inmediata siguiente, obteniéndose así en el cociente por cada resta un solo guarismo de cierto orden.

La división de los números enteros pocas veces conduce á un cociente entero, y por esto es necesario concebir el dividendo formado por el producto de dos números, más una cantidad igual á la resta.

Cuando el cociente es entero y no hay resta, el dividendo es tantas veces mayor que el divisor, como unidades tiene el cociente, y recíprocamente el divisor es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el cociente, supuesto que el dividendo es el producto del divisor por el cociente.

En consecuencia, si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor.

Por último, debemos repetir que el cociente suele ser de especie diferente á la del dividendo y á la del divisor: que no se debe obtener un cociente parcial mayor que 9, ni ninguna resta mayor que el divisor; y que por cada resta se determina un guarismo en el cociente pudiendo ser éste cero.

PROPIEDADES DE LOS FACTORES Y DIVISORES ENTEROS.

92.—Definiciones.—*Número primo es el que no da un cociente entero sino cuando se le divide por sí mismo ó por la unidad.* Tales son los números 7 y 13, de los que no se obtiene un cociente entero sin resta, sino cuando el divisor es el mismo número ó la unidad.

93.—*Todo número que no es primo, es el producto de varios factores diferentes de la unidad, y se llama múltiplo* de cualquiera de sus factores. Por ser $35=7\times5$, será múltiplo de 7 y de 5.

94.—*Recíprocamente, se llama submúltiplo ó parte alícuota de una cantidad, el número que la puede dividir dando un cociente entero sin ninguna resta.*

95.—*Varios números son primos entre sí cuando no tienen más divisor común que la unidad.* Por ejemplo: 4 y 9 son primos entre sí, y los números 6, 9 y 12 no son primos entre sí, porque son divisibles por 3.

96.—*Se llama máximo común divisor de varios números, el mayor número que puede dividirlos exactamente.*

Por ejemplo: 6 es el máximo común divisor de 12 y de 18, habiendo otros números menores que 6, como 3, que también pueden dividirlos.

El máximo común divisor de varios números primos es la unidad.

97.—*Se llama menor múltiplo común de varios números, el menor número que puede resultar como producto de multiplicar sucesivamente cada uno de los propuestos por algún número entero.*

Por ejemplo: 24 es el menor múltiplo de 6 y de 8; habiendo otros, como 48, mayores que 24 que son múltiplos de 6 y de 8.

98.—*Descomponer un número en sus factores, es encontrar varios números cuyo producto sea el número propuesto.* Siendo $30=2\times3\times5$ se ha descompuesto en tres factores, 2, 3 y 5.

99.—*Cuando los factores de un producto son todos iguales entre sí, al producto se llama potencia del número que ha servido de factor.*

Siendo $25=5\times5$ y $81=3\times3\times3\times3$, 25 es la segunda potencia de 5 y 81 es la cuarta potencia de 3.

Se llama grado de la potencia el número de factores del producto. Así, 2 y 4 son los grados de las potencias á que ha sido necesario elevar respectivamente 5 y 3 para producir 25 y 81.

A la 2.ª potencia se le llama generalmente *cuadrado* y á la 3.ª potencia *cubo* del número propuesto.

La potencia de una cantidad se indica poniendo arriba y á la derecha, un pequeño número llamado *exponente, que expresa cuántas veces ha entrado la cantidad como factor en el resultado.*

Así $5^2=25$ y $3^4=81$

se lee 5 elevado al cuadrado igual á 25, y 3 elevado á la 4ª potencia igual á 81.

Debe observarse que *por ser 10 la base del sistema de numeración, toda potencia de 10 es igual á la unidad seguida de tantos ceros como unidades tenga el exponente ó grado de la potencia.*

100.—*Se llama raiz de un número, otro número que multiplicado una ó varias veces por sí mismo da por producto el primer número.* Siendo $81=3\times3\times3\times3$ se dice que 3 es raíz de 81, y por entrar el número 3, cuatro veces como factor en el producto 81 decimos que es la raíz 4ª

Se indica $3=\sqrt[4]{81}$

leyéndose 3 igual á la raíz 4.ª de 81.

10 es la raíz del número representado por la unidad seguida de tantos ceros como expresa el índice de la raíz. Por ejemplo:

$10=\sqrt[3]{1000}$. En efecto, $10^3=10\times10\times10=1000$.

011157

101.—Determinación de los números primos.—Para determinar los números *primos* hasta cierto límite, bastará excluir todos los números que son *múltiplos* de otros, y á este fin haremos observar que los números que se forman por la adición sucesiva de un mismo número son *múltiplos* de este sumando. Por ejemplo, si sumamos 5 consigo mismo, obtendremos: $5+5=10$ múltiplo de 5; $5+5+5=15$ múltiplo de 5; $5+5+5+5=20$ múltiplo de 5. En consecuencia, si formamos por la adición sucesiva de 2 en 2 unidades los números 4, 6, 8, etc., resultarán los múltiplos de 2, que debemos excluirlos. En seguida, por la adición sucesiva de 3 en 3 unidades formaremos los números 6, 9, 12, etc., que serán múltiplos de 3; y continuando este procedimiento hasta el límite fijado excluiremos todos los números que sean *múltiplos* de otros y quedarán los números primos.

Pongamos la serie de números desde 1 hasta 30:

1—2—3—4—5—6—7—8—9—10—11—12—13—14'

15—16—17—18—19—20—21'—22"—23—24

25—26'"—27—28'—29—30.

Desde luego el número 1 es primo porque no puede dividirse más que por sí mismo, y los números 2 y 3, son primos, en razón de que no pueden descomponerse en grupos iguales entre sí, á menos que los formemos por adiciones sucesivas de la unidad. En seguida, por la adición de 2 en 2 unidades formaremos los múltiplos de 2. El número 4 es múltiplo de 2 porque $4=2+2=2\times2$. El número $6=2+2+2=2\times3$. El número $8=2+2+2+2=2\times4$, y en general, si partiendo del número 2 se va contando de dos en dos los números 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 y 30, marcados con una linea por debajo, se excluirán los múltiplos de 2.

Si se buscan ahora los números formados por la adición sucesiva de tres en tres unidades, los encontraremos si partiendo del número 3 contamos de tres en tres guarismos. Así se determinan los números 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 y 30; marcados con un punto por debajo, y que son los múltiplos de 3. No nos ocuparemos en determinar los múltiplos de 4, porque no siendo este número primo, todos sus múltiplos lo son de 2, y por consiguiente ya están excluidos.

Pasando al número 5, determinaremos todos sus múltiplos contando desde 5 los guarismos de cinco en cinco, y señalaremos con dos puntos por debajo los números 10, 15, 20, 25 y 30, múltiplos de 5. Los múltiplos de 6 siéndolo de 3 ya están excluidos.

Contando desde 7, de siete en siete guarismos, determinaremos los números 14, 21 y 28, marcados con una coma por encima, y que son los múltiplos de 7. Los múltiplos de 8, 9 y 10 ya están excluidos.

Contando de 11 en 11 determinaremos el número 22, múltiplo de 11, señalado con dos comas por encima.

Y por último, contando de 13 en 13 guarismos, se determina el número 26, múltiplo de 13, marcado con tres comas.

Los números primos inferiores á 30, son los siguientes:

1—2—3—5—7—11—13—17—19—23 y 29,

los cuales no se han excluido, porque no son múltiplos de ninguno otro.

Por este procedimiento, algo abreviado en la práctica, se forman tablas de los números primos hasta el límite que se quiere.

Para determinar si un número aislado es primo, deberá dividirse sucesivamente por los números primos 2, 3, 5, 7, *etc., menores que su mitad, y en caso de que no sea divisible exactamente por ninguno de ellos, el número propuesto será primo.*

Si queremos averiguar si 11 es número primo, lo dividiremos sucesivamente por 2, por 3 y por 5, números primos menores que su mitad, y no siendo divisible por ninguno de ellos será número primo. Es inútil hacer la división por los números primos mayores que su mitad, supuesto que no puede descomponerse un número en menos de *dos* partes, cada una de ellas iguales á su *mitad*.

Si se trata de averiguar si 27 es número primo, su división por 2 conduce á la resta 1; pero como dividido por 3 da el cociente exacto 9, resulta que es múltiplo de 3.

102.—Descomposición de un número en sus factores primos.—Una vez conocidos los números primos 2, 3, 5, 7, 11.....hasta el límite que se quiera, *para descomponer un número en sus factores primos, se le dividirá primero por* 2, *en caso de que la división sea exacta, se dividirá el cociente que resulte otra vez por* 2, *repitiéndose la división por este número hasta que se obtenga un cociente indivisible por* 2. *En seguida, ese cociente se dividirá por* 3, *y siendo posible se repetirán las divisiones hasta obtener un cociente indivisible por* 3, *y así continuarán dividiéndose los cocientes que vayan resultando sucesivamente por cada uno de los números primos,* 5, 7, 11, *etc., cuantas veces sea posible, hasta obtener* 1 *como último cociente.*

El número propuesto será igual al producto de los números primos que hayan servido de divisores, elevado cada uno de ellos á una potencia expresada por el número de divisiones que con él se hayan hecho

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Por ejemplo, si se quiere descomponer el número 168 en sus factores primos, lo dividiremos por 2 y se tendrá el cociente exacto 84, el cual lo volveremos á dividir por 2 y se obtiene 42, que dividido por 2, da por cociente 21, número indivisible por 2. Dividido este cociente por 3, se obtiene 7, número que siendo primo, dará, dividido por sí mismo, la unidad por cociente.

En consecuencia: $168=2^3\times3\times7$.

La descomposición de los números en sus factores primos, sirve. 1.°, para conocer todos los divisores enteros que puede tener una cantidad; 2.°, para determinar el menor múltiplo de varios números; y 3.°, para encontrar el máximo común divisor.

103.—Determinación de los divisores de un número.—Si queremos determinar todos los números enteros que pueden dividir exactamente, por ejemplo, á 180, comenzaremos por descomponerlo en sus factores primos, empleando el procedimiento explicado en el párrafo anterior, y es claro que siendo $180=2\times2\times3\times3\times5$, será divisible exactamente por cada uno de sus factores primos y por los diversos productos que con ellos puedan formarse.

180	2
90	2—4
45	3—6—12
15	3—9—18—36
5	5—10—20—15—30—60—45—90—180
1	

Para determinar fácilmente estos productos diversos, multiplicaremos el segundo divisor 2, por el primero que está encima de él, y el producto 4, que será divisor de 180, lo escribimos á la derecha del segundo divisor. En seguida multiplicaremos el tercer divisor 3, por todos los números que están encima de él; y los productos 6 y 12 se escriben á su derecha, omitiéndose los resultados iguales á los obtenidos; y así se continúa la operación hasta el último factor 5. Los números todos que pueden dividir á 180, serán los factores primos y los productos diferentes encontrados. Ordenándolos se tiene que los divisores de 180, serán: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90 y 180, y solo estos números lo dividirán exactamente.

Regla.—*Para encontrar todos los divisores de un número, se le descompondrá en sus factores primos, se multiplicará el segundo factor por el primero, y se escribirá á su derecha el producto; en seguida, el tercer factor se multiplicará por los dos factores primos y por el producto encontrado, y se continuará la operación multiplicando cada divisor por los números que haya encima de él; teniendo cuidado de omitir los productos ya obtenidos.*

Todos los factores primos y los productos diferentes, dividirán exactamente al número propuesto.

El fundamento de esta regla es que cuando se han determinado los factores primos de que está compuesto un número, éste será divisible por todos estos factores y por todas las combinaciones que con ellos puedan hacerse, pero nada más por estos factores y sus respectivas combinaciones.

Se puede determinar el número de divisores, que tendrá un número, *agregando una unidad á cada uno de los exponentes de los factores primos de que está formado, y formando el producto de los números que resulten.* Cuando algún factor no tenga exponente, se supondrá que lo es la unidad.

Por ejemplo $180=2^2\times3^2\times5$
siendo los exponentes 2, 2, y 1,
formaremos el producto de $3\times3\times2=18$,

y 18 serán los divisores que tendrá 180, cuyo resultado es en efecto el que acabamos de obtener.

104.—Determinación del menor múltiplo.—Regla.—*Para encontrar el menor múltiplo común de varios números, se comienza por excluir los que son factores de alguno de los propuestos; los números que queden se descompondrán en sus factores primos, y el menor múltiplo común será el producto de todos los factores primos diferentes que entren en su formación, afectado cada uno de estos factores del mayor de sus exponentes.*

Por ejemplo, si se busca el menor múltiplo de

3, 5, 8, 10, 15, 24 y 72

comenzaremos por excluir á 3 que es factor de 15, á 5 que lo es de 10, á 8 que lo es de 24 y á 24 que es factor de 72; en seguida, descomponiendo en sus factores primos los números no excluidos, tendremos:

$$10=2\times5$$
$$15=3\times5$$
$$72=2^3\times3^2$$

y el menor múltiplo de los números propuestos será

$$2^3\times3^2\times5=360$$

Este número será *múltiplo* de los demás, porque contiene todos los factores de que cada uno está formado, y será el *menor* múltiplo, porque solo contiene los factores absolutamente indispensables para poder ser producto de todos los números propuestos.

105.—Máximo común divisor.—Regla.—*Para determinar el máximo común divisor de varios números, se les descompondrá en sus factores*

primos, y el máximo común divisor será el producto de los factores primos iguales que entren en su formación, afectado cada uno del menor de sus exponentes.

Si, por ejemplo, se busca el máximo común divisor de 72 y de 180, descomponiendo estos números en sus factores primos tendremos:

$$72=2^3\times3^2$$
$$180=2^2\times3^2\times5$$

y el máximo común divisor será:

$$2^2\times3^2=36$$

Este número *dividirá exactamente* á 72 y á 180, supuesto que está formado de factores comunes á estos dos números; y será el *mayor divisor* de ellos en razón de que cada uno de los factores comunes se ha elevado á la mayor potencia que ha sido posible,

106.—Primer teorema.—*Un número que divide exactamente á otro, divide igualmente á todos sus múltiplos.*

Si 8 divide á 24, todo múltiplo de 24 será también divisible exactamente por 8.

Demostración.—Si para fijar el raciocinio de nuestra demostración tomamos como múltiplo de 24 á $96=24\times4$, tendremos en virtud de ser 24 divisible exactamente por 8 que $\frac{24}{8}$ dará por cociente un número entero.

$$\frac{24}{8}=3$$

si multiplicamos el dividendo por 4, el cociente de $24\times4=96$ dividido por 8, será (76) 4 veces mayor que el cociente 3, esto es,

$$\frac{24\times4}{8}=\frac{96}{8}=3\times4$$

pero como el producto 3×4 de dos números enteros siempre es entero y cuando el cociente es entero, los números son divisibles exactamente, resulta que tanto 96 como cualquiera otro múltiplo de 24 será divisible exactamente por 8; en razón de tener que ser el cociente respectivo el producto de 3 por otro número entero.

107.—Segundo teorema.—*Si las dos partes en que puede descomponerse una cantidad son divisibles exactamente por un número, la cantidad total será divisible por dicho número.*

Sea $72=48+24$; si las dos partes 48 y 24 son divisibles exactamente por 6, también 72 será divisible por 6.

Supuesto que las dos partes de 72 son divisibles exactamente por 6, darán por cociente números enteros, y tendremos:

$$48\div6=8$$
$$24\div6=4$$

y como el cociente de una cantidad es igual á la suma de los cocientes de sus partes, sumando ordenadamente las expresiones anteriores, se tendrá:

$$(48+24)\div6=8+4$$

ó bien

$$72\div6=8+4.$$

pero como estos dos cocientes 8 y 4 son números enteros, su suma también lo será, y en consecuencia 72 será divisible exactamente por 6.

108.—Tercer teorema.—*Siempre que una cantidad pueda descomponerse en dos partes, y tanto la cantidad como una de sus partes sean divisibles exactamente por un número, la otra parte también será divisible por este número.*

Sea $60=40+20$: si tanto 40 como 60 son divisibles exactamente por 4, decimos que la otra parte 20 será también divisible por 4.

Demostración.—Supuesto que tanto 60 como una de sus partes 40, son divisibles exactamente por 4, sus respectivos cocientes serán números enteros y tendremos:

$$60\div4=15$$
$$40\div4=10$$

como si de cantidades iguales se restan cantidades iguales, los resultados serán iguales, tendremos.

$$(60-40)\div4=15-10$$

ó bien

$$20\div4=15-10$$

pero como los dos cocientes, 15 y 10 son números enteros, su diferencia también lo será, y en consecuencia 20, que es la otra parte de 60, será divisible exactamente por 4.

Corolarios.—En la división de los números enteros podemos distinguir dos casos.

1.º—Cuando no hay resta, por ejemplo $60\div15=4$

de lo que se deduce $60=15\times4$

2.º—Cuando hay resta, por ejemplo: $60\div8$ da 7 por cociente y 4 de resta, de lo cual se deduce que

$$60=8\times7+4.$$

En el primer caso, cuando la división no da resta, siendo

$$60=15\times4$$

cualquier número que divida exactamente al divisor ó al cociente dividirá al dividendo. En efecto, 5 que divide á 15 dividirá á 60, y 2 que divide á 4 dividirá á 60 (106).

En el 2º caso cuando la división deja una resta, por ejemplo $60 \div 8$, da

$$60 = 8 \times 7 + 4$$

si el divisor 8, y la resta 4, son divisibles por un mismo número, por 4, por ejemplo, lo será igualmente el dividendo; supuesto que las dos partes en que 60 está descompuesto son divisibles por 4 (107); la primera 8×7, por ser múltipla de 8, y la segunda por el supuesto.

Si tanto el dividendo como el divisor son divisibles por un número, 2 por ejemplo, lo será igualmente la resta. La parte 8×7 será divisible por 2 por ser múltipla de 8 y siendo divisible la cantidad 60 y una de sus partes, lo será la otra, que es la resta 4 (108).

109.—Cuarto teorema.—*Si el producto de dos factores y cada uno de ellos se dividen separadamente por un número dado, la resta que queda en la división del producto, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas de los factores por el mismo número.*

Sea $$23 \times 47 = 1081$$

$23 \div 7$ da 3 por cociente y 2 de resta.
$47 \div 7$ da 6 por cociente y 5 de resta.

y decimos que la resta de 1081 dividido por 7 es igual á la que resulta de dividir 2×5, producto de las restas de los factores, por el mismo número 7.

Demostración.—De la división de cada uno de los factores por 7, resulta que

$$23 = 7 \times 3 + 2$$
$$47 = 7 \times 6 + 5$$

y como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados serán iguales, tendremos que

$$23 \times 47 = (7 \times 3 + 2) \times (7 \times 6 + 5)$$

Ejecutaremos la multiplicación indicada en el segundo miembro de la ecuación, multiplicando primero las dos partes del multiplicando, 7×3 y 2 por la primera del multiplicador 7×6, y obtendremos los productos.

$$(7 \times 3 \times 7 \times 6) \text{ y } (2 \times 7 \times 6)$$

que ambos son múltiplos de 7.

En seguida multiplicaremos las dos partes del multiplicando por 5, que es la segunda del multiplicador, y se obtendrá:

$$(7 \times 3 \times 5) \text{ y } (2 \times 5)$$

de cuyos productos el primero es múltiplo de 7.

Así es que

$$23 = 7 \times 3 + 2$$
$$\times 47 = 7 \times 6 + 5$$
$$23 \times 47 = (7 \times 3 \times 7 \times 6) + (2 \times 7 \times 6) + (7 \times 3 \times 5) + (2 \times 5)$$

A consecuencia de haber descompuesto cada uno de los factores en una parte que es un producto de 7, tres de las cuatro partes de que está formado el producto total, son también múltiplos de 7, y por tanto divisibles exactamente por este número, y solo en la última parte 2×5 que resultó del producto de las restas de los factores, no entra como factor 7. Si dividimos por 7 la ecuación, tendremos:

$$\frac{23 \times 47}{7} = \frac{(7 \times 3 \times 7 \times 6)}{7} + \frac{(2 \times 7 \times 6)}{7} + \frac{(7 \times 3 \times 5)}{7} + \frac{(2 \times 5)}{7}$$

y como las tres primeras partes del segundo miembro no dan ninguna resta en razón de ser cada uno de los dividendos múltiplo del divisor 7, se infiere que *la resta que dé el producto* 23×47 *dividido por* 7, *será igual á la que resulte de dividir el producto* 2×5 *de las restas de los factores, por el número dado* 7.

Como aplicaciones de estos cuatro teoremas, pondremos los siguientes ejemplos:

1º Si el número 10 es divisible exactamente por 5, cualquiera múltiplo de 10 será divisible por 5. En efecto, cualquiera número de decenas, por ejemplo, 780, que es igual á 78×10, será divisible exactamente por 5. Del mismo modo toda potencia de 10, por ser múltiplo de este número, será divisible por 5; así, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ y todas las potencias de 10 son exactamente divisibles por 5.

2º Si descomponemos el número 956 en dos partes $950 + 6 = 95 \times 10 + 6$ y observamos que por ser la primera parte, 95×10 múltiplo de 10 es divisible por 2, y que también lo es la otra parte 6, inferiremos que el número 956 será divisible por 2, en virtud del segundo teorema.

3º Si dividimos 7200 entre 7, hallaremos 1028 por cociente y 4 por resta, luego

$$7200 = 1028 \times 7 + 4$$

y observando que la cantidad 7200, lo mismo que la resta 4 son números divisibles por 4, inferiremos conforme al tercer teorema, que la otra parte 1028×7 también será divisible exactamente por 4.

4° Considerando á 30 como el producto de los factores 10×3 tendremos, conforme al cuarto teorema, que la resta que queda en la división del producto es igual á la que se obtiene dividiendo el producto de las restas de los factores, por ejemplo, por el número 6. Si dividimos 10 entre 6, la resta es 4, dividiendo 3 entre 6 el cociente es 0 y la resta 3; luego la resta de 30 dividido por 6, será igual á la del producto 3×4 ó 12 dividido por 6, y como esta resta es 0 inferiremos, lo que es una verdad, que 30 es divisible exactamente por 6, supuesto que da 0 por resta.

5° Si dividimos 10 entre 7 obtendremos por resta 3; para determinar la resta que dejaría 100 dividido por 7, conforme al cuarto teorema, tendremos que siendo $100 = 10 \times 10$, la resta de 100 será la que deje el producto de las restas $3 \times 3 = 9$ dividido por 7, esto es 2. Si queremos determinar la resta que dejaría 1000, considerando este número como el producto de 100 por 10, dividido por 7, tendremos que siendo 2 la resta de 100 dividido por 7, y 3 la resta de 10, la resta de 1000 será igual al producto de las restas 2×3 dividido por 7, esto es, 6. Se ve, pues, con qué facilidad pueden determinarse las restas de las potencias sucesivas de 10 divididas por un número dado.

110.—Regla para encontrar el máximo común divisor entre dos cantidades.—*Se divide la mayor por la menor: si la división resulta exacta, esto es, si no da resta, la cantidad menor será el máximo común divisor; en caso contrario, se divide el divisor por la resta, y si la división no sale exacta se continúa la operación dividiendo sucesivamente el último divisor por la resta hasta obtener uua división exacta. El último divisor será el máximo común divisor. Cuaudo éste sea la unidad, los números serán primos entre sí.*

111.—Ejemplo.—Sea por determinar el máximo común divisor de los números 1440 y 624. Dividiremos 1440 por 624: se obtiene el cociente 2 y la resta 192. Después dividiremos 624 por la resta 192, se obtiene 3 por cociente y 48 por resta. En seguida dividiremos 192 por 48 y obteniéndose una división sin resta, el último divisor, 48, será el máximo común divisor de los números 1440 y 624.

		1440	624
	624	192	2
192	48	3	
00	4		

A esta serie de divisiones se les da comunmente la forma de tabla, poniendo las restas á la derecha del divisor como se ve aquí al lado, y los cocientes 2 3 y 4 debajo de sus correspondientes divisores.

1440	624	192	48	00
	2	3	4	

112.—Demostración de la regla para hallar el máximo común divisor.—Hemos dicho que máximo común divisor de dos cantidades es el mayor número que puede dividirlas exactamente (96). En consecuencia, aplicando nuestros raciocinios al ejemplo propuesto, tendremos que demostrar dos cosas: 1°, que 48 divide exactamente á los números propuestos 1440 y 624; 2°, que 48 es el mayor número que puede dividirlos exactamente.

1°—Vamos á demostrar que 48 *divide exactamente* á 624 y á 1440.

Sabemos que 48 se divide exactamente á sí mismo, porque toda cantidad multiplicada por 1 da por producto la misma cantidad (64).

Como resultado de la última división, hemos obtenido:

$$192 = 48 \times 4$$

luego conforme al primer teorema (106), se infiere que 48 dividirá exactamente á 192 por ser múltiplo de 48.

Como resultado de la penúltima división hemos obtenido:

$$624 = 192 \times 3 + 48$$

sabemos que 48 se divide exactamente á sí mismo; hemos demostrado que 48 divide á 192, y conforme al primer teorema, dividirá á su múltiplo 192×3. Si, pues, 48 divide exactamente á las dos partes de 624, conforme al segundo teorema (107), se infiere que dividirá exactamente á 624.

Como resultado de la primera división obtuvimos:

$$1440 = 624 \times 2 + 192$$

hemos demostrado que 48 divide exactamente á 192 y á 624, y como también dividirá al múltiplo de este número, 624×2, se infiere que dividiendo á las dos partes de 1440, dividirá 48 exactamente á 1440.

Fundándonos en los teoremas demostrados (106 y 107) y examinando los resultados obtenidos por la aplicación de la regla, hemos visto sucesivamente que 48 se divide á sí mismo, que divide á 192, á 624 y á 1440; luego *queda demostrado que el número* 48, *encontrado conforme á la regla, divide exactamente á los números dados* 624 *y* 1440.

2°—Vamos á demostrar que 48 *es el mayor número que puede dividirlos exactamente.*