224. P. Para qué sirve en la práctica esta consecuencia?

R. Sirve entre otras cosas para *simplificar* los quebrados, cuando es posible, ó lo que es lo mismo *reducirlos á una menor* ó *á su mínima expresion*, para comprender mejor su valor, y para facilitar las operaciones que se han de hacer á veces con ellos; pues es mucho mas fácil entender lo que es por ejemplo, $\frac{2}{3}$ que no $\frac{72}{108}$, aunque uno y otro quebrado exprese el mismo valor.

225. P. De qué método nos valdremos para simplificar los quebrados?

R. El método mas cómodo es examinar si ambos términos de un quebrado son múltiplos de alguno de los números 2, 3, 9, 5, etc, de que hemos hablado en el capítulo anterior de la divisibilidad de de los números, y empezar a dividir los dos términos por el mayor de ellos que se presente. Reducido así el quebrado á una *menor* expresion, se sigue dividiendo ó por el mismo divisor, ó por otro de los mencionados, si es posible; y así se continúa hasta que no se conozca ya por ese método ningun otro divisor posible. Si quiero por ejemplo simplificar el quebrado $\frac{72}{108}$, veo á primera vista que sus dos términos son múltiplos de 2 y de 4, los divido por 4, y tengo $\frac{72}{108}=\frac{18}{27}$; examino de nuevo este último resultado, y veo que sus dos términos son múltiplos de 9, los parto por 9, y resulta $\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$. Como los términos de esta última expresion $\frac{2}{3}$ sean números primeros entre sí, la fraccion se llama *irreducible*, ó sea reducida ya no solo á *menor*, sino *á su mínima expresion*.

226. P. Pero si los términos de una fraccion no son múltiplos de ninguno de los factores precedentes, ó bien agotada ya la division por esos divisores, no se conoce fácilmente si la fraccion es ó no irreducible, no se puede entónces reducir á su mínima expresion?

R. Se puede entónces buscar el máximo comun divisor (N. 202), y si este es mayor de la unidad, se parten sus dos términos por él, y el resultado es una fraccion irreducible. Mas si sale la uidad por máximo comun divisor, quiere decir que la fraccion es irreducible. Así si quiero simplificar, ó mejor reducir á su mínima expresion el quebrado $\frac{329}{517}$, como sus dos términos no sean múltiplos de ninguno de los factores precedentes y no se sepa si son múltiplos de otro, busco el máximo comun divisor, y hallado que es 47, parto los términos por él y resulta $\frac{329}{517}=\frac{7}{11}$, cuyo resultado, como se ve, es un quebrado irreducible y mucho mas fácil de comprenderse que el primero. Pero si quisiese simplificar el quebrado $\frac{93}{785}$ buscando el máximo comun divisor y encontrando que

es 1, concluiria que el quebrado $\frac{93}{785}$ ya está reducido á su mínima expresion.

* Demostracion.—Es claro 1º que cuando los dos términos de un quebrado se han dividido por el máximo comun divisor, el resultado es un quebrado reducido á su mínima expresion, pues no pueden los términos resultantes tener otro divisor comun excepto la unidad, ó bien son números primeros entre sí. En efecto, si despues de divididos por el máximo comun divisor pudiesen aun dividirse por otro divisor comun, querria decir que los términos primitivos serian divisibles por el producto del máximo comun divisor y de este otro divisor supuesto, á saber, por un divisor mayor del *máximo* comun divisor, lo que es imposible por lo que se demostró en el N. 203.—2º Si buscando el máximo comun divisor sale por resultado la unidad, los dos términos del quebrado son números primeros entre sí (N. 204), y de consiguiente el quebrado es irreducible.

Cuando se quiere reducir un quebrado á su mínima expresion no es necesario dividir por los números 2, 3, 9, etc., pudiéndose en este caso buscar del tiro, si se quiere, el máximo comun divisor y dividir por él.

227. P. Dados dos ó mas quebrados, cómo se conoce cual es el mayor en valor?

R. Si los quebrados tienen un mismo denominador, es mayor aquel que tiene mayor numerador; y si tienen un mismo numerador, es mayor el que tiene menor denominador. Así, de los quebrados $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{8}$, el último es el mayor; y de los quebrados $\frac{4}{15}$, $\frac{4}{5}$ y $\frac{4}{9}$, el mayor es $\frac{4}{5}$.

* Demostracion.—La demostracion se deduce fácilmente de la definicion del numerador y denominador (N. 207) y de los dos principios fundamentales de los quebrados (N. 219).

228. P. Pero si los numeradores y denominadores son diferentes, cómo se conocerá con claridad el mayor?

R. En este caso se reducen ántes los quebrados á un comun denominador.

229. P. Cuál es la regla para *reducir dos quebrados á un comun denominador?*

R. La siguiente: se multiplica el numerador del primero por el denominador del segundo, y el numerador del segundo por el denominador del primero, y á estos productos se da por denominador comun el producto de los dos denominadores. Sean por ejemplo los quebrados $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$, multiplico el numerador 3 por el denominador

5, luego multiplico el numerador 4 por el denominador 4, por último multiplico el denominador 4 por el denominador 5, y tengo $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{15}{20}+\frac{16}{20}$, lo que puede tambien escribirse como sigue, $\frac{15+16}{20}$. En donde veo claramente que el segundo quebrado $\frac{4}{5}$ es mayor que el primero $\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{20}$.

* Demostracion.—Con esta operacion no se altera el valor de los quebrados, porque los dos términos de cada uno resultan multiplicados por un mismo número entero (N. 223). En efecto, el numerador 3 del primer quebrado se multiplica por el denominador 5 del segundo, mas dando al resultado 15 el denominador $20=4\times5$, multiplico tambien por 5 su denominador. Lo propio se hace con el segundo, pues si es verdad que su numerador 4 lo multiplico por el denominador 4 del primero, es verdad tambien que multiplico su denominador 5 por 4, pues $20=5\times4$.

230. P. En general cuál es la regla para *reducir varios quebrados á un comun denominador?*

R. Se multiplica el numerador de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demas quebrados, y á estos nuevos numeradores se les da por denominador comun el producto de todos los denominadores. Si se quiere por ejemplo reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{2}{5}+\frac{4}{7}+\frac{3}{10}$, se multiplica primero el numerador 2 por el producto de los denominadores 7 y 10, á saber por 70, y resulta por primer numerador 140; luego se multiplica el numerador 4 por los dos denominadores $5\times10=50$, y se obtiene por segundo numerador 200; se multiplica en seguida el numerador 8 por el producto de los denominadores de los demas quebrados, á saber, por $5\times7=35$, y resulta por tercer numerador 280. El denominador comun es el producto de todos los denominadores $5\times7\times10=350$; tenemos, pues, que los quebrados $\frac{2}{5}+\frac{4}{7}+\frac{3}{10}=\frac{140}{350}+\frac{200}{350}+\frac{280}{350}=\frac{140+200+280}{350}$.

* Demostracion.—La demostracion se funda como la precedente, en el principio de que un quebrado no se altera con multiplicar sus dos términos por un mismo número entero (N. 223), y esto es lo que se hace precisamente en esta operacion con los dos términos de cada quebrado. En efecto, cuando damos al primer quebrado el denominador $350=5\times7\times10=5\times(7\times10)$ en lugar de 5; que tiene, multiplicamos el denominador 5 por $7\times10=70$, esto es por el producto de los denominadores de los otros quebrados; por el mismo producto, pues, 7×10, tenemos que multiplicar su numerador 2, si no queremos alterar el valor del quebrado $\frac{2}{5}$, y esto es

lo que hacemos en realidad con la regla. Lo propio dígase de los demas.

Si mas fuesen los quebrados, no cabe duda que la demostracion seria la misma.

231. P. No se puede á veces abreviar la operacion de la reduccion de los quebrados á un comun denominador?

R. Sí se puede cuando entre los quebrados propuestos se encuentre uno que tenga por denominador un número que sea múltiplo de los demas denominadores. En este caso, en lugar de la regla general que hemos propuesto, se multiplica el numerador de cada quebrado por el cociente que resulta de dividir el múltiplo por el denominador respectivo. Para mayor claridad se escriben los cocientes multiplicadores arriba de cada numerador con un punto á lado, como se ve en el ejemplo siguiente. El denominador comun es el mismo múltiplo.

$$\frac{\overset{9.}{3}}{4}+\frac{\overset{4.}{5}}{9}+\frac{\overset{12.}{2}}{3}+\frac{\overset{1.}{16}}{36}+\frac{\overset{3.}{7}}{12}=\frac{27+20+24+16+21}{36}.$$

En este ejemplo se ve facilmente que el denominador 36 es múltiplo de los demas denominadores 4, 9, 3 y 12. Arriba del primer numerador 3 se coloca el cociente 9, que resulta de dividir 36 por el denominador 4, con un punto á lado, y así de los demas; luego se multiplica cada numerador por el multiplicador que tiene escrito arriba, y resultan los numeradores 27, 20, etc., con el denominador comun 36.

* Demostracion.—La demostracion consiste en que el múltiplo de todos los denominadores es igual á cada uno de los denominadores multiplicado por el cociente que resulta de la division del múltiplo por el denominador (N. 128), sustituyendo pues el múltiplo á un denominador, se multiplica por este cociente el denominador; luego para que el valor del quebrado quede invariable se ha de multiplicar el numerador respectivo por el mismo cociente (N. 223).

*232. El uso y particularmente el cocimiento práctico de los divisores de los números señalarán otras abreviaciones. Pero no dejaremos de hablar de una que se deduce del corolario del teorema IX del N. 176, y que en ciertos casos no presenta dificultad, y es que cuando se quieren reducir varios quebrados á un mismo denominador, y entre los denominadores se encuentra uno á quien solo falta uno ó dos factores primeros para ser múltiplo de todos los demas, se le introducen esos factores que le faltan, y el producto que resulta se toma por denominador comun, operando del

mismo modo que en el caso precedente (N. 231). Sean por ejemplo $\frac{5}{9}+\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{20}{36}$, observo aquí que 36 es múltiplo de los denominadores 9 y 3, pero no de 8, porque siendo $8=2\times2\times2$ tiene el factor primero 2 repetido una vez mas que $36=2\times2\times3\times3$; introduciendo, pues, en 36 el factor 2, ó sea multiplicando 36 por 2, tenemos por producto 72, que es múltiplo de todos los denominadores; se toma luego 72 por denominador comun, y practicando la regla precedente tenemos:

$$\frac{5}{9}+\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{20}{36}=\frac{\overset{8.}{40}+\overset{24.}{24}+\overset{9.}{27}+\overset{2.}{40}}{72}.$$

Si bien se considera, esta abreviacion es siempre posible, porque siempre podremos coger el denominador mas grande entre los propuestos y multiplicarlo por todos los factores primeros que le falten para que sea múltiplo de todos los demas; y la abreviacion es muy útil, tanto porque los numeradores resultan mas chicos, como porque no hay despues que simplificar los resultados de las operaciones como se verá en seguida; pero como no siempre se presentan obvios los factores primeros de todos los denominadores y el buscarlos á veces puede ser trabajoso, por esto cuando uno no quiera hacerlo, podrá siempre por una via mas larga pero no ménos segura, á saber, por medio de la regla general (N. 230), llegar al mismo resultado.

CAPITULO XI.

DE LAS CUATRO OPERACIONES DE ADICION, SUSTRACCION, MULTIPLICACION Y DIVISION DE LOS QUEBRADOS COMUNES Y MIXTOS.

ADICION.

233. P. Cómo se hace la adicion de los quebrados?

R. Para la adicion de los quebrados es preciso distinguir dos casos: el primero es cuando los quebrados sumandos tienen un comun denominador, el segundo cuando tienen denominadores diferentes.

234. P. Cómo se hace la adicion cuando los quebrados tienen un comun denominador?

R. Se suman los numeradores y á la suma se le da por denominador el mismo denominador comun. Luego, si hay lugar, se simplifica la suma, y si es un quebrado impropio se reduce á entero ó mixto. Así por ejemplo $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8}{7}=1+\frac{1}{7}$.

En la práctica, cuando los sumandos son muchos y complicados, pueden escribirse á parte los numeradores uno debajo de otro, como se hace con los enteros; pero cuando el alumno haya adquirido bastante ejercicio puede dejarlos en su lugar. Véase el siguiente ejemplo $\frac{207}{5500}+\frac{349}{5500}+\frac{534}{5500}+\frac{350}{5500}=\frac{7138}{5500}$, simplificando esta suma por 11 y por 4, ó si se quiere dividiendo de una vez por el máximo comun divisor 44, resulta igual á $\frac{177}{125}$, y sacando los enteros tenemos $1+\frac{52}{125}$.

Esta advertencia de simplificar y reducir á entero ó mixto, es bueno tenerla presente en las demas operaciones de quebrados.

235. P. Cómo se adicionan los quebrados que tienen diferentes denominadores?

R. Se reducen primero á un comun denominador, y luego se practica lo mismo que en el primer caso. Así $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{2}{3}+\frac{16}{36}+\frac{7}{12}=\frac{27+20+24+16+21}{36}=\frac{108}{36}=3$.

*236. Demostracion.—Si los sumandos tienen un mismo denominador, siendo entónces las partes todas del mismo tamaño, haciendo abstraccion del denominador escrito, se pueden considerar como números enteros homogéneos, como *cuartos*, *décimos*, etc.; reunidas, pues, en una suma todas esas partes iguales, lo que se hace sumando solo los numeradores, para que el tamaño de las partes no varie, se da á la suma la misma denominacion que tenian los sumandos, á saber, el mismo denominador.

Si los denominadores de los sumandos son diferentes, esas partes consideradas como unidades son heterogéneas; luego no pueden sumarse así (N. 66); pero se hacen homogéneas reduciéndolas á un comun denominador.

237. P. Cómo se adiciona cuando entre los sumandos se hallan números enteros y mixtos ademas de los quebrados?

R. Se pueden en tal caso reducir los enteros y mixtos á quebrados y practicar en seguida las reglas dadas; pero es mas corto usar la siguiente regla. Se escriben los sumandos uno debajo de otro, como se hace con los enteros; se suman los quebrados solos, reduciéndolos á un comun denominador, si no lo tienen, y escribiendo al lado de cada uno su equivalente reducido; esta suma parcial se simplifica, si se puede, y se escribe debajo de los quebrados primitivos; pero si es quebrado impropio se sacan los enteros,