12 onzas que es $\$0,,115 \times \frac{3}{4} = \$0,,08625$, y tenemos por producto total $45,,39625, igual aproximativamente á $45,,40.

En los casos en que el multiplicando ó el multiplicador sea mas complicado, mas vale usar simplemente de las reglas de los números 339, 340, 341, 342, 343, 344.

DIVISION.

347. P. Cuántos casos generales se distinguen para la division de los complexos?

R. Se pueden distinguir dos: el primero es cuando el dividendo y el divisor son de la misma especie; el segundo cuando el divisor es de especie diversa del dividendo.

348. P. Cómo se hace la division cuando los dos datos son de la misma especie?

R. El método mas sencillo en este caso es el siguiente: Se reducen los términos á la especie inferior que haya en ambos, ó por lo ménos en uno de ellos, se parte como en los números enteros, y el cociente se desarrolla en complexo de la especie que exige el estado de la cuestion, si queda alguna resta en el dividendo.

Aclaremos la regla con algun ejemplo, y sea el siguiente: se quiere saber cuantas varas de paño se comprarán con 59$, 4 reales, 1 medio, 1 cuartilla y 1 tlaco, supuesto que dicho paño cuesta 3$, 3 reales y 1 cuartilla la vara. Examinando el problema se ve que tantas varas podrémos comprar con 59$, 4 reales, etc., cuantas veces 3$, 3 reales y 1 cuartilla, precio de una vara, quepa en aquella suma; 59$, etc., es pues el dividendo, y 3$, etc., el divisor. Se reducen los dos términos á tlacos, que son la especie inferior que hay en el dividendo, y tenemos 3815 tlacos ; 218=17 varas, 1 pié y 6 pulgadas, como se ve de la operacion que sigue:

```
tlacos 3815 | 218
       1635   17 varas, 1 pié, 6 pulgadas
        109
          3
       ----
        327 piés
        109
         12
       ----
        218
        109
       1308 pulgadas
          0
```


El cociente entero que resulta 17, son varas segun lo determina el estado de la cuestion (N. 156), y despues de él queda una resta 109, ó sea $\frac{109}{218}$ de vara, quebrado que desarrollado en complexo (N. 329), como aparece de la operacion, da un pié y 6 pulgadas exactas.

El dividendo y divisor, siendo en este caso de la misma especie, se consideran como números abstractos, y la especie del cociente es determinada por el problema propuesto. Pueden tambien los dos datos considerarse como un quebrado propio ó impropio de la especie del cociente que se ha de convertir en complexo. Así en el ejemplo propuesto 3815 tlacos divididos por 218 tlacos, es lo mismo que $\frac{3815}{218}$ de vara.

349. Hé aquí otro problema: se pregunta en cuánto tiempo un tren de un ferrocarril recorrerá 454 leguas mejicanas, 1 media legua, 1166 varas y 2 tercias, supuesto que ande con la velocidad de 4 leguas por hora. El problema, como se ve, es de division; pues tantas horas empleará el tren cuantas veces 4 leguas quepan en 454 leguas, etc. Siendo los datos homogéneos se reducen á la especie inferior, que son las tercias, y tenemos $\frac{6821000}{60000} = \frac{6821}{60}$ de hora, quebrado que desarrollado en complexo resulta igual á 113 horas, 41 minutos, ó lo que es lo mismo 4 dias, 17 horas, 41 minutos.

*350. En este segundo problema, por ser incomplexo el divisor, puede la operacion abreviarse en algo del modo siguiente: se parte primero por 4 leguas la especie superior del dividendo, á saber las 454 leguas, lo que da por cociente 113 horas y una resta 2, que puedo del tiro convertir en 30 minutos, pues $\frac{2}{4}$ de hora$=30^m$. Lo que queda del dividendo, á saber, 1 media legua, 1166 varas y 2 tercias, se reduce á tercias, que debiéndose dividir por 4 leguas ó 60000 tercias, resulta igual á $\frac{11000}{60000} = \frac{11}{60}$ de hora$=11^m$; agregando éstos al primer cociente obtenido, á saber, á $113^h\ 30^m$, tenemos $113^h\ 41^m$, resultado igual al anterior.

De una abreviacion análoga se puede hacer uso todas las veces que siendo homogéneos los datos, el divisor es incomplexo y entero. Debemos advertir, sin embargo, que la resta que puede resultar de la division de la parte del dividendo de la misma especie que la del divisor incomplexo, no siempre se pueden reducir á primera vista á una especie inferior del cociente, lo que tiene lugar en el ejemplo propuesto, pues las dos leguas de resta divididas por 4 dan $\frac{2}{4}$ de hora en el cociente ó sea 30 minutos. Todas las veces, pues, que eso no se vea claro, se reduce la resta con todo lo demas

que queda del dividendo á la especie inferior de éste, y lo propio se hace con el divisor, y el quebrado que resulte se desarrolla en complexo para el cociente. Lo que hubiéramos podido practicar tambien en el problema precedente. En efecto, reduciendo las 2 leguas+1 media legua+1166 varas+2 tercias, en tercias, y las 4 leguas del divisor tambien en tercias, tenemos $\frac{41000}{60000}=\frac{41}{60}$ de hora, y por cociente total 113 horas 41 minutos.

351. P. Cómo se hace la division de los complexos cuando los datos son heterogéneos?

R. Este caso lo subdividimos en otros dos, á saber: puede darse que el divisor heterogéneo sea incomplexo, ó complexo. Si el divisor es incomplexo se puede hacer la division de los dos modos siguientes.—1.º Se parte por el divisor, considerado como abstracto, el dividendo complexo empezando por la especie superior, el cociente entero es de la especie superior del dividendo; la resta que queda se reduce á la especie inmediatamente inferior, al resultado se le agregan las unidades que haya en el dividendo de esa especie, y se parte la suma por el mismo divisor, el cociente será de esta segunda especie; lo propio se hace con la resta y con las demas especies hasta concluir.

Sea por ejemplo el problema siguiente: Un boticario ha comprado 3 libras 7 onzas de sulfato de quinina por 530$ 6 reales y 1 cuartilla, ¿cuál es el precio de una onza? Reduciendo las libras á onzas se ve que 43 onzas son las que compró el boticario, los 530$ 6 reales y 1 cuartilla se pueden considerar como el producto del precio de una onza, que se busca, por 43; partiendo, pues, el producto 530$, etc., por el factor 43, se obtiene por el cociente el otro factor, á saber el precio de una onza. El divisor 43 siendo incomplexo, pondrémos en práctica la regla precedente disponiendo la operacion como sigue:


```
530$ 6rs. 0med. 1cuart. | 43
100                     |------------------
 14                     | 12$ 2rs. 1med. 1cuart.
  8
 ---
112
  6
 ---
118 reales
 32
  2
 ---
 64 medios
 21
  2
 ---
 42
  1
 ---
 43 cuartillas
  0
```

Se empieza por dividir $530 por 43 y se escribe en su lugar el cociente entero 12$, la resta 14 se reduce á reales multiplicando por 8, y al resultado 112 se le agregan los 6 reales del dividendo, lo que da una suma de 118 reales; se parte ésta por 43 y se escriben 2 reales en el cociente, la resta 32 se reduce á medios multiplicando por 2, y como no haya medios en el dividendo, nada se agrega al producto 64 medios, sino que se parte tambien por 43, y se pone en su lugar el cociente 1 medio; la resta 21 se reduce á cuartillas multiplicando por 2, y al producto 42 se agrega la cuartilla del dividendo, la suma 43 partida por 43 da una cuartilla en el cociente y ninguna resta; de lo que se concluye que el precio de una onza es 12$, 2 reales, 1 medio y una cuartilla.

352. P. Cuál es el otro modo de dividir, cuando el divisor heterogéneo es incomplexo?

R. El segundo modo de dividir, cuando el divisor heterogéneo es incomplexo, se reduce á la siguiente regla: se reduce el dividendo complexo á la especie inferior que tiene, luego se parte por el divisor, y el cociente entero que resulta es de la especie inferior del dividendo; si hay una resta, será quebrado de una unidad de aquella especie, y se deja como está, pero el cociente entero se convierte en las especies superiores (N. 155).

Así por el ejemplo anterior se reducen á cuartillas los 530$, 6

reales y 1 cuartilla, y el resultado 16985 cuartillas se parte por 43, y resulta un cociente entero de 395 cuartillas sin ninguna resta, este cociente se convierte en las especies superiores, como se ve en la siguiente operacion:

cuartillas 16985	43			
408	395cuart.	2		
215	1	197meds.	2	
0		1	98rs.	8
			2	12$

Recogiendo el último cociente y las restas (N. 155), tenemos por precio de una onza 12$, 2 reales, 1 medio y 1 cuartilla, que es lo mismo que se obtuvo por el método anterior.

No cabe duda que el primer método es mas directo y ménos complicado que el segundo; éste, sin embargo, puede servir á veces como prueba del primero.

353. P. Cómo se hace la division cuando el divisor heterogéneo es complexo?

R. Se convierte el divisor complexo en quebrado comun ó decimal, y lo mismo se hace con el dividendo si tambien él es complexo; luego se parte segun las reglas que hemos dado hablando de los quebrados; el cociente se desarrolla en complexo de la especie del dividendo, cuando no se reduzca á unidades exactas.

Los ejemplos siguientes harán ver la práctica de esta regla: Un boticario habiendo despachado 2℔, 4℥, 3ʒ, 1℈ y 12 granos de sulfato de quinina, y subiendo sus recetas sobre este efecto á $455, se pregunta á cómo sale la onza. Del exámen del problema resulta que siendo $455 el valor de todas las onzas y partes de onza que se han despachado, dividiendo este valor total por las onzas y sus partes se obtendrá por cociente el valor de una onza que se busca.

Resolverémos el problema primero por quebrados comunes. Se convierte por esto el divisor en quebrado de onza (pues la onza es la unidad que aquí se considera), reduciéndolo ántes á la especie inferior, á saber á granos, y tenemos $\frac{16380}{576}$ de onza $=\frac{4095}{144}=\frac{455}{16}$, el dividendo por ser incomplexo se deja como está; tenemos, pues, $455 : $\frac{455}{16}=\frac{455\times16}{455}$ (N. 254), y quitando los factores comunes 455 (N. 252) = $16, que es el precio de una onza.

Resolviendo el mismo problema por decimales, se convierte en quebrado decimal de onza el divisor, á saber, se reducen las 2 libras á onzas y se le agregan las 4, y tenemos por resultado 28℥, las 3ʒ, 1℈ y 12 granos se convierten en quebrado de onza, lo que da

$\frac{252}{576}=\frac{63}{144}=\frac{7}{16}$ de onza; este quebrado convertido en decimal da ℥0,,4375, y agregado á ℥28 tenemos por divisor ℥28,,4375; luego $455 : 28,,4375 = $4550000 : 284375 = $16, cuyo cociente, precio de una onza, es idéntico con el obtenido anteriormente.

354. Sea este otro problema: Una fuente de plata, pesando 3 marcos, 5 onzas, 3 ochavas y 2 tomines, se ha vendido por 65$, 3 reales y 1 medio, ¿á cómo sale la onza? Es claro que dividiendo la costa de la fuente por las onzas y partes de onza de su peso, tendrémos el valor de una onza. Lo harémos primero por quebrados comunes. Por ser complexos los dos datos es preciso convertirlos ambos á quebrados de su especie, lo que da por dividendo $\$\frac{1047}{16}$ y por divisor $\frac{1412}{48}$ de onza $=\frac{706}{24}=\frac{353}{12}$; haciendo, pues, la division tenemos $\frac{1047}{16} : \frac{353}{12}=\frac{1047\times12}{16\times353}$, y quitando los factores comunes ó dividiendo por 4 los factores 12 y 16 (N. 252) $=\frac{1047\times3}{4\times353}=\frac{3141}{1412}$ de peso. Luego se desarrolla en complexo el cociente quebrado, y ponemos aquí por extenso la operacion para indicar alguna abreviacion á que puede dar lugar este ejemplo:

$3141	1412	706	353	
317	2$ 1rl.	1med.	1cuart.	$+\frac{65}{353}$.
8				
reales 2536				
medios 1124				
cuartillas 418				
65				

Se parte el numerador por el denominador, y tenemos 2$ por cociente y una resta 317$, que multiplicada por 8 se reduce á 2536 reales; partiendo éstos por el divisor 1412 tenemos en el cociente 1 real y una resta 1124, segun la regla del N. 329 debiera multiplicarse por 2 para reducirla á medios; pero observando que el divisor 1412 es divisible por 2, será mas oportuno, si se quiere, dividirlo por 2, y dividir luego la resta 1124, considerada como medios, por el divisor 706 que se escribe al lado del primero; pues de este modo, sin cambiar el valor del cociente, se tiene la ventaja de dividir por un número menor, lo que facilita la operacion. Hecha la division, resulta el cociente 1 medio, y 418 de resta; en lugar de multiplicar ésta por 2 para reducirla á cuartillas, se divide por 2 el divisor 706, y se parte la resta 418 considerada como cuartillas por 353, se pone en su lugar el cociente parcial 1 cuartilla, y queda una resta 65; tenemos, pues, por cociente total, que es el

valor de la onza de plata que se busca, 2$, 1 real, 1 medio, 1 cuartilla$+\frac{65}{353}$.

355. P. Antes de resolver el problema por decimales, decidme qué aproximacion se ha de tomar cuando la conversion de los complexos en decimales no sale exacta?

R. Se pueden seguir las dos reglas siguientes: 1.ª Si uno de los datos sale un número decimal exacto, se deja como está; en cuanto al otro inexacto, se ve cual de los dos requerria mas cifras decimales, segun la regla de aproximacion del N. 333, si ambos fuesen inexactos, y otras tantas deben tomarse en el dato inexacto. Ademas de esto, si el dato inexacto es el divisor, se averigua cuantas cifras deben salir en la parte entera del cociente, lo que puede conocerse de antemano (N. 132) de la parte entera que tienen los datos, y otras tantas cifras decimales mas se le deben agregar al divisor inexacto. Pero si el dato inexacto es el dividendo, solo se le agrega una cifra decimal mas. Si esto no obstante el dato exacto tuviese mas cifras decimales, se igualará en el dato inexacto este número agregando las cifras decimales que falten. Por la última cifra decimal que se coge, se observa ademas la regla del N. 288.

2.ª Si ambos datos salen inexactos, se ve cual de los dos requiere mas cifras decimales segun la regla del N. 333, y otras tantas se cogen para cada uno. Ademas se examina la parte entera de los datos para conocer de antemano cuantas cifras deben salir en la parte entera del cociente, y otras tantas decimales se agregan á cada uno de los datos. En cuanto á la última cifra decimal que se coge, se cuidará de agregar una unidad á la del dividendo, si lo propio se hace con la última del divisor, y viceversa se descuidará en el dividendo la resta que queda despues de la última que se coge, si se descuida la resta despues de la última del divisor.

356. P. Resolved por decimales el problema anterior aplicando lo que se dice en estas reglas.

R. Se convierte en decimal el dividendo 65$, 3 reales, 1 medio, y resulta el número decimal exacto $65,,4375; por el divisor 3 márcos, 5 onzas, 3 ochavas y 2 tomines, se convierten en decimal las partes de onza que tiene, á saber 3 ochavas y 2 tomines, ó lo que es lo mismo $\frac{20}{48}=\frac{5}{12}$ de onza; esta conversion da lugar á la fraccion decimal periódica 0,,4166.... Se examina, pues, cual de los dos datos requiere mas cifras decimales por la aproximacion, segun el N. 333, y se ve que ambos solo requieren dos; y dos tambien deben tomarse ante todo en el divisor. Luego se averigua

cuantas cifras deben salir en la parte entera del cociente; lo que se conoce de la parte entera del dividendo que es aquí $65 y del divisor que es 29 onzas, de lo que resulta que una sola será la cifra de la parte entera del cociente, pues 65 dividido por 29 no puede dar mas de una cifra en la parte entera del cociente. Se agrega luego al divisor una cifra mas, con la que tenemos tres; mas como el dividendo exacto tiene cuatro decimales, se le agrega otra al divisor para igualar observando la regla del N. 288, y tenemos por divisor 29,,4167; desarrollando, pues, en complexo el quebrado $\$\frac{654375}{294167}$, tenemos por precio de una onza 2$, 1 real, 1 medio, 1 cuartilla$+\frac{54143}{294167}$, resultado aproximado al que se obtuvo por el método anterior con una diferencia ciertamente menor de media cuartilla.

357. Para mayor inteligencia de las reglas propondrémos este otro problema: suponiendo que 12 varas cúbicas+2 piés cúbicos +728 pulgadas cúbicas de agua pesen 619 arrobas, 20 libras, 15 onzas, 1 adarme, 26 granos$+\frac{22}{27}$ de grano, se quiere saber cuanto pesa un pié cúbico de agua. Dividiendo el peso total de 619 arrobas y sus partes por los piés cúbicos de agua que hay y sus partes obtendrémos el peso de un pié cúbico. Las arrobas, pues, y sus partes son el dividendo, y los piés cúbicos y sus partes el divisor. Resolverémos primero el problema por quebrados comunes: se reduce á veintisieteavos de grano el dividendo, y dándole por denominador 6220800, número que expresa los 27 avos de grano que hay en una arroba, tenemos por dividendo $\frac{3855386816}{6220800}=\frac{48193532}{777600}=\frac{120496463}{194400}$ arrobas; el divisor se reduce á pulgadas cúbicas y se le da por denominador las pulgadas cúbicas que hay en un pié cúbico, lo que da $\frac{564056}{1728}=\frac{70507}{216}$ de pié cúbico; haciendo luego la division tenemos $\frac{120496463}{194400}$ arrobas : $\frac{70507}{216}=\frac{120496463\times216}{194400\times70507}$ arrobas, y por ser divisible por 216 el factor 194400 quitando los factores comunes (N. 252), tenemos el cociente$=\frac{120496463}{900\times70507}=\frac{120496463}{63456300}$ arrobas. Desarrollando este cociente quebrado en complexo de arroba, tenemos por peso de un pié cúbico de agua 1 arroba, 22 libras, 7 onzas, 8 adarmes, 32 granos exactos (N. 343, problema 2º).

Resolviendo por decimales el mismo problema, se reducen las 20 libras, etc., del dividendo á 27 avos de grano, lo que da 5211616, dando á este resultado el denominador 6220800 tenemos $\frac{5211616}{6220800}$ de arroba$=\frac{651452}{777600}=\frac{162863}{194400}$, quebrado que convertido en decimal da 0,,837772633 y una resta $\frac{1443}{1944}$ de la que podrian sacarse otras

decimales si fuesen necesarias. Reducidas asimismo á decimal las 728 pulgadas cúbicas del divisor $=\frac{728}{1728}=\frac{91}{216}$ de pié cúbico, tenemos la periódica mixta 0,,421296296... Como los dos términos salen inexactos, se examina cual de los dos requiere mas decimales de aproximacion segun el N. 333, y se ve que es el dividendo, pues si se quiere apreciar un veintisieteavo de grano, se requieren siete cifras decimales, miéntras apreciando en el divisor las pulgadas cúbicas, solo requiere cuatro; siete cifras decimales se han de tomar, pues, en cada término. Considerando ademas la parte entera de ambos términos, que es aquí 619 arrobas y 326 piés cúbicos, se ve que la parte entera del cociente constará de una cifra; se agregará, pues, una cifra decimal mas á cada término, con lo que tenemos ocho. Por último, como la cifra decimal que se sigue á la octava del divisor es 6, se ha de agregar una unidad á esta misma octava; y por esta razon, segun dice la regla, se agrega una unidad tambien á la octava decimal del dividendo. Tenemos, pues, por dividendo 619,,83777264 arrobas, por divisor 326,,42129630, y por cociente $\frac{61983777264}{32642129630}$ de arroba. Desarrollando este quebrado en complexo, tenemos por peso de un pié cúbico de agua 1 arroba, 22 libras, 7 onzas, 8 adarmes, 31 granos$+\frac{26,,9}{27}$ con una resta: cantidad muy aproximada al peso obtenido con los quebrados comunes, pues solo le falta ménos de 0,,1 de $\frac{1}{27}$ de grano para igualarlo.

358. P. No suelen los aritméticos proponer otro método de division, cuando el dividendo y el divisor son ambos complexos y heterogéneos?

R. Sí, suelen proponer tambien el siguiente: Se reduce á quebrado comun solo el divisor, y como para partir un número cualquiera por un quebrado (N. 254) se multiplica el dividendo por el denominador y se parte el producto por el numerador, lo propio se hace en este caso; á saber, se multiplica el dividendo complexo por el denominador del divisor, segun la regla del N. 339, y luego se parte el producto complexo por el numerador del mismo divisor, segun la regla del N. 351.

Aplicando esta regla al segundo problema propuesto anteriormente (N. 354), de la fuente de plata, en el que se busca el valor de una onza de plata labrada, se reduce á quebrado de onza el divisor 3 marcos, 5 onzas, 3 ochavas y 2 tomines, lo que da $\frac{1412}{48}=\frac{706}{24}=\frac{353}{12}$, y tenemos (65$, 3 reales, 1 medio) : $\frac{353}{12}=\frac{(65\$\ 3^{rs}.\ 1^{med.})\times 12}{353}$. Multiplicando, pues, 65$, 3 reales, 1 medio por 12, tenemos por producto 785$ 2 reales, que partido luego por 353 da por el valor

de una onza 2$ 1 real 1 medio 1 cuartilla$+\frac{95}{353}$, valor idéntico con el que se obtuvo en el N. 354.

Este método, aunque muy racional, no deja de ser á veces complicado por la doble operacion que hay que hacer de multiplicar un complexo por un incomplexo y luego partir otro complexo por un incomplexo.

*359. Demostracion.—Las reglas que acabamos de dar para la division de los complexos no necesitan demostracion, como que todas descansan en las de las reducciones á especies inferiores ó superiores, y de la conversion de los complexos en quebrados, sean comunes sean decimales, ó viceversa. Lo único que nos queda que demostrar son las reglas que hemos dado para la aproximacion del dividendo y divisor cuando en la conversion salen decimales inexactos (N. 355).

Decimos en la regla 1ª que si uno de los datos sale exacto, se deja como está, porque entónces no hay aproximacion para él. Decimos que en el otro inexacto se han de coger tantas cifras decimales cuantas son las que requiere el que necesita mas, conforme al N. 333, supuesto que ambos fuesen inexactos, y esto por dos razones: la primera, porque si una cifra decimal de un dato órden influye en el cociente de un modo todavía apreciable, tambien ha de influir la del mismo órden del otro dato; la segunda, porque como para hacer la division se ha de igualar ántes el número de cifras decimales de los datos, mas vale llenar los vacíos con cifras significativas y reales que con ceros, pues se disminuye de este modo la diferencia de la aproximacion, como que la última cifra inexacta se aleja mas de las unidades enteras.

Decimos luego que se deben añadir tantas cifras decimales mas al divisor inexacto, cuantas son las cifras que deben salir en la parte entera del cociente, á saber, en la parte que expresa las unidades de especie superior del cociente. Para demostrar esta parte muy importante de la regla es preciso observar que lo que influye directamente en la diferencia en mas ó en ménos del cociente es la unidad que se agrega á la última cifra decimal que se coge en el dato inexacto, ó la resta que se descuida despues de esta última cifra.

Analicemos, pues, de qué modo puede influir una unidad agregada ó quitada á la última cifra decimal que se aprecia en uno de los datos. Supongamos por ejemplo que el dividendo sea 1,,111, y el divisor sea tambien 1,,111, tenemos $\frac{1,,111}{1,,111}=1$; mas si agregamos una unidad á la última cifra decimal del divisor, tenemos