$\frac{1,,111}{1,,112}=1-\frac{1}{1112}$, pues $\frac{1111}{1112}+\frac{1}{1112}=\frac{1112}{1112}=1$; á saber, resulta entónces que falta en el cociente $\frac{1}{1112}$ ó sea una unidad de la especie que se quiere apreciar. Si doblamos el dividendo tenemos $\frac{2,,222}{1,,111}=2$, y agregando una unidad á la última cifra del divisor, tenemos $\frac{2,,222}{1,,112}=1+\frac{1110}{1112}=2-\frac{2}{1112}$; á saber, faltan en este caso en el cociente 2 unidades de la especie que se aprecia. Y así multiplicando por 3, por 4, etc., ó por 9 el dividendo, veriamos que faltarian en el cociente $\frac{3}{1112}$, $\frac{4}{1112}$, etc., ó $\frac{9}{1112}$. Multiplicando en efecto por 9, tendrémos $\frac{9,,999}{1,,111}=9$, y agregando una unidad al divisor será $\frac{9,,999}{1,,112}=8+\frac{1103}{1112}=9-\frac{9}{1112}$. La razon intrínseca de esta diferencia es que para que el divisor 1,,112 cupiese 9 veces en el dividendo 9,,999 seria preciso agregar 9 unidades mas de la última especie al dividendo. En efecto, siendo 1,,112=1,,111+0,,001, será 1,,112×9 =(1,,111+0,,001)×9=9,,999+0,,009. De aquí concluimos: primero, que si de la division de un número decimal por otro decimal ha de salir una sola cifra en la parte entera del cociente, y se agrega una unidad á la última cifra decimal del divisor, pueden faltar en el cociente por este hecho desde 1 hasta 9 unidades de la última especie que se aprecia.

Luego prosiguiendo el análisis vemos que tomando 10 veces el dividendo 1,,111, tenemos 11,,11=11,,110, de donde $\frac{11,,110}{1,,111}=10$; mas agregando una unidad á la última cifra decimal del divisor tenemos $\frac{11,,110}{1,,112}=9+\frac{1102}{1112}=10-\frac{10}{1112}$, á saber, faltarian en el cociente 10 unidades de la especie que se aprecia. Del mismo modo se veria que si el multiplicando fuese 11, 12, 20... ó 99 veces mayor, agregando en el divisor una unidad á su última cifra decimal, resultarian faltando en el cociente $\frac{11}{1112}$, $\frac{12}{1112}$, $\frac{20}{1112}$... ó $\frac{99}{1112}$; de donde se concluye 2º que si en el cociente han de salir dos cifras en su parte entera, la unidad que se agregue á la última cifra del divisor puede dar por resultado en el cociente una diferencia en ménos de 10 hasta 99 unidades de la especie que se aprecia.

Por un análisis semejante veriamos que si en la parte entera del cociente han de salir tres cifras, la diferencia en ménos que resultaria en el cociente si se agregase una unidad á la última cifra del divisor pudiera ser desde 100 hasta 999 unidades de la especie que se aprecia. Así es que si tuviese vg. que apreciar las centésimas, la diferencia podria ya en este caso influir sobre las unidades enteras del cociente, diferencia sin duda enorme. En efecto, multiplicando el dividendo 1,,111 por 999 y agregando la unidad á la última cifra del divisor en lugar del cociente 999, tendriamos $\frac{1109,,889}{1,,112}$ $=998+\frac{113}{1112}=999-\frac{999}{1112}$.

Por la misma razon se concluiria que si las cifras de la parte entera del cociente fuesen cuatro, de agregar una unidad á la última cifra del divisor resultaria en el cociente una diferencia en ménos desde $\frac{1000}{1112}$ hasta $\frac{9999}{1112}$, á saber, desde 1000 hasta 9999 unidades de la especie que se aprecia, y así en adelante; ó por decirlo todo en una palabra, *la diferencia en ménos que puede resultar en el cociente, en caso de agregar una unidad al divisor, puede llegar á ser un número de unidades de la última especie que se aprecia expresado por tantas cifras* 9 *cuantas son las cifras que han de salir en la parte entera del cociente.*

La demostracion que acabamos de dar siendo independiente del valor absoluto y relativo de las cifras, pues como hemos tomado por ejemplo el número 1,,111 podriamos tomar otro cualquiera, por ejemplo 9,,999, ó 6,,4932, ó 999,,999, y saldria la misma demostracion; de aquí concluimos que el último teorema que sacamos como conclusion es general.

De un modo análogo podemos demostrar este otro teorema tambien general, á saber, que *si se quita una unidad á la última cifra decimal del divisor, la diferencia en mas que resulta en el cociente puede llegar á formar un número de unidades de la última especie que se aprecia expresado por tantas cifras* 9 *cuantas son las cifras que han de salir en la parte entera del cociente.* Así $\frac{1,,111}{1,,111}=1$; mas $\frac{1,,111}{1,,111-0,,001}=\frac{1,,111}{1,,110}=1+\frac{1}{1110}$; $\frac{1,,111\times9}{1,,111-0,,001}=\frac{9,,999}{1,,110}=9+\frac{9}{1110}$; $\frac{1,,111\times99}{1,,111-0,,001}=\frac{109,,989}{1,,110}=99+\frac{99}{1110}$, y así en adelante.

Escolio.—Los dos teoremas precedentes relativos á la diferencia en mas ó en ménos, segun que se agrega ó se quita una unidad á la última cifra decimal del divisor, se deben limitar de este modo, á saber: que la diferencia expresada con tantas cifras 9 cuantas son las cifras que deben salir en la parte entera del cociente, es el máximum que pueda dar cualquiera division de esta clase.

Ahora se modifica esta diferencia de manera que nunca pueda llegar á formar una unidad de la última especie que se aprecia en el cociente, si se observa lo que dijimos en la regla, á saber, si se agregan en el divisor tantas cifras decimales mas cuantas son las cifras que han de salir en la parte entera del cociente. Supongamos que tres sean las cifras decimales que se han de apreciar, á

saber, las milésimas, y que una sea la cifra que ha de salir en la parte entera del cociente, agregando una cifra decimal mas al divisor y aumentando ésta de una unidad de su especie, á saber, de 0,,0001, la diferencia que resulta en el cociente será desde 1 hasta 9 unidades de esta especie, que nunca podrán llegar á formar 0,,001 de diferencia. Así, tomando por dividendo 1,,111 y por divisor inexacto tambien 1,,111, si en lugar de agregar al divisor 0,,001, agregamos 0,,0001 tendrémos $\frac{1,,1110}{1,,1111}=1-\frac{1}{11111}$, diferencia menor de 0,,001; por lo mismo $\frac{1,,111\times9}{1,,111+0,,0001}=\frac{9,,9990}{1,,1111}=9-\frac{9}{11111}$, diferencia que no llega á formar $\frac{1}{11111}$ que es la última especie que se aprecia en el caso supuesto. Del mismo modo se verá que si han de salir dos cifras en la parte entera del cociente, cogiendo dos cifras decimales mas en el divisor, y á la última de éstas agregando una unidad, la diferencia que resulta en el cociente no podrá formar una unidad de la especie que se aprecia; porque por ejemplo $\frac{1,,111\times99}{1,,111+0,,00001}=\frac{109,,98900}{1,,11101}=99-\frac{99}{111101}$; en donde se ve que la diferencia $\frac{99}{111101}$ no puede llegar á formar $\frac{1}{11111}$ que es la última especie que se aprecia en el caso que hemos supuesto.

Lo propio resultaria de agregar tres, cuatro, etc. cifras decimales al divisor inexacto, segun que hayan de salir tres, cuatro, etc. cifras en la parte entera del cociente, á saber, la diferencia del cociente nunca podrá llegar á formar una unidad de la especie que se aprecia. Porque aunque sea verdad que en estos casos se aumente el número de las cifras del numerador del quebrado que expresa la diferencia en el cociente, se aumenta tambien proporcionalmente el número de las cifras del denominador.

Lo que acabamos de demostrar de la diferencia en ménos en el cociente en la suposicion que se agregue una unidad á la última cifra del divisor inexacto, debe entenderse de la diferencia en mas en la suposicion de quitarse á la última cifra del divisor inexacto una unidad, pues su demostracion estriba en los mismos principios.

Decimos luego en la regla que generalmente se puede conocer de antemano, cuantas cifras han de salir en la parte entera del cociente con solo comparar las partes enteras del dividendo y divisor. La razon es que como para hacer la division de números decimales se ha de igualar en ambos términos el número de cifras decimales, la parte decimal de ellos nunca podrá hacer que salga una cifra mas en la parte entera del cociente. Solo sí podria hacer que saliese una cifra ménos; pero esto poco importa, porque todo lo mas que puede suceder es que se agregue entónces en el divisor una

cifra decimal que no es precisa, es verdad, pero que tiene por resultado una diminucion en la diferencia del cociente, lo que favorece al contrario nuestro intento. Si tomamos por ejemplo 9,,999 por divisor y 9,,999×99=989,,901 por dividendo, y si comparamos la parte entera del dividendo 989 con la parte entera del divisor 9, vemos que da por resultado en la parte entera del cociente tres cifras; mas si comparamos todo el dividendo 989,,901 con todo el divisor 9,,999 ó sea $\frac{989901}{9999}$, vemos que solo da en el cociente dos cifras, como que el cociente no puede ser mayor que el factor 99 por el que se ha multiplicado el divisor.

Sin embargo, es cierto que esta diferencia nunca podrá pasar de una cifra en el cociente, porque cualquier producto nunca podrá tener mas de tantas cifras cuantas son las de los dos factores juntos; así vg. 9,,999×99, que son las cifras significativas mas grandes, no pueden dar en el producto mas de tantas cifras cuantas son las del multiplicando, mas las del multiplicador, resultando en este caso seis, como se ve en el producto 989,,901. Pero para hacer la demostracion de este teorema mas patente y mas general tomarémos por multiplicando un número compuesto de puras cifras 9, por ser esta cifra la mas grande entre las significativas, por ejemplo 9999; si multiplicamos este número por un factor de una cifra, es claro que este factor no podrá ser mayor de 10, y sin embargo 9999×10 =99990, agregando solo una cifra mas en el producto á las del multiplicando; si multiplicamos el mismo número 9999 ó cualquiera otro por un factor de dos cifras, no podrá éste tampoco ser mayor de 100 y sin embargo 9999×100=999900, con dos cifras mas en el producto; de aquí se ve claro que si multiplicamos éste ó cualquiera otro número por un factor de tres, de cuatro, etc. cifras, el producto no podrá tener sino tres, cuatro, etc. cifras mas de las que tiene el multiplicando, ó lo que es lo mismo, no pueden resultar en el producto mas cifras de las que haya en ambos factores juntos. Ahora, si el multiplicando es un número decimal y el multiplicador un número entero, como suponemos en nuestro caso, el aumento de cifras en el producto tiene lugar en la parte entera y no en la parte decimal, por ejemplo 9,,999×9=89,,991. De aquí resulta que si dividimos luego la parte entera del producto por la parte entera del mismo número que se multiplica, puede resultar en el cociente una cifra mas de las que resultarian dividiendo todo el producto por todo el factor que se multiplica, pero no mas de una. En efecto, sea 9,,999; si multiplicamos este número por un número entero de dos cifras, puede dar en la parte entera del producto tres

cifras, las cuales divididas por la cifra 9, que es la parte entera del número 9,,999, pueden dar por cociente tambien tres cifras, pero no mas, en lugar de las dos que darian dividiendo todo el producto por todo el factor 9,,999; y así, si lo multiplicamos por un número de tres cifras, pueden resultar en la parte entera del producto cuatro cifras, y cuatro cifras tambien en el cociente en lugar de tres; si multiplicamos por un número de cuatro cifras, podrian á lo mas resultar cinco cifras en la parte entera del producto, y por consiguiente tambien cinco cifras en el cociente en lugar de cuatro; y así en adelante, siempre con la diferencia de una cifra y nada mas, que es el teorema que queriamos demostrar. Y como este mismo raciocinio es aplicable, cualquiera que sea el número y el valor absoluto de las cifras de la parte entera del factor que escojamos, el teorema queda demostrado generalmente.

Mas lo que mas nos interesa demostrar es el otro teorema, á saber: que *nunca puede suceder que de la comparacion que hacemos de la parte entera del dividendo y divisor decimales resulte en la parte entera del cociente una cifra ménos de las que resultarian de dividir todo el dividendo por todo el divisor.*

Para demostrar el teorema tenemos que demostrar el siguiente lema, á saber: que *el producto de dos números enteros no puede tener ménos cifras de las que haya en los dos factores juntos ménos una.* Tomemos por ejemplo por multiplicando el número 1111, y por multiplicadores los números mas pequeños que puedan expresarse con una, con dos ó con mas cifras, que son la unidad si se trata de una cifra, ó la unidad seguida de ceros, si se trata de números que tengan mas de una cifra. En estos casos veremos que siempre resulta en el producto una cifra ménos de las que hay en los dos factores juntos; y por consiguiente, si cuatro vg. son las cifras del multiplicando y una la del multiplicador, resultarán en el producto cuatro cifras solamente en lugar de cinco; si dos son las cifras del multiplicador, resultarán cinco en el producto en lugar de seis; si el multiplicador tiene tres cifras, resultarán seis en lugar de siete, y así en adelante, siempre una ménos y nada mas. En efecto $1111 \times 1 = 1111$; $1111 \times 10 = 11110$; $1111 \times 100 = 111100$, etc. Y como no podemos coger multiplicadores enteros mas chicos de los que suponemos, y el lema es independiente del número y del valor absoluto de las cifras del multiplicando, queda demostrada en general su verdad.

Puesto esto, si el multiplicando que cogemos es un número decimal, por ejemplo 1,,111, sucede que multiplicándolo por los factores

1, 10, 100, etc., resultará en su parte entera el mismo número de cifras que tenia, si el multiplicador tiene una cifra; una cifra mas si el multiplicador tiene dos cifras, y dos mas si el multiplicador tiene tres, etc.; pues $1,,111 \times 1 = 1,,111$; $1,,111 \times 10 = 11,,110$; $1,,111 \times 100 = 111,,100$, etc. Ahora, cogiendo por divisor de estos productos un número igual al multiplicando, y dividiendo la parte entera de los productos por la parte entera del divisor, resultará en el cociente una cifra si hemos multiplicado por 1, dos cifras si hemos multiplicado por 10, tres cifras si por 100, etc., lo mismo que resultaría de dividir todo el dividendo por todo el divisor. En efecto, $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{11}{1} = 11$, $\frac{111}{1} = 111$, etc., lo mismo que $\frac{1,,111}{1,,111} = 1$, $\frac{11,,110}{1,,111} = 10$, $\frac{111,,100}{1,,111} = 100$, etc. La razon es que la parte entera del multiplicando, que cogemos, cualquiera que sea el número de cifras que tenga, siempre resulta la misma al principio de la parte entera del producto con esta clase de multiplicadores, cuya única cifra significativa es la unidad. De donde resulta que la parte entera del divisor, idéntica con esa parte del producto, siempre ha de caber en ella por lo ménos una vez. Cojamos vg. por multiplicando 99,,173 en lugar de 1,,111, y veremos que $99,,173 \times 1 = 99,,173$; $99,,173 \times 10 = 991,,730$; $99,,173 \times 100 = 9917,,300$, etc. En todos estos productos siempre encontramos al principio de la parte entera 99, que es la parte entera del multiplicando y por lo mismo del divisor que suponemos 99,,173. Y como las cifras decimales, tanto del producto como del divisor, sean iguales en número por exigirlo así la regla de la division de los decimales, nunca podrá salir en el cociente que resulta de la division de la parte entera del producto por la parte entera del divisor una cifra ménos de las que saldrán de la division de todo el producto por todo el divisor, que es el teorema que teniamos que demostrar. La demostracion queda pues general si reparamos que los multiplicadores que hemos considerado aquí son los mas pequeños que puedan existir entre los números enteros. En efecto, si en lugar de ellos cogiésemos multiplicadores mas grandes, ya es evidente por lo que demostramos con el otro teorema precedente, que la diferencia en el cociente podria ser de una cifra mas, pero nunca de una ménos.

De los dos teoremas precedentes inferimos, pues, que podemos conocer, sin temor de aumentar la diferencia, el número de cifras que han de salir de una division de decimales en la parte entera del cociente, comparando solamente la parte entera del dividendo y del divisor, como dice la regla primera.

Decimos luego en la 1.ª regla (N. 355), que si el dato inexacto

es el dividendo, basta agregar una cifra decimal mas al número de las que se aprecian, y esto se debe entender, cualquiera que sea el número de cifras que salga en el cociente. La razon es que la unidad que se agrega ó se quita á la última cifra decimal del dividendo, no puede dar en el cociente mas diferencia que una unidad en mas ó en ménos de la última especie que se aprecia. En efecto, si suponemos un dividendo que contenga un número cualquiera de veces á un divisor, y agregamos una unidad á la última cifra decimal del dividendo, éste contendrá al divisor el mismo número de veces, y solo sobrará una resta igual á una unidad de la última especie que se aprecia. Por lo mismo, si se le quita una unidad á la última cifra del dividendo, solo le faltará una unidad de la última especie apreciable para que el dividendo quepa en él el mismo número de veces. Sea por ejemplo el dividendo $1,,111 \times 8 = 8,,888$, el divisor 1,,111 cabe en él 8 veces; mas si agregamos una unidad á la última cifra del dividendo, tenemos $\frac{8,,889}{1,,111} = 8 + \frac{1}{1111}$; y si quitamos una unidad á la última cifra del dividendo, tenemos $\frac{8,,887}{1,,111} = 8 - \frac{1}{1111}$. Ya se ve que este resultado es independiente del número y del valor absoluto de las cifras del dividendo y divisor.

Se modifica, pues, esta diferencia con solo agregar una cifra decimal mas al dividendo, como dice la regla, porque entónces la unidad en mas ó en ménos que puede resultar en el cociente es de especie inferior á la que se aprecia.

Lo que sigue en la regla no necesita demostracion. Pasarémos pues á la segunda regla, en la que suponemos que ambos datos sean inexactos. Las dos primeras partes no necesitan demostracion, como que quedan ya demostradas en la regla anterior. Solo demostrarémos la última parte, á saber: que si á la última cifra decimal que se coge en el divisor se agrega una unidad, ó se descuida la resta que le sigue, lo propio se ha de hacer con la última del dividendo. Primero se agrega á la última cifra del divisor una unidad ó se descuida la resta, segun el N. 288, porque el divisor es el que mas influye en la diferencia del cociente, como hemos visto; luego se hace la misma operacion con el dividendo, sin reparar cual es la cifra que se sigue á su última decimal: la razon es que de este modo se compensa en algo la diferencia que debe salir en el cociente, pues el dividendo está en razon directa con el cociente, miéntras el divisor está con él en razon inversa; esto es, cuanto mas grande es el dividendo, mas grande resulta el cociente; pero cuanto mas grande es el divisor, mas pequeño resulta el cociente, y viceversa.

La demostracion de estas dos reglas y de las dos que dimos para la multiplicacion, parecerán algo largas para un tratado elemental; pero como encontramos un terreno todavía baldío, ha sido preciso desmontarlo.

CAPITULO XVIII.

DEL SISTEMA MÉTRICO-DECIMAL Y RELACION DE LAS NUEVAS MEDIDAS MÉTRICAS CON LAS ANTIGUAS MEDIDAS MEJICANAS.

*360. Noticias historicas.—La necesidad de determinar con una medida uniforme, invariable, y de consiguiente natural y no arbitraria, que pudiese averiguarse en todo tiempo y lugar, y que fuese la norma de todas las medidas y pesas que tuviesen que usarse en el comercio, en las artes y las ciencias, no es una idea nueva sino muy antigua.

Carlomagno, que reinó desde el año de 768 al de 814, ya habia pensado en dar uniformidad á las medidas disparatadas de su vasto imperio, introduciendo la division decimal; pero distraido por guerras casi contínuas, no tuvo tiempo para ocuparse sériamente en esta reforma. Lo propio tentaron inútilmente muchos de sus sucesores.

Varios sabios opinaron luego que el prototipo de las medidas debia sacarse de las dimensiones de la tierra, lo que determinó á no pocos astrónomos á emprender la medida del globo. Entre los primeros ensayos de esta especie se cuenta el de Fernel, que en 1550 midió, contando las vueltas que daban las ruedas de su coche, un arco del meridiano entre París y Amiéns. Pero instrumentos tan toscos muy poca seguridad ofrecian en los resultados; así es que la cuestion de las medidas quedaba en el mismo estado.

En el reinado de Luis XIV el astrónomo Luis Picard midió de órden de su gobierno con mejores instrumentos la distancia que hay de Amiéns á Malvoisine, y dió las medidas de la tierra ya algo aproximadas. El mismo astrónomo propuso tambien por tipo del nuevo sistema de medidas la longitud del péndulo que bate los segundos sexagesimales en París. Várias otras medidas de la tierra se hicieron en seguida con el mismo objeto.

La opinion que habia emitido Newton sobre el achatamiento de la tierra hácia los polos, determinó al ministro de Francia Colbert