55.—Prueba.—La substracción se prueba sumando el substraendo con la resta, y si no ha habido error, la suma debe ser igual al minuendo, porque la resta expresa la cantidad que le falta al substraendo para ser igual al minuendo.

56.—Casos.—Los casos de la substracción, son dos: 1º *Cuando hay que restar una cantidad de otra una sola vez.* 2º *Cuando una cantidad se debe restar de otra cuantas veces sea posible.*

Primer caso 445—387=58

Segundo caso, restar 151 de 453 cuantas veces se pueda.

```
 453
—151
----
 302
—151
----
 151
—151
----
 000 luego 453 es igual á 3 veces 151.
```

Como habrá podido observarse, estos dos casos son distintos, no porque sean diferentes los valores numéricos del minuendo y del substraendo, sino por *ser diversa la condición* de restar una cantidad de otra *una sola vez*, de la de restarla *cuantas veces sea posible.*

El primer caso se resuelve por la regla general, y la ejecución del segundo se facilita mucho por medio de la división, operación que no es más que el segundo caso de la substracción abreviado.

57.—Usos.—El primer caso tiene los usos á que da lugar el objeto de la operación, por lo que se emplea; primero, cuando se quiere conocer la diferencia entre dos cantidades; segundo, cuando se quiere encontrar un número que sumado con otro conocido, forme una cantidad propuesta, lo que equivale á hallar el *exceso* de un número sobre otro: y tercero, cuando se quiere quitar á un número el valor de otro: que es propiamente *restarlo.*

El segundo caso de la substracción tiene cuatro usos:

1º *Ver cuántas veces un número contiene á otro:* 2º *Reducir unidades de especie menor á mayor.* 3º *Conocido el valor de muchas unidades y el número de ellas, determinar el valor de una unidad.* 4º *Conocido el valor de muchas unidades y el de una sola, determinar el número de ellas.*

58.—Para ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

```
 84 367 965      30 409 700      45 000 040
—37 478 704     —15 700 967     —12 673 436
-----------     -----------     -----------
 46 889 261      14 708 733      32 326 604
```

Omitimos poner ejemplos de los usos del 2º caso, porque éstos se resuelven con más facilidad por medio de la división.

Nuestra Madre me dió

MULTIPLICACION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

59.—Ya hemos dicho en el párrafo 43, que cuando en la suma los sumandos son iguales, la operación se facilita por medio de la multiplicación, operación que es en realidad el segundo caso de la suma abreviado.

Cuando queremos sumar, por ejemplo, 16 cinco veces, esto es:

$$16+16+16+16+16=80;$$

esto equivale á buscar un valor igual á cinco veces 16, ó á encontrar una cantidad 5 veces mayor que 16. Tal es el objeto de la multiplicación.

La operación se indica con el signo $\times$ multiplicado por, ó por medio de un punto puesto entre las dos cantidades.

$$16\times5=80, \text{ ó } 16.5=80.$$

Se lee 16 multiplicado por 5 igual á 80.

La cantidad que se había de sumar se llama *multiplicando;* la que indica el número de veces que se había de sumar, se llama *multiplicador*, y el resultado *producto.* Al multiplicando y al multiplicador juntos se les llama *factores del producto.*

El producto es de la misma especie que el multiplicando; y el multiplicador, que en rigor puede considerarse como número abstracto, es las más veces de una especie diferente de la del multiplicando.

Definición.—*La multiplicación de los números enteros es la operación por medio de la cual se suma ó se toma un número tantas veces como unidades hay en otro.*

El objeto de la multiplicación es formar una cantidad que tenga con un número dado la misma relación que otro tiene con la unidad.

60.—Primer teorema—*El valor del producto de dos cantidades, no se altera cuando se invierte el orden de los factores.*

Esto es: $3\times5=5\times3$

Demostración.—Cuando los factores son dos, se puede descomponer el multiplicando en las unidades que lo forman y después multiplicarlas por el multiplicador, con lo cual se obtiene por resultado el multiplicador repetido ó sumado tantas veces como unidades hay en el multiplicando.

Así $5\times3=(1+1+1+1+1)\times3$

ejecutando la multiplicación se obtiene

$$5\times3=3+3+3+3+3=3\times5$$

luego $5\times3=3\times5$

En el caso de que tengamos formado un producto por tres factores, por ejemplo,

$$3\times5\times7=105$$

demostraremos que el primer factor 3 puede ocupar el segundo ó el tercer lugar sin que se altere el valor del producto.

Como $3\times5=5\times3$

se infiere que $3\times5\times7=5\times3\times7$ . . . . . (1)

Como $3\times7=7\times3$

se infiere que $3\times5\times7=5\times7\times3$ . . . . . (2)

luego $3\times5\times7=5\times3\times7=5\times7\times3$

61.—Segundo teorema.—*Si se hace á uno de los factores cierto número de veces mayor, el producto resultará igual número de veces mayor.*

Demostración.—Sea $6\times4=24$. Si á 6 lo hacemos tres veces mayor, la operación se cambiará en

$$18\times4=72$$

y tendremos que demostrar que 18×4 es igual á 24×3.

Como $18=6\times3$, tendremos:

$$18\times4=6\times3\times4$$

invirtiendo el orden de los factores se tiene:

$$18\times4=6\times4\times3$$

y como $6\times4=24$, finalmente resulta:

$$18\times4=24\times3$$

que es lo que se quería demostrar.

Ahora, como el valor del producto no se altera tomando por multiplicando el multiplicador, resulta que el principio es cierto para cualquiera de los factores.

62.—Tercer teorema.—*Si se hace á uno de los factores cierto número de veces menor, el producto resultará el mismo número de veces menor.*

Demostración.—Si sabemos que

$$15\times4=60$$

y hacemos á uno de los factores, 15, por ejemplo, 3 veces menor,

decimos que $5\times4=20$

será 3 veces menor que 60.

En efecto, por ser 15 *tres* veces mayor que el factor 5, el producto, 60, conforme al teorema anterior, será *tres* veces mayor que 20, y en consecuencia

5×4 será *tres* veces menor que 15×4

que es lo que se quería demostrar.

De lo expuesto resulta que *el producto experimentará variaciones semejantes á las que tenga cualquiera de los factores.*

63.—Cuarto teorema.—*El producto de dos factores no se altera cuando uno de ellos se aumenta, y el otro se disminuye el mismo número de veces.*

Demostración.—Cuando se aumenta uno de los factores, el producto se hace cierto número de veces mayor, pero como cuando se disminuye igual número de veces el otro factor, se hace el producto menor tanto como antes se hizo mayor, resulta que hay perfecta compensación quedando el producto con igual valor.

64.—Quinto teorema.—*Toda cantidad multiplicada por 1 da por producto la misma cantidad.*

Demostración.—Porque como cuando el multiplicador es la unidad, esto indica que el multiplicando se ha de tomar ó sumar una vez para obtener el resultado, naturalmente éste, que es el producto, será igual al multiplicando.

65.—Sexto teorema.—*Toda cantidad multiplicada por cero da cero por producto.*

Demostración.—Como el valor del producto no se altera cuando se invierte el orden de los factores (60), se tendrá, por ejemplo que

$$16 \times 0 = 0 \times 16$$

Ahora bien, como si se suma 0 diez y seis veces consigo mismo el resultado es 0,

tendremos $0 \times 16 = 0$

luego $16 \times 0 = 0$

que es lo que se debía demostrar; y como el raciocinio hecho con 16 es aplicable á cualquier número, resulta que toda cantidad multiplicada por cero dará cero por producto.

Debe notarse que cuando se multiplica una cantidad por 1 ó por 0 el producto no es mayor que cualquiera de los factores. La multiplicación, según hemos dicho, es una operación por medio de la cual se obtiene un resultado que tiene con una cantidad conocida (con el multiplicando), la misma relación que otra cantidad (el multiplicador), tiene con la unidad. Esto explica por qué en matemáticas no siempre produce la multiplicación el aumento que podría atribuirsele por la significación de la palabra en el lenguaje común.

66.—Para ejecutar la multiplicación de dos números de cualquiera magnitud es preciso conocer primero los productos de los guarismos que representan unidades simples, y los cuales se encuentran en la tabla adjunta llamada de Pitágoras. Esta se forma escribiendo en una línea horizontal los 10 primeros números: en seguida, se va sumando cada uno consigo mismo 10 veces, escribiendo cada suma debajo de la anterior en la misma columna vertical. Para formar, por ejemplo, los productos de 5, después de escrito el primer renglón, se sumará 5 con 5 y se escribe 10 debajo: $10+5=15$ que se escribe debajo de 10: $15+5=20$: $20+5=25$, etc., y de este modo se obtienen los productos de 5 por 1, por 2, por 3, por 4, etc.

TABLA DE PITAGORAS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Si se quiere encontrar, por ejemplo, el producto de 8 por 4 bastará bajar en la columna vertical debajo del 8 hasta la intersección de la línea horizontal de 4, y 32 será el producto de 8 por 4.

Así pues, el producto de dos factores que no pase de 10 puede obtenerse por medio de la tabla, cuando no se conoce á la memoria.

Esta tabla es una nueva demostración de que el producto es el mismo cualquiera que sea el orden de los factores, supuesto que las columnas generadoras de los productos, esto es, la horizontal y la vertical pueden invertirse sin variación del producto. La demostración se concibe que es general dando suficiente extensión á la tabla.

Cuando uno de los factores tiene más de una cifra, se considera éste dividido en unidades, decenas, centenas, etc., y se ejecuta la multiplicación por partes. Para multiplicar, por ejemplo, el número 9,437 por 4, basta considerar la suma que sería necesario efectuar, para comprender el fundamento de la operación. La columna de las unidades contiene el número 7, repetido cuatro veces; luego para encontrar la suma de las unidades bastará multiplicar 7 por 4 igual á 28, poner 8

unidades y retener 2 decenas para reunirlas á las de su especie; en la columna compuesta de 3 repetido 4 veces igual á 12, más dos decenas retenidas forman 14; se pone 4 y se retiene una centena para reunirla á las centenas, etc. Hemos representado debajo de la suma la multiplicación, y así se ve que *la operación equivale á multiplicar cada una de las cifras del multiplicando por el multiplicador, comenzando por las de especie menor; cada producto se escribe debajo de la cifra de que procede y se retienen las decenas para reunirlas al producto del guarismo siguiente.*

9 437
9 437
9 437
9 437
37 748
9 437
4
37 748

Cuando ambos factores constan de más de un guarismo, se descompone el multiplicador en las unidades, decenas, centenas, etc., de que consta: se multiplica el multiplicando por cada una de las partes del multiplicador, y el producto total es igual á la suma de los productos parciales.

Si se quiere, por ejemplo, multiplicar 9,437 por 864, se tendrá que

$$9437\times864=9437\times4+9437\times60+9437\times800$$

y en consecuencia, se multiplicará 9437 por 4, por 60 y por 800 que son las partes del multiplicador y después se sumarán los tres productos. El primero de 9437 por 4=37748 se forma como acaba de explicarse. El de 9437 por 60 se obtiene multiplicando cada una de sus cifras por 6, pero como 60 es 10 veces mayor que 6, se tiene cuidado de que este producto exprese decenas y no unidades, para lo cual se agrega un cero á la derecha del primer producto de 6 por las unidades del multiplicando, á fin de dar al producto parcial el valor que le corresponde. En efecto, 9437 multiplicado por 6 unidades, produce 56622 unidades; pero como lo que se busca es el producto por 60, que es 10 veces mayor que 6 unidades, será necesario hacer el producto 10 veces mayor, lo cual se consigue agregando un cero á la derecha ó colocando este producto en el lugar correspondiente. Para obtener el producto por 800 se multiplican todas las cifras del multiplicando por 8, y se agregan dos ceros á la derecha. Por último, se suman los tres productos parciales para formar el total.

9437
864
37748
566220
7549600
8153568

67.—Tales son los fundamentos de la siguiente:

Regla general para multiplicar los enteros.—1º—*Cuando ambos factores tienen un solo guarismo, el producto se obtiene á la memoria ó por la tabla de Pitágoras.*

2º—*Cuando uno de los factores tiene varias cifras y el otro consta de un solo guarismo, se coloca este comunmente debajo del número mayor, se*

tira una línea horizontal para separar el producto, y se comienza á multiplicar cada una de las cifras del factor mayor, comenzando por las unidades, por el guarismo del multiplicador: se escriben las unidades de cada producto en el orden de la cifra del multiplicando de que procede, y las decenas que contenga se reunen al producto de la cifra siguiente, y así se continúa la operación hasta multiplicar el guarismo de mayor especie, cuyo producto se escribe tal como sale.

3º—*Cuando ambos factores tienen varias cifras, se escribe comunmente el menor debajo del mayor, y se tira una línea horizontal para separar los factores de los productos parciales. Conforme á la regla anterior, se forma el producto del multiplicando por las unidades del multiplicador; en seguida se forma el producto del multiplicando por el guarismo de las decenas del multiplicador, escribiendo el primer guarismo de este producto en la columna de las decenas; después se forma el producto del multiplicando por el guarismo de las centenas del multiplicador, escribiendo el primer guarismo en la columna de las centenas, y así se continuará la operación; sumando, por último, los productos parciales.*

68.—Ejemplo.—Sea por multiplicar 72048 por 347. Conforme á la regla, las cantidades se escribirán como se ve al lado. Se multiplicarán por 7 todos los guarismos del multiplicando, comenzando por las unidades, diciendo: 7 por 8, 56; se ponen 6 unidades y se retienen 5 decenas para unirlas al producto de 7 por 4 decenas, son 28, y 5, 33; se escribe 3 y se retienen las 3 decenas; 7 por 0 es 0 y 3 son 3; 7 por 2, 14; se escribe 4 y va 1; 7 por 7, 49 y 1, 50 que se escribe. Después se multiplican todas las cifras del multiplicando por 4 decenas, y como este producto parcial debe expresar decenas, el primer producto de 8 por 4 se escribe en el lugar de las decenas, omitiéndose el 0, que por claridad podría ponerse á la derecha. En seguida se multiplican todas las cifras del multiplicando por 3 centenas, escribiendo el primer producto de 3 por 8 en el lugar de las centenas para que este producto parcial exprese centenas. Por último, se suman los productos parciales para obtener el total.

72048
347
504336
288192
216144
25000656

Obsérvese que el producto de los números enteros consta de tantos guarismos como tienen ambos factores juntos ó de uno menos. Para comprender el fundamento de lo cual, basta observar en el ejemplo propuesto, que siendo 347 mayor que 100 y menor que 1000, el producto estará entre los límites 7204800 y 72048000, esto es, constará de tantas cifras como tiene el multiplicando mas dos ó tres guarismos, que es la suma de los dos factores ó una menos.

69.—Demostración de la regla general.—Cuando con todas las par-

tes que constituyen una cantidad se ejecuta una operación, el resultado es el mismo que si se ejecutara la operación con toda la cantidad: practicando la regla hemos multiplicado las unidades, decenas, centenas, etc. del multiplicando, por las unidades, decenas, centenas, etc., del multiplicador, luego habremos obtenido el producto del multiplicando por el multiplicador. Cuando multiplicamos el multiplicando por el guarismo que representa las decenas del multiplicador considerándolo como unidades, el producto parcial resultaría 10 veces menor que el verdadero; pero escribiendo este producto en el lugar de las decenas, le damos el valor que le corresponde, y así obtenemos el verdadero producto del multiplicando por las decenas del multiplicador; continuando la operación conforme á la regla, y escribiendo el producto de las centenas del multiplicador en la columna de las centenas, el producto de los millares en la columna de los millares, etc., haremos que cada producto parcial tenga el valor que debe tener.

70.—Prueba.—Sea por multiplicar 718345 por 867. Después de ejecutar la multiplicación, para hacer la prueba sumamos las cifras del multiplicando:

718345	28,	10,	1	7+1+8+3+4+5=28;
867	21		3	
5028415			3	como 28 contiene decenas, volvemos á sumar los guarismos que lo forman:
4310070				2+8=10; y por último, 1+0=1
5746760				que es el resultado final de la suma de los guarismos del multiplicando.
622805115	30		3	

En seguida se suman los guarismos del multiplicador.

8+6+7=21, y 2+1=3.

De igual manera se suman las cifras significativas del producto:

6+2+2+8+0+5+1+1+5=30, y 3+0=3

Ahora formamos el producto de la cifra 1, que resultó del multiplicando por la 3, que provino del multiplicador, y si el producto, 3, resulta igual á la cifra 3, que dió la suma de los guarismos del producto, es prueba de que no se cometió ningún error en la ejecución de la multiplicación.

Definición.—En las pruebas de la multiplicación y de la división de enteros entendemos por *reducir una cantidad á unidades simples, sumar unas con otras todas sus cifras significativas; si la suma, además de unidades consta de decenas, de centenas, etc., se suman entre sí las cifras de la suma, y si fuere necesario, los guarismos de la nueva suma y los de las siguientes hasta obtener como resultado unidades simples.*

Regla.—*Para hacer la prueba de la multiplicación de los números enteros, se reducen á unidades simples el multiplicando, el multiplicador y el producto. Se forma el producto de la cifra que resultó del multiplicando por la del multiplicador, reduciendo si fuese necesario, este pequeño producto á unidades simples; debiendo obtenerse, cuando no ha habido error, un guarismo igual al que resultó de reducir á unidades simples el producto del multiplicando por el multiplicador.*

Nos falta conocer las propiedades de los factores y divisores de los números, que expondremos al fin de enteros, para dar la demostración de esta regla, que puede verse en el párrafo 132.

71.—*Los casos de la multiplicación son siete.*

1º—*Cuando ambos factores tienen un solo guarismo.*

2º—*Cuando uno de los factores tiene un solo guarismo y el otro varios.*

3º—*Cuando ambos factores tienen más de un guarismo.*

4º—*Cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros.*

5º—*Cuando alguno ó ambos factores terminan en ceros.*

6º—*Cuando entre las cifras del multiplicador hay uno ó varios ceros, y*

7º—*Cuando la primera ó la última cifra del multiplicador es la unidad.*

El primer caso se resuelve á la memoria, y el 2º y 3º conforme á la regla general (67).

Cuarto caso.—Cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros, se obtiene el producto agregando al otro factor tantos ceros como son los que acompañan á la unidad, conforme á lo demostrado en el número 20, pues esto equivale á hacer el otro factor 10, 100, 1000, etc., veces mayor.

Quinto caso.—Cuando alguno ó ambos factores terminan en ceros, para obtener el producto se hace abstracción de dichos ceros, se multiplican las cifras significativas por la regla general, y al producto se le agregan tantos ceros, como sean los que tienen los factores.

Demostración.—Cuando se hace abstracción de los ceros con que termina el multiplicando, lo hacemos menor (20), 10, 100, 1000, etc., veces, y en consecuencia, el producto resultará igual número de veces menor (62). Cuando hacemos abstracción de los ceros del multiplicador, hacemos á este factor, y en consecuencia, al produto, cierto número de

veces menor. Pero como al agregar al producto tantos ceros á la derecha como hay en ambos factores juntos, lo hacemos tantas veces mayor (20) como antes se había hecho menor al hacer abstracción de los ceros, resulta que restituiremos al producto el valor que le corresponde, por lo cual será el verdadero.

Sexto caso.—Cuando entre las cifras del multiplicador hay uno ó varios ceros, para obtener el producto se omite multiplicar el multiplicando por los ceros del multiplicador, teniendo cuidado de colocar la primera cifra significativa de cada producto parcial en la columna del orden de unidades que representa la cifra del multiplicador que lo ha producido.

Sea por ejemplo, multiplicar 764789 por 20008.

Demostración.—El producto total se compone de la suma de los productos del multiplicando por las partes de que está formado el multiplicador, y como en el caso de que nos ocupamos, éste carece de decenas, centenas y millares, no habrá productos parciales producidos por las decenas, ni por las centenas, ni por los millares; pero para que el producto parcial de las decenas de millar tenga el valor que le corresponde, debemos hacer que exprese decenas de millar, lo cual se consigue colocando el producto de las unidades del multiplicando en la columna del orden de unidades de la cifra del multiplicador.

```
764789
 20008
-------
6118312
1529578
-------
15301898312
```

Septimo caso.—Cuando la primera ó la última cifra del multiplicador es la unidad, para obtener el producto, se deja el multiplicando como primer producto parcial, y se colocan los de las demás cifras significativas en la columna que corresponda al orden de unidades de la cifra del multiplicador.

Sea por multiplicar 2789 por 241: la operación se dispone como se ve al lado.

Demostración.—El fundamento de esta operación es que toda cantidad multiplicada por la unidad, produce la misma cantidad: y en que á cada producto parcial se le da el valor que le corresponde.

Este caso es de frecuente aplicación para los factores entre 10 y 20, que son tan comunes, colocándose entonces el multiplicando en el lugar del producto parcial de las decenas, como es debido.

```
2789×241
11156
5578
------
672149
```

Sea por multiplicar 346785 por 16. La operación se dispone y ejecuta como se ve aquí al lado.

```
346785×16
2080710
--------
5548560
```


72.—Usos de la multiplicación.—Los usos de la multiplicación son los mismos que los del 2.º caso de la suma, esto es:

1.º—*Conocido el valor de una unidad determinar el de muchas.*

2.º—*Reducir unidades de especie mayor á menor*, y además los que se derivan de la naturaleza de la multiplicación como son: sumar ó tomar una cantidad cierto número de veces, hacer una cantidad cierto número de veces mayor, etc.

73.—Como ejercicio de la multiplicación pondremos los siguientes ejemplos:

1.º—Se quiere saber cuál será el costo de construcción de un ferrocarril de 186 millas de longitud, calculando el costo de cada milla á razón de $49700.

2.º—Se quiere saber qué cantidad de algodón podrá cosecharse en una extensión de terreno igual á 5209 hectaras, bajo el supuesto de que una hectara produce 708 libras de algodón.

3.º—Se quiere reducir 97658 quintales á onzas, componiéndose un quintal de 1600 onzas.

4.º—Se quiere reducir 3809 leguas á pulgadas, dividiéndose una legua en 5000 varas y una vara en 36 pulgadas.

```
                millas
1.º $49700×186
    3976
     2982
   -------
   $9244200

                hectáreas.
2.º 5209
      708 lb.
    -------
     41672
     36463
    --------
    3687972 lb.

                quintales.  onzas.
3.º 97658×1600
    585948
    ---------
onz. 156252800

                leguas.
4.º 3809
      5000
    --------
vs. 19045000
                    36
    --------
    114270
    57135
    --------
pulgs. 685620000
```

DIVISION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

74.—En el número 56 dijimos que la ejecución del 2º caso de la resta, se facilita por medio de la división, operación que es en realidad, el 2.º caso de la resta abreviado. La división es una operación recíproca de la multiplicación. Cuando se multiplica 3 por 4, se conocen los