo resta, debe ser igual al dividendo, cuando la operacion está bien hecha. Puede de este modo probarse cualquiera de los ejemplos que hemos dado en este capítulo, ó bien examinarse el siguiente:

Ejemplo.		Prueba.	
794,3,5	147	147	divisor.
735		540	cociente entero
	$540+\frac{55}{147}$		
593		588	productos parciales.
588		735	
55		79380	producto. total
		55	resta.
		79435	suma igual al dividendo.

*159. Demostracion.—El producto es un compuesto de tantas veces el multiplicando cuantas son las unidades del multiplicador; es claro, pues, que si se divide el producto por el multiplicando, ó lo que es lo mismo, si se busca cuantas veces el multiplicando cabe en el producto, el resultado, á saber, el cociente ha de ser el multiplicador. Ademas invertir el órden de los factores, no altera el valor numérico del producto (N. 103); luego un raciocinio análogo demuestra que si se parte el producto por el multiplicador, el resultado es el multiplicando. Las figuras de los números 133 y 140 hacen ver sin embargo que si se toma por divisor el multiplicando se tiene la ventaja de vér volver en órden inverso los mismos productos parciales. Esto para la multiplicacion.

En cuanto á la division ya vimos en el número 128 que el dividendo es un verdadero producto que tiene por factores el divisor y el cociente; luego cuando el cociente sale exacto, á saber, sin resta, multiplicando uno de estos por el otro, el resultado ha de ser el dividendo; aunque, segun se ve en las figuras de los números 133 y 140, si se toma el divisor por multiplicando, se ven volver los mismos productos parciales que ántes, si se tuvo cuidado de escribirlos. Mas cuando la division no sale exacta y queda una resta, como esta resta no proviene de la multiplicacion del divisor por ninguna unidad del cociente (N. 135), sino por una cantidad menor que la unidad; es claro que multiplicando el divisor por la parte entera del cociente, el producto es menor que el dividendo, faltándole aun la resta que sobró de la division; pero agregando al producto la resta, la suma igualará el dividendo, si la operacion fué bien hecha.

Estas pruebas pueden servir de ejercicio á los principiantes. Por lo que respecta á la práctica, aunque no seria inútil probar la division por medio de la multiplicacion, fuera sin embargo cosa muy pesada probar la multiplicacion por la division, como que esta segunda operacion sea generalmente mas larga y mas complicada que la primera. Lo que se usa generalmente es rehacer la operacion, ó lo que es mejor, dar la misma operacion que hacer á dos ó tres individuos, y luego cotejar los resultados. Pero si uno es solo y la operacion necesita algun cuidado, no está demas probar la multiplicacion con la inversion de los factores, y la division por la multiplicacion.

Hay otras pruebas de estas dos operaciones, pero creemos inútil hablar aquí de ellas; solo haremos conocer una muy ingeniosa en el capítulo siguiente.

CAPITULO IX.

DE LA DIVISIBILIDAD DE LOS NUMEROS Y DEL MODO DE BUSCAR EL MÁXIMO COMUN DIVISOR DE DOS NUMEROS.

160. P. Qué se entiende por *divisibilidad* de un número?

R. La propiedad que tiene un número de ser divisible por otro exactamente, á saber, sin dejar resta.

161. P. Cómo se llama un número divisible exactamente por otro, y el número que cabe exactamente en otro?

R. Un número divisible exactamente por otro ó por otros se llama *múltiplo* de todos ellos; y los que dividen ó que caben exactamente en otro, llámanse *submúltiplos*, *factores* ó *divisores* del otro. Así, 12 por ejemplo es múltiplo de 2, de 3, de 4 y de 6, miéntras que 2, 3, 4, 6, son submúltiplos, factores ó divisores de 12.

162. P. Qué se entiende por *parte alícuota* y *parte alicuanta* de un número?

R. Un submúltiplo de un número se llama tambien *parte alícuota* de él, á diferencia de la *parte alicuanta*, que es un número menor de otro, pero que no cabe exactamente en él. Por ejemplo, 2 es parte alícuota de 12, miéntras 5 es parte alicuanta del mismo 12.

163. P. Cómo se dividen los factores?

R. En *simples* y *compuestos*. Los factores simples, que tambien se llaman *números primos* ó *primeros*, son aquellos que no tienen mas divisor que la unidad y sí mismos, por ejemplo, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc.; factores compuestos son aquellos que son múltiplos de otros, por ejemplo, 4 que es múltiplo de 2, 6 que es múltiplo de 2 y de 3, etc.

164. P. Qué cosa son *números primos* ó *primeros* entre sí?

R. *Números primos* ó *primeros entre sí* son aquellos que no tienen mas divisor comun que la unidad, por ejemplo, 3 comparado con 4, 14 comparado con 15. De aquí se deduce que los números primeros comparados entre ellos son primeros entre sí, como 7 y 13, 7 y 19, 13 y 19.

165. P. Cómo conocerémos con un método mas sencillo que el de dividir todo un número por 2, si este número es ó no divisible por 2?