numerador la parte entera seguida del primer período sin comas decimales, y de este número se resta la parte entera; y por denominador tantas cifras 9 cuantas son las del período. Así 45,,7272... $=\frac{4572-45}{99}=\frac{4527}{99}=\frac{503}{11}$.

291. P. Cómo se convierte en su generatriz una fraccion decimal periódica mixta?

R. Se escriben por numerador las cifras decimales no periódicas, empezando desde la primera significativa, y en seguida todas las cifras de un período sin excepcion, de este número se resta el número representado por las cifras decimales no periódicas; por denominador se ponen tantas cifras 9 cuantas son las cifras de un período seguidas de tantos ceros cuantas son las cifras decimales no periódicas. Luego se simplifica, si hay lugar. Así 0,,42370370... $=\frac{42370-42}{99900}=\frac{42328}{99900}=\frac{286}{675}$; 0,,58333... $=\frac{583-58}{900}=\frac{525}{900}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$ (N.º 283); 0,,040707... $=\frac{407-4}{9900}=\frac{403}{9900}$; 0,,00272727.... $=\frac{27}{9900}=\frac{3}{1100}$: en este último caso nada se resta del período 27, porque los dos ceros no periódicos que preceden por ser cifras insignificativas no tienen valor.

Si la periódica mixta es precedida de una parte entera, se puede reducir á quebrado comun impropio como sigue. Se toma por numerador la parte entera, se colocan en seguida las cifras decimales no periódicas y luego las de un período quitando las comas decimales, y de este número se resta la parte entera seguida de las cifras decimales no periódicas; el denominador será compuesto de tantos 9 cuantas son las cifras de un período, seguidos de tantos ceros cuantas son las cifras decimales no periódicas. Así 124,,24747... $=\frac{124247-1242}{990}=\frac{123005}{990}=\frac{24601}{198}$.

292. P. Cómo se hace la prueba de la conversion de una fraccion comun en decimal, y de una decimal en su generatriz?

R. Las dos operaciones pueden servirse mútuamente de prueba; así despues de haber convertido por ejemplo la fraccion $\frac{3}{4}$ en su equivalente decimal 0,,75, se puede hacer la prueba convirtiendo esta última en su generatriz, y si la operacion está bien hecha ha de volver la fraccion $\frac{3}{4}$ despues de la simplificacion. Viceversa, despues de haber convertido la fraccion 0,,045045.... en su generatriz $\frac{5}{111}$, se haria la prueba convirtiendo $\frac{5}{111}$ en decimal.

*293. Demostracion de las tres reglas precedentes.—Para la primera basta reparar que por su naturaleza la fraccion decimal exige que el denominador esté suplido; luego con solo el hecho de expresarlo, la fraccion deja de ser decimal, y no difiere en nada de una fraccion comun.



*294. Para la segunda demostraremos primero el lema siguiente, á saber: *Toda fraccion comun que tiene por numerador la unidad y por denominador un número cualquiera de 9, convirtiéndola en decimal, no da en su desarrollo periódico otra cifra significativa mas que 1, precedida de tantos ceros cuantos son los 9 del denominador ménos uno.* Así:

$$\frac{1}{9}=0,,1111....$$
$$\frac{1}{99}=0,,010101....$$
$$\frac{1}{999}=0,,001001001....$$

La razon es que como aquí se divide 10, 100, 1000, etc. por 9, 99, 999, etc., el cociente es siempre 1, y la resta 1 idéntica con el númerador. Ademas se ve claramente que si el denominador es un 9, no hay en el período ningun cero; pero si es compuesto de dos 9 ha de salir un cero decimal y periódico ántes que el denominador pueda caber en el numerador lo ménos una vez, dando por cociente la cifra significativa 1; por lo mismo, si es compuesto de tres 9 saldrán dos ceros decimales y periódicos ántes del cociente 1; si fuesen cuatro los 9 del denominador, tres ceros precederian en el período á la cifra 1, y así en adelante; á saber, la cifra significativa 1 será precedida en el período de tantos ceros decimales cuantos son los 9 del denominador ménos uno.

Del lema precedente se infiere como corolario que las generatrices de las fracciones 0,,1111..., 0,,010101..., 0,,00010001..., etc., son $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{9999}$, etc.; á saber, una fraccion comun cuyo numerador es la unidad, y el denominador tantas cifras 9 cuantas son las cifras del período.

Si el período constase de otra cifra significativa diversa de 1, no seria tampoco difícil buscar su generatriz. Sea por ejemplo la fraccion periódica 0,,333..., analizándola se ve que es igual á 0,,111...×3; ahora la generatriz de 0,,111... es $\frac{1}{9}$; luego la generatriz de 0,,111...×3, ó de 0,,333... será $\frac{1}{9}\times3=\frac{3}{9}$, ó si se quiere simplificar, $\frac{1}{3}$. Un análisis semejante nos hace ver que la generatriz de 0,,444... es $\frac{4}{9}$, y así de las demas cifras.

Comparando un período de dos cifras, por ejemplo 0,,4242.... con la fraccion 0,,0101... se verá que 0,,4242....=0,,0101....×42, y por ser 0,,0101.... equivalente á $\frac{1}{99}$, será 0,,4242....$=\frac{1}{99}\times42=\frac{42}{99}$, y simplificando $=\frac{14}{33}$.

Del mismo modo comparando un período de tres cifras, por

ejemplo 0,,054054... con 0,,001001... se verá que 0,,054054... $=0,,001001\ldots\times 54$, y de consiguiente $\frac{1}{999}\times 54=\frac{54}{999}$, que simplificando da $\frac{6}{111}$.

De una manera análoga se razonaría con un período de cuatro, cinco ó mas cifras. De consiguiente queda demostrada en general la segunda regla (N. 290).

Si la periódica simple es precedida de enteros, se puede convertir en quebrado comun impropio, convirtiendo el número decimal en un número mixto y luego todo el número en quebrado. Pero mas sencilla es la abreviacion que indicamos (N. 290). Para demostrarla tomarémos el número decimal 45,,7272..., reducido á mixto da $45+\frac{72}{99}$. Ahora para reducir todo á 99 *avos* se ha de multiplicar 45 por 99 y al producto se agregan 72; mas reparando que $99=100-1$, tendrémos $45+\frac{72}{99}=\frac{45\times(100-1)+72}{99}$; haciendo la multiplicacion tenemos $\frac{4500-45+72}{99}=\frac{4500+72-45}{99}=\frac{4572-45}{99}$. Esta ultima expresion es precisamente la que dice la abreviacion indicada; concluyendo, pues, la operacion, tenemos $\frac{4527}{99}=\frac{503}{11}$. Un cálculo análogo siempre se podrá hacer con cualquiera otra periódica simple precedida de enteros.

*295. Por la tercera regla relativa á las fracciones decimales periódicas mixtas tomarémos la fraccion 0,,42370370...., y corriendo las comas decimales hasta despues de la última cifra no periódica tendrémos el número decimal 42,,370370... cuya segunda parte es una fraccion periódica simple equivalente á la generatriz $\frac{370}{999}$; mas como corriendo las comas dos lugares hácia la derecha se ha multiplicado el número por ciento (N. 274); luego para tener el verdadero valor equivalente del período se debe dividir por 100 el quebrado $\frac{370}{999}$, lo que se consigue agregando al denominador dos ceros, á saber, tantos ceros cuantas son las cifras no periódicas. En efecto, si las cifras no periódicas fuesen tres, cuatro ó mas, se tendria que agregar tres, cuatro ó mas ceros para que el valor del período no se alterase. Se tiene, pues, en este caso $\frac{370}{99900}$. Ademas las cifras no periódicas se reducen á una fraccion comun equivalente con escribir por debajo el denominador suplido, luego toda la fraccion periódica mixta se convierte aquí en $+\frac{42}{100}+\frac{370}{99900}$. Reduciendo á un mismo denominador se obtiene $\frac{(42\times 999)+370}{99900}$; y por ser $999=1000-1$ tendrémos $\frac{42\times(1000-1)+370}{99900}$; haciendo la multiplicacion indicada tenemos $\frac{42000-42+370}{99900}=\frac{42370-42}{99900}$. Esta última expresion está precisamente conforme con la regla tercera (N. 291); y como la misma análisis y el mismo cálculo se puede aplicar á cualquiera otra fraccion periódica mixta, queda demostrada en general esa misma regla. Haciendo, pues, la resta indicada se obtiene $\frac{42328}{99900}$, y simplificando por medio del máximo comun divisor se reduce á $\frac{2365}{5000}$.



Si la periódica mixta está precedida de una parte entera, para reducirla á quebrado comun impropio se puede hacer uso de la abreviacion que indicamos (N. 291). La demostracion es la misma que la que acabamos de dar. Sea en efecto 124,,24747...., tomando sus tres partes separadamente tenemos $124+\frac{2}{10}+\frac{47}{990}=\frac{1242}{10}+\frac{47}{990}$, reduciendo á un comun denominador tenemos..... $\frac{1242\times 99+47}{990}=\frac{1242\times(100-1)+47}{990}=\frac{124200-1242+47}{990}=\frac{124247-1242}{990}$. Esta última expresion está cabalmente conforme con la abreviacion indicada.

*296. Escolio.—Sobre la última expresion de la demostracion antecedente, que da lugar á la regla tercera, á saber $\frac{42370-42}{99900}$, harémos una observacion importante, y es que despues de hecha la resta indicada, el numerador del quebrado resultante nunca puede acabar en cero; así en este caso siendo 42328 remata en 8. La razon es que por rematar en cero seria preciso que la última cifra decimal no periódica fuese la misma que la última del período, así en este ejemplo la última cifra no periódica 2 deberia ser 0, lo mismo que la última del período; ó bien la última del período 0 deberia ser 2, lo mismo que la última no periódica. Pero entónces el período empezaria ántes de lo que se supone; así si fuese por ejemplo 0,,42372372.... el período no empezaria con la cifra 3 sino con la cifra 2; y si fuese 0,,40370370...., el período empezaria con la cifra 0 y no con 3. Luego la última cifra no periódica debe ser diversa de la última periódica, ó lo que es lo mismo haciendo la resta indicada en el numerador determinado por la regla, nunca puede resultar un numerador que remate en cero.

*297. Ya hemos demostrado (N. 286) que cuando el denominador de un quebrado comun irreducible, ó sea reducido ya á su mínima expresion, no tiene mas factores que 2 ó 5, su conversion en decimal da lugar á una fraccion finita. Hemos visto tambien que si el denominador del quebrado comun irreducible tiene otro factor primero diverso de 2 ó 5, en su conversion sale una fraccion decimal periódica. De las demostraciones que acabamos de dar, deducirémos ahora como corolario el modo de conocer de antemano si la fraccion ha de salir periódica simple ó periódica mixta.

Corolario I.—La fraccion decimal sale periódica simple cuando el denominador del quebrado comun irreducible no tiene por factor primero ni 2 ni 5. En efecto, toda fraccion periódica simple se reduce á su generatriz tomando por numerador las cifras del período, y dándole por denominador tantos 9 cuantas son las cifras del período (N. 294). Ahora por mas que se simplifique esta expresion, nunca podrá el denominador contener al factor 2 ó 5.

Corolario II.—La fraccion decimal sale periódica mixta cuando el denominador del quebrado comun irreducible contiene alguno de los dos factores 2 ó 5 ademas de algun otro factor diverso de éstos. En efecto, ya hemos demostrado (N. 286): 1º que cuando el denominador de un quebrado comun irreducible tiene un factor primero diverso de 2 ó 5, la fraccion decimal sale periódica. En 2º lugar hemos demostrado (N. 295) que el denominador de la generatriz de una fraccion periódica mixta es un número compuesto de tantos 9 cuantas son las cifras del período, seguidos de tantos ceros cuantas son las cifras decimales no periódicas, á saber, que es un múltiplo de 10 ó sea de 2 y de 5. En 3º lugar se ha demostrado (N. 296) que el numerador de la generatriz de una periódica mixta no puede rematar en cero. De consiguiente esta generatriz reducida á su mínima expresion debe tener por denominador un número que tenga algun factor primero diverso de 2 y 5, para que en la conversion pueda salir una fraccion periódica; y ademas alguno de los factores primeros 2 ó 5, porque aunque el numerador de la generatriz tenga á veces el factor 2 ó 5, nunca los puede tener ambos juntos, como que no puede rematar en cero; de consiguiente puede con la simplificacion desaparecer uno de ellos en el denominador, pero no ambos. Así si examinamos por ejemplo la fraccion irreducible $\frac{286}{675}$ que da lugar á la periódica mixta 0,,42370370.., verémos que el denominador $675=3\times3\times3\times5\times5$ (N. 189).

Escolio.—Notarémos aquí para mayor claridad que cuando queremos examinar de antemano la especie de fraccion decimal que debe salir de un quebrado comun propuesto, se ha de reducir éste á su mínima expresion; porque podria suceder que los dos términos del quebrado tuviesen unos mismos factores, los que desaparecen con la simplificacion.

---



# CAPITULO XIV.

## DE LAS CUATRO OPERACIONES DE LAS DECIMALES.

### *ADICION.*

298. P. Cómo se hace la adicion de los números decimales?

R. La adicion de los números decimales, sea que tengan unidades enteras ó no, se hace del mismo modo que la de los números enteros; á saber, se colocan los sumandos uno debajo de otro, de manera que formen columna las cifras de un mismo órden, formando columna tambien las dos comas decimales; luego se empieza á sumar por la derecha y se prosigue como con los números enteros no olvidando de poner en la suma las comas decimales debajo de las de los sumandos. Los ejemplos siguientes señalan la prática de la regla:

| I. | II. | III. |
|---|---|---|
| 45,,003 | 0,,625 | 0,,075 |
| 30,,25 | 49,, | 0,,37 |
| 4,,79065 | 0,,5074 | 0,,804 |
| 307,,8645 | 8,, | 0,,5204 |
| 0,,07842 | 2,,75 | 0,,83 |
| 89,,524 | | |
| 477,,51057 | 60,,8824 | 2,,5994 |

* Demostracion.—La demostracion de esta regla es la misma que la que se dió para la adicion de los números enteros (N. 79). Solo se agrega en ésta que se han de colocar las comas decimales en su lugar para dar á las cifras su valor relativo.

### *SUSTRACCION.*

299. P. Cómo se hace la sustraccion de los números decimales?

R. Se escribe el sustraendo debajo del minuendo del mismo modo que para la adicion, pero reduciendo á un mismo denominador las fracciones (N. 278), si no tienen el mismo número de cifras decimales. Luego se resta como si fuesen enteros (N. 87), y se colocan en la diferencia las comas decimales debajo de las de