CAPITULO XX.

DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES Y DE ALGUNAS REGLAS QUE DE ELLAS DEPENDEN.

417. Llámase *razon* en Algebra la relacion de mayoría, minoría é igualdad que hay entre dos cantidades comparadas entre sí.

418. Las cantidades que se comparan entre sí se llaman términos de la razon; el que se compara lleva el nombre de *antecedente*, y el con que se compara de *consecuente*. Así si comparo 8 con 4, el primero será el antecedente, el segundo el consecuente.

419. De dos modos pueden compararse dos cantidades, ya buscando su diferencia, á saber, cuantas unidades ó partes de ella tiene la una mas ó ménos que la otra; ya su cociente, á saber, cuantas veces la una cabe en la otra.

De aquí dos especies de razones, *aritmética* la primera, *geométrica* la segunda. Así $8-4$, que tambien se suele escribir $8.4=4$, es una razon aritmética; y $\frac{8}{4}$ ó bien $8:4=2$ es una razon geométrica.

La diferencia ó el cociente, no indicados con los términos de la razon, sino expresados, como 4 ó 2 en los ejemplos anteriores, suelen á veces tomar el nombre de *exponentes*.

420. De lo que demostramos en el N. 223 se infiere que no varia una razon geométrica multiplicando ó partiendo sus dos términos por una misma cantidad. Así $8:4=16:8=4:2$, siendo el exponente siempre 2.

421. Una razon se dice *inversa* de otra, cuando tiene por antecedente la cantidad que la otra tiene por consecuente, v. g. $8:4$ es una razon inversa de $4:8$.

422. La igualdad de dos razones de la misma especie se llama *proporcion*. Y como las razones pueden ser aritméticas ó geométricas, las proporciones toman tambien las mismas denominaciones. Así, por ejemplo, $6-4=13-11$, que tambien se escribe $6.4:13.11$ es una proporcion aritmética, ó una *equidiferencia*; y $9:3=24:8$, es una proporcion geométrica. En lugar del signo de igualdad se suelen escribir cuatro puntos del modo siguiente: $9:3::24:8$, ∧

En Algebra nos ocupamos de las razones y proporciones aritméticas; en este tratado solo daremos de las proporciones geométricas lo que nos puede interesar, dejando el restot ambien para el Algebra.

∧ y se lee: 9 está á 3 como 24 está á 8; ó simplemente 9 á 3 como 24 á 8.

423. Los cuatro términos de una proporcion se llaman proporcionales entre sí; el primero y el tercero son antecedentes, el segundo y el cuarto consecuentes; el primero y el cuarto se dicen *extremos*, el segundo y el tercero *medios*.

424. Las proporciones se distinguen en *discretas* y *contínuas*. La proporcion es discreta cuando sus cuatro términos son diferentes, como $9:3::24:8$; y contínua cuando el antecedente de la segunda razon es igual al consecuente de la primera, v. g. $4:8::8:16$. La proporcion contínua suele escribirse con solo tres términos precedidos de una línea entre cuatro puntos, como sigue: $\div 4:8:16$, y se lee cuatro á ocho á diez y seis.

Algunas propiedades de las proporciones

425. Es propiedad fundamental de la proporpion que *el producto de los medios es igual al producto de los extremos*. Así de la proporcion $6:3::16:8$ tenemos $6\times8=3\times16$; pues cada uno de estos productos equivale á 48.

Para demostrar este principio de una manera general sin ocurrir al Algebra, observaremos que si el antecedente fuese igual al consecuente en cada razon no quedaría duda del principio; pues si fuese, por ejemplo,

$$6:6::16:16$$

no cabe duda que $6\times16=6\times16$. Mas siempre podremos hacer los consecuentes de una proporcion iguales á sus antecedentes, multiplicando los consecuentes por el exponente. Así en la proporcion

$$6:3::16:8$$

el exponente es 2, y multiplicando por él los consecuentes, tenemos

$$6:6::16:16.$$

Esta operacion siempre sera posible, cualesquiera que sean los términos de la proporcion. Con ella no se hace mas que multiplicar el producto de los medios y el de los extremos por la misma cantidad, á saber, por el expenente. Luego por el axioma del Núm. 17, si éstos productos son iguales despues de la multiplicacion, es porque lo eran antes.

426. De esta propiedad fundamental de la proporcion se deduce como una de las primeras consecuencias, que conocidos tres términos de una proporcion cualquiera, podremos conocer el cuarto sin

grande dificultad. *Si el incógnito es un extremo, se halla partiendo el producto de los medios por el otro extremo; y si es un medio, se encuentra partiendo por el otro medio el producto de los extremos.* Por mayor claridad el término incógnito lo llamamos x. Sea, por ejemplo, $5 : 25 :: 15 : x$, tendremos $x=\frac{25\times15}{5}=75$; sea luego esta otra $6 : 9 :: x : 15$, y tendremos $x=\frac{6\times15}{9}=10$.

La razon es que en el primer ejemplo tenemos el producto de los medios 25×15 igual al producto de los extremos $5\times x$ (Núm. 425); luego partiendo el producto 25×15 por el factor 5 (Núm. 159), debe resultar por cociente el otro factor x que buscamos. En el segundo ejemplo el producto de los extremos 6×15 es igual al producto de los medios $9\times x$; luego por una razon análoga partiendo 6×15 por el factor 9, debe resultar por cociente el factor x que se busca. Esta demostracion puede aplicarse á cualquiera proporcion, como es fácil de ver.

427. En la proporcion continua *el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio.* Asi en la proporcion $\div 4 : 8 : 16$, tenemos $4\times16=8\times8$. En efecto, resolviendo en discreta la proporcion continua precedente, tenemos $4 : 8 :: 8 : 16$, y por el N.º 425 $4\times16=8\times8$.

428. De aquí resulta que, conocidos dos términos de una proporcion contínua, se puede conocer el tercero incógnito. *Si este es un extremo, se obtendrá dividiendo el cuadrado del medio por el otro extremo; y si es incógnito el medio proporcional, se obtiene extrayendo la raiz cuadrada del producto de los extremos.* Sea por ejemplo, la siguiente $\div 7 : 21 : x$, será $x=\frac{21\times21}{7}$; sea esta otra $\div 4 : x : 36$ será $x=$ á la raiz cuadrada de 4×36.

En efecto, en el primer ejemplo por la propiedad precedente (Núm. 427), tenemos $7\times x=21\times21$, luego $x=\frac{21\times21}{7}$; en el segundo tenemos $x\times x$, ó sea el cuadrado de x igual á 4×36; luego la raiz cuadrada de 4×36 será igual á x.

429. Apoyados en la propiedad fundamental de la proporcion (Núm. 425), podemos *alternar* ó *invertir* los términos sin destruir la proporcion.

Se dice alternar los términos, cuando se coloca un medio en el lugar del otro, ó un extremo en lugar de su correspondiente extremo; é invertir cuando se ponen los medios en lugar de los extremos. Con solo alternar é invertir los términos, puede escribirse la proporcion de ocho maneras diferentes, como aqui se ve:

$3 : 6 :: 4 : 8$
$3 : 4 :: 6 : 8$
$6 : 3 :: 8 : 4$
$6 : 8 :: 3 : 4$
$4 : 8 :: 3 : 6$
$4 : 3 :: 8 : 6$
$8 : 6 :: 4 : 3$
$8 : 4 :: 6 : 3$

En todas estas mudanzas subsiste la proporcion; porque el producto de los medios siempre es igual en ellas al producto de los extremos.

430. *Se pueden tambien sin alterar la proporcion, multiplicar ó partir por el mismo número los dos términos de la primera razon, ó los dos de la segunda, ó todos.* Así la proporcion $4 : 8 :: 9 : 18$ puede cambiarse en esta otra $1 : 2 :: 9 : 18$, ó bien $4 : 8 :: 1 : 2$, dividiendo los términos de una de las razones por una misma cantidad. Y la proporcion $3 : 9 :: 6 : 18$ puede cambiarse en esta otra $1 : 3 :: 2 : 6$, dividiendo por 3 todos sus términos. Cambios análogos se pueden hacer multiplicando. La demostracion se deduce del Núm. 420.

431. De la propiedad precedente se infiere esta otra, que *sin alterar la proporcion se pueden multiplicar ó partir por una misma cantidad sus dos antecedentes ó sus consecuentes.* Así la proporcion $3 : 9 :: 6 : 18$ puede cambiarse en esta $6 : 9 :: 12 : 18$, multiplicando los dos antecedentes por 2; ó en esta otra $3 : 1 :: 6 : 2$, dividiendo por 9 los dos consecuentes.

Altérnense por la demostracion los términos de la proporcion, lo que nos conduce al caso del número anterior 430.

Regla de tres simple.

432. Llámase *regla de tres* aquella por la que, dados tres términos de una cuestion, se busca un cuarto incógnito que forme con ellos proporcion.

Señalando el incógnito con x, y colocando todos los términos en su lugar, la regla del N. 426 nos dice claramente lo que ha de hacerse para hallar la incógnita. Luego toda la dificultad de la regla de tres consiste en la colocacion de los términos.

433. Para hacerlo con acierto se deben hacer las siguientes observaciones.

1.ª En toda cuestion de regla de tres hay dos de los términos dados que son homogeneos, el otro es homogéneo con el incógnito,

y éstos son ambos heterogéneos de los dos primeros. Para mayor claridad llamarémos á los primeros *datos*, y á los segundos *resultados*.

2.ª Los resultados tienen cada uno una relacion de dependencia de uno de los datos.

3.ª Esta relacion ó razon puede ser directa ó inversa. Se dice directa, cuando creciendo ó disminuyendo uno de los datos, crece ó disminuye su correspondiente resultado; la razon es inversa, cuando aumentando el dato disminuye el resultado; y viceversa, aumenta el resultado disminuyendo el dato. De aquí tambien deriva la distincion de la regla de tres en *directa* é *inversa*.

434. Aclararemos todo esto con ejemplos. Sea el primero: 20 albañiles han hecho en un tiempo dado 60 varas de pared, se quiere saber cuantas varas harian 30 albañiles en un mismo tiempo, supuesto que trabajen con la misma actividad. En esta cuestion tenemos tres términos conocidos, y se busca un cuarto incógnito, á saber, las varas de pared que pueden hacer 30 albañiles: 20 albañiles y 30 albañiles son los dos datos homegéneos; 60 varas y las varas que se buscan son los dos resultados, tambien homogéneos entre sí, pero heterogéneos con los datos. Vemos ademas que como las 60 varas dependen de los 20 albañiles, así las varas que se buscan dependen de los 30. Por último, como mas albañiles haya, mas varas de trabajo harán, los datos están aquí en razon directa con los resultados.

435. Puesto esto, se colocarán los terminos de esta manera: fórmese la primera razon con los datos; en cuanto á la segunda consideramos que por estar aquí en razon directa los datos y los resultados, la misma razon que existe entre los datos, debe existir entre los resultados. En efecto, si el número de albañiles que van á trabajar fuese doble, triplo, la mitad, la cuarta parte, etc., de los 20 que han trabajado, el número de varas tambien que harian, seria doble, triplo, la mitad, la cuarta parte, etc., de las 60 que han hecho los 20 albañiles. Luego con los resultados formaremos la segunda razon, pero de manera que sea antecedente aquel cuyo dato correspondiente es antecedente de la primera razon, y consecuente aquel cuyo dato correspondiente en la primera razon es consecuente. Resultará, pues, la siguiente proporcion: 20 albañiles están á 30 albañiles, como 60 varas hechas por los 20 están á x, varas que deben hacer los 30, ó sea

$$20 : 30 :: 60 : x;$$

de donde se saca $x=\frac{30\times 60}{20}=90$.

La demostracion que acabamos de dar para la colocacion de los términos en esta cuestion es aplicable á toda regla de tres directa.

436. Para la regla de tres inversa nos valdrémos del ejemplo siguiente: 10 albañiles han hecho en 5 horas un cierto número de varas de trabajo, ¿cuántas emplearán 20 albañiles para hacer el mismo número de varas, suponiendo que las demas circunstancias quedan iguales? En esta cuestion la regla de tres, á que da lugar, es inversa, porque los datos están aquí en razon inversa con los resultados. En efecto, mas albañiles hay, ménos horas se han de emplear. Cómo se colocarán, pues, los términos? Se forma la primera razon con los datos: para la segunda se observa que entre los resultados no existe la misma razon que entre sus correspondientes datos, pero sí se ve que la razon es inversa; pues si el número de albañiles que han de trabajar fuese doble, triplo, etc., de los que han trabajado, el número de horas que se han de gastar seria la mitad, la tercera parte, etc., de las que se gastaron. Luego los resultados, que son los términos de la segunda razon, se han de colocar en órden inverso de sus correspondientes datos, para que las dos razones sean iguales y formen proporcion. Así en la cuestion propuesta tendrémos la proporcion, 10 albañiles á 20 albañiles :: x horas á 5 horas, ó sea

$$10 : 20 : x : 5;$$

de donde se saca $x=\frac{5\times 10}{20}=2\frac{1}{2}$.

437. Se puede tambien, si se quiere, poner siempre la x por cuarto término de la proporcion. Entónces se forma primero la segunda razon poniendo por antecedente el resultado cógnito, y por consecuente el incógnito. Luego para formar la primera razon se ve si la x consecuente debe ser mayor ó menor que su antecedente (lo que fácilmente se puede averiguar por las condiciones de la cuestion propuesta). Si ha de ser mayor, se pondrá por consecuente de la primera razon el dato mayor; si menor el consecuente de la primera razon sera tambien menor: porque solo de esta manera pueden ser iguales las dos razones. Así en la cuestion propuesta en el número anterior, formariamos primero la segunda razon $5h^s : xh^s$; luego como vemos que x horas ha de ser menor que 5 horas, pondriamos por consecuente de la primera razon 10 albañiles, dato menor que 20 albañiles, y tendriamos la proporcion

$$20 : 10 :: 5 : x;$$

de la que se infiere $x=\frac{5\times 10}{20}=2\frac{1}{2}$, que es el mismo resultado que

nos dió la proporcion anterior (N. 436); pero este segundo modo de colocar los términos es mucho mas sencillo que el primero.

438. Aplicando á las proporciones de las dos cuestiones propuestas los teoremas demostrados en los números 430 y 431, podrémos hacer algunas abreviaciones que suelen ocurrir en la resolucion de los problemas. Así observando que en la primera

$$20 : 30 :: 60 : x$$

los dos antecedentes 20 y 60 son divisibles por 20, se pueden reducir estos dos términos y resulta

$$1 : 30 :: 3 : x$$

de la que se saca $x=3\times30=90$, operacion mas sencilla que la indicada (N. 435) en $x=\frac{30\times60}{20}$.

En la práctica se suele hacer la reduccion borrando los términos primitivos, y escribiendo á lado ó arriba los cocientes que resultan en esta forma

$$\overset{1}{\cancel{20}} : 30 :: \overset{3}{\cancel{60}} : x$$

Si despues de hecha esta reduccion hubiese otras que hacer conforme á las propiedades de los números 430 y 431, se seguiria simplificando cuanto es posible.

La proporcion de la segunda cuestion

$$20 : 10 :: 5 : x$$

puede simplificarse dividiendo los dos términos de la primera razon por 10 y se trasformará en esta

$$\cancel{20} : \cancel{10} :: 5 : x$$

de la que se infiere $x=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ cuyo resultado es igual al que se habia obtenido (N.os 436 y 437).

Estas simplificaciones podrán hacerse todas las veces que en las proporciones haya términos divisibles por la misma cantidad conforme á los números 430 y 431.

439. Agreguemos algunos ejemplos para ejercicio de los alumnos.

1.º Sabiendo que el tren de un ferrocarril ha hecho en tres horas 15 leguas y 75 varas de camino, se pregunta en cuántas horas hará 201 leguas y 1005 varas, supuesto que ande con la misma velocidad. Reducidas las leguas á su mínima especie y hechas las demas simplificaciones, se saca por valor de la x 40 horas y 12 minutos.

2.º Por 37 arrobas 5 libras 4 onzas se han pagado $121,,0625, se pregunta cuánto costarian al mismo precio 179 arrobas 17 libras 9 onzas. Se encontrará aquí $x=$584,,033125.

3.º Un navío tiene víveres aun para 20 dias, y como segun el cálculo del capitan tiene que estar en mar todavía 30 dias, se pregunta en cuanto debe disminuirse la racion diaria de la tripulacion para que no falte. Considerando como 1 la racion diaria, se verá que debe disminuirse en $\frac{1}{3}$.

Regla de tres compuesta.

440. Sucede á veces en las cuestiones de la regla de tres que el valor de la incógnita depende de várias circunstancias, y por consiguiente que hay mas de tres términos conocidos. Entónces la regla de tres toma el nombre de *compuesta*, á diferencia de la que hemos considerado ántes que lleva el nombre de regla de tres *simple*.

441. Para demostrar cómo se resuelven estas especies de cuestiones nos servirémos de algunos ejemplos. Supongamos que 25 hombres trabajando 15 dias en una cantera han cortado 250 piedras, se quiere saber cuántas cortarán 100 hombres en 20 dias.

En esta cuestion la x depende en primer lugar de las 250 piedras cortadas, y en segundo lugar de las dos razones que hay entre los 25 y los 100 hombres, y entre los 15 dias y los 20. Pero suponiendo por un instante que el número de dias fuese igual en los dos casos, por ejemplo 15, la regla de tres seria simple y tendriamos la proporcion

$$25 : 100 :: 250 : x;$$

lo que daria $x=\frac{250\times100}{25}$. Pero el número de dias es desigual; luego formarémos esta otra proporcion: Si 15 dias me dan $\frac{250\times100}{25}$ piedras, 20 dias cuántas darán; ó formando cada razon con términos homogéneos, tendrémos

$$15 : 20 :: \frac{250\times100}{25} : x;$$

de la que resulta $x=\frac{250\times100\times20}{25\times15}$.

En esta expresion vemos que el valor de x se forma del resultado 250 piedras multiplicado por el producto de las dos razones $\frac{100}{25}$ y $\frac{20}{15}$, pues $\frac{100}{25}\times\frac{20}{15}=\frac{100\times20}{25\times15}$. Mas observarémos que este mismo resultado hubiéramos tenido si hubiésemos formado una proporcion cuyo primer antecedente fuese el producto de los 25 hombres por los 15 dias, datos relativos al resultado cógnito 250 piedras, y el primer consecuente el producto de los 100 hombres y 20 dias, datos relativos á x piedras; el antecedente de la segunda razon las 250 piedras y el consecuente la x, á saber:

$$25\times15 : 100 : \times20 :: 250 : x;$$

ó en otros términos, para conocer la x hubiéramos podido formar una proporcion cuya segunda razon tuviese por antecedente el resultado cógnito y la x por consecuente, y la primera razon fuese compuesta del producto de las demas razones colocadas en órden directo. Esta consecuencia se aplica, como puede verse claramente, á cualquier número de razones directas que hubiese en la cuestion.

Pero si algunas de las razones fuesen inversas con los resultados, entónces compondríamos como sigue la primera razon.

Supongamos que las piedras cortadas por los 25 hombres tuviesen 12 pulgadas de largo y 4 de ancho, y que las que han de cortar los 100 hombres deben tener 16 pulgadas de largo y 6 de ancho; entónces ya cambia el valor de la x, porque hay otras circunstancias de que depende.

En este caso considerarémos por un rato que lo ancho sea lo mismo. Como es diferente lo largo, y ademas los datos 12 pulgadas y 16 pulgadas de largo están en razon inversa con los resultados, que son piedras, tendrémos (N. 437) la proporcion

$$16 : 12 :: \frac{250\times100\times20}{25\times15} : x;$$

de la que resulta $x=\frac{250\times100\times20\times12}{25\times15\times16}$.

Haciendo el mismo raciocinio con la otra razon de lo ancho, que tambien es inversa, tendrémos esta otra proporcion

$$6 : 4 :: \frac{250\times100\times20\times12}{25\times15\times16} : x;$$

y luego $x=\frac{250\times100\times20\times12\times4}{25\times15\times16\times6}$.

Con esta última expresion podemos formar una proporcion que nos daria el mismo resultado, á saber:

$$25\times15\times16\times6 : 100\times20\times12\times4 :: 250 : x.$$

Obsérvese aquí que 25 hombres y 15 dias, factores del antecedente de la primera razon, son correspondientes de las 250 piedras, antecedente de la segunda; de la misma manera que 100 hombres y 20 dias, factores del consecuente de la primera razon, son correspondientes de x piedras, consecuente de la segunda; pero 16 pulgadas de largo y 6 de ancho, factores del primer antecedente, no son segun la cuestion propuesta correspondientes del antecedente segundo 250 piedras, como no lo son tampoco de x piedras las 12 pulgadas de largo y las 4 de ancho. La razon es que los primeros datos están en razon directa con los resultados, pero no así los segundos.

Obsérvese ademas que la primera razon no es mas que el producto de todas las razones propuestas en la cuestion, ménos la que existe entre la incógnita y su homogéneo, la que forma la segunda razon. En efecto, $\frac{25\times15\times16\times6}{100\times20\times12\times4}$ es lo mismo que $\frac{25}{100}\times\frac{15}{20}\times\frac{16}{12}\times\frac{6}{4}$ de las que unas son directas, otras inversas con $\frac{250}{x}$.

Ahora, como estos raciocinios los podriamos aplicar á otras condiciones, si las hubiese en la presente cuestion, y á todas las cuestiones que puedan proponerse de regla de tres compuesta: luego deducimos generalmente que *para resolver una cuestion de regla de tres compuesta, se forma una proporcion cuya segunda razon se expresa con los dos resultados, y la primera es el producto de las demas razones, con la advertencia de colocar todos los datos en órden directo ó inverso con los resultados á medida que están con ellos en razon directa ó inversa.*

Esta misma demostracion se ve en Algebra aun mas clara, como que se puede hacer uso allí de otra especie de cálculo.

442. En la práctica se suelen escribir primero para mayor claridad todos los términos homogéneos de dos en dos como sigue:

hombres,	dias,	pulgadas de largo,	pgs. de ancho,	piedras.
25	15	12	4	250
100	20	16	6	x;

luego se forma con la x y su homogéneo la segunda razon, y por la primera se van escribiendo en columna los datos de dos en dos, advirtiendo de ponerlos en órden directo ó inverso con los resultados segun que están con ellos en razon directa ó inversa, de esta manera:

$$\begin{array}{l} 25 : 100 :: 250 : x \\ 15 : 20 \\ 16 : 12 \\ 6 : 4 \end{array}$$

Como la primera columna contiene los factores del primer antecedente y la segunda los factores del primer consecuente, se puede hacer uso de las abreviaciones indicadas en el N. 438, cuando haya lugar. En estos casos se reduciria la proporcion á estos solos términos

$$3 : 100\times2 :: 10 : x$$

de donde se saca $x=666\frac{2}{3}$.

443. Hé aquí otro problema que puede servir de ejercicio. Se quiere saber cuantos hombres se necesitan para abrir un canal de 2572 varas de largo, 8 varas 0 pié y 6 pulgadas de ancho, $5\frac{1}{3}$ varas de hondo, trabajando 15 dias y 7 horas por dia, sabiendo que 50