El mayor número que puede dividir exactamente á 1440 y á 624 *no puede ser mayor que* 624, porque aunque pudiera dividir á 1440 no podría obtenerse un cociente entero dividiendo 624 por un número mayor que él. En consecuencia, debemos probar si 624 divide exactamente á 1440; pero como la primera división deja una resta, nos hace ver que 624 *no es* el máximo común divisor, y además encontramos que

$$1440=624\times2+192$$

Esto es, 1440 se compone de dos partes: una 624×2, y la otra 192. Ahora bien, conforme al primer teorema (106) el número que divida á 624 dividirá á la parte 624×2, múltiplo de ella; pero como buscamos un divisor común de 1440 y de 624, conforme al tercer teorema (108), será preciso que este divisor divida exactamente á la otra parte 192, y en consecuencia, *no podrá ser mayor* que este número.

Por tanto debemos probar si 192 divide ó no exactamente al número menor 624. Ejecutando la división, encontramos una resta, por lo cual vemos que 192 *no es* el máximo común divisor, y además

$$624=192\times3+48$$

Esto es, 624 consta de dos partes: 192×3 y 48. El divisor de 192 lo será de 192×3 (106), y como para que un número pueda dividir á 624 y á 192 (circunstancia indispensable para que divida á 1440), es necesario que divida á la otra parte 48 (108), resulta que el máximo común divisor *no puede ser mayor* que la resta 48.

En consecuencia, debemos probar si 48 divide ó no exactamente á 192, y como se obtiene que

$$192=48\times4$$

sin ninguna resta, resulta que 48 *es el mayor número que puede dividir exactamente á* 624 y á 1440.

En resumen, hemos demostrado sucesivamente que el máximo común divisor:

No puede ser mayor que.....	624
Que no es.....	624
Que no puede ser mayor que.....	192
Que no es.....	192
Y que no puede ser mayor que.....	48

Vemos, pues, que la aplicación de la regla nos ha conducido á encontrar el número 48 que, además de dividir exactamente á 624 y 1440, es el mayor número que puede dividirlos exactamente.

113.—Observaciones.—Como en el curso de la operación las restas van disminuyendo sin cesar, forzosamente se llega á obtener un cociente exacto, aunque no sea sino cuando el divisor es la unidad, caso en que, como lo hemos dicho, los números propuestos serán primos entre sí.

Cuando una de las restas es un número primo que no divide exactamente la resta anterior, es inútil continuar la operación, pues como se sabe, el máximo común divisor debe dividir todas las restas, lo cual será imposible siendo número primo una de ellas.

Cuando dos restas consecutivas tienen un factor común, se puede suprimir éste y continuar la operación, teniendo cuidado de multiplicar el máximo común divisor que se encuentre por el factor suprimido, con el objeto de restituir el factor común de las restas, que debe ser parte integrante del máximo común divisor.

114.—Determinación de los cocientes de los números propuestos partidos por el máximo común divisor.—Supuesto que el máximo común divisor de dos números debe dividir exactamente todas las restas, se puede fácilmente obtener el número de veces que cada resta contiene al máximo común divisor.

1440	624	192	48
	2	3	4
30	13	4	1

Volvamos al ejemplo propuesto. Como 48 se contiene á sí mismo una vez, ponemos 1 debajo de 4. En seguida 192 contiene á 48 cuatro veces, que es el producto de 1 por el número que está encima de él, y este número 4 lo colocamos en la columna vertical debajo de 192, para expresar las veces que contiene esta resta al máximo común divisor. En seguida, supuesto que $624=192\times3+48$, y que $192=48\times4$, resulta que

$$624=48\times4\times3+48=48\times(4\times3+1)=48\times13$$

13 es el número de veces que 624 contiene á 48. Este número 13 se obtiene en la tabla multiplicando 4 por el número 3, que está encima de él, y agregando 1 que está á su derecha; debiendo observarse que 4 indica las veces que 192 contiene á 48; 3 las veces que 624 contiene á 192, 1 las veces que 48 se contiene á sí mismo.

Para determinar el número de veces que 1440 contiene á 48, multiplicaremos 13 por 2 y añadiremos 4, supuesto que

$$1440=624\times2+192$$

y que $624=48\times13$ y $192=48\times4$, luego poniendo por cada cantidad su valor, resulta que

$$1440=48\times13\times2+48\times4=48\times(13\times2+4)=48\times30.$$

En consecuencia, para determinar el número de veces que cada resta contiene al máximo común divisor, se comienza poniendo la unidad en la columna vertical debajo del último cociente; en seguida se multiplica la uni-

dad por este cociente, escribiendo el producto en la casilla de la izquierda, y se continúa multiplicando el guarismo inferior por el cociente que está sobre él, y agregando el guarismo inferior de la derecha se pone el resultado en la casilla de la izquierda.

Esta regla es de frecuente aplicación en la abreviación de los quebrados, como se verá en el número 147.

115.—Determinación del máximo común divisor de más de dos números.—Para encontrar el máximo común divisor entre más de dos números, *sin descomponerlos en sus factores primos*, se buscará primero el correspondiente á dos de los números dados; después se busca el máximo común divisor entre el hallado y otro de los números propuestos: en seguida se determina el máximo común divisor entre el último encontrado y otro de los números propuestos, continuando así la operación hasta el último número.

116. Ejemplos.—Como ejercicio pondremos las siguientes cuestiones:

1ª Descomponer (102) en sus factores primos el número 12936.

2ª Determinar (103) todos los divisores enteros del número 144.

3ª Encontrar (105) el máximo común divisor de los números 627 y 1425.

4ª Encontrar (110) el máximo común divisor de los números 477 y 1219.

5ª Encontrar (104) el menor múltiplo común á los números 2, 3, 12 y 21.

6ª Encontrar (104) el menor múltiplo común á los números 6, 8, 15, 9 y 5.

Parte

CONDICIONES

para que una cantidad sea divisible por los números menores que 12.

117.—Principios fundamentales.—Es conveniente con frecuencia, en las operaciones de aritmética, conocer con facilidad si una cantidad puede dividirse exactamente por los guarismos que representan unidades, y el objeto de este capítulo es dar á conocer los medios que pueden emplearse con tal fin, explicando sus fundamentos.

Conforme á las convenciones de nuestro sistema de numeración, resulta que toda cantidad mayor que 10, es igual á la suma de los productos de cada cifra significativa por la potencia correspondiente de 10, más las unidades simples.

Por ejemplo: $3475=3\times10^3+4\times10^2+7\times10+5.$

En consecuencia, las condiciones para que una cantidad sea divisible por un número, dependen de las propiedades del número 10, de las de sus potencias, de las de los guarismos que multiplican á estas potencias, y de las del guarismo que representa las unidades.

Los números primos menores que 10, son 2, 3, 5 y 7, por lo cual pueden hacerse las siguientes descomposiciones de la base de la numeración.

$$10=2\times5$$
$$10=3\times3+1=3^2+1=9+1$$
$$10=7\times1+3$$

118.—Siendo $10=2\times5$

inferiremos (106) que *todas las potencias y los múltiplos de* 10 *son divisibles por* 2 *y por* 5.

Si elevamos á la 2ª potencia estas dos cantidades, cuyos valores son iguales, tendremos:

$$10^2=2^2\times5^2$$

esto es, $100=4\times25$

de donde inferimos *que* 100 *y todos sus múltiplos son divisibles exactamente por* 4 *y por* 25.

Si elevamos á la 3ª potencia $10=2\times5$

tendremos $10^3=2^3\times5^3$ Parte

esto es, $1000=8\times125$

luego 1000 *y todos sus múltiplos son divisibles por* 8 *y por* 125.

Siendo cualquiera potencia de 10 igual al producto de los factores primos 2 y 5 elevado cada uno de ellos á la misma potencia, (por ejemplo $10^4=2^4\times5^4$) y siendo tanto 2 como 5 números primos con 3, se infiere que *ninguna potencia de* 10 *será divisible exactamente por* 3 por ser indivisibles por 3 los factores de que consta.

Igualmente, *toda potencia de* 10 *es indivisible por* 7, *por ser* 7 *primo de los factores de* 10.

Siendo $10=3\times3+1$

si dividimos 10 entre 3, obtendremos 3 por cociente *y* 1 *por resta.*

La resta del producto de $10\times10=100$ dividido entre 3, será igual (109,) á la que resulte de dividir el producto de las restas 1×1 de los factores por 3, esto es, *también será* 1.

Siendo $1000=100\times10$

la resta que queda al dividir 1000 entre 3 será igual (109) á la que resulte de dividir el producto de las restas 1×1 de los factores por 3, esto es, *también será* 1.

Y como el producto de 1 por 1 es 1, inferimos que *cualquiera potencia de* 10 *dividida por* 3 *da por resta* 1.

Siendo $$10=9+1$$

si dividimos 10 entre 9, la resta será 1, y conforme á lo que acabamos de explicar refiriéndonos á 3, inferiremos igualmente que *cualquiera potencia de* 10 *dividida por* 9 *dará* 1 *por resta.*

Estas propiedades de 10 y de sus potencias, así como los cuatro teoremas establecidos en los números 106 á 109, servirán de fundamento á lo que vamos á exponer.

119.—*Siempre que sea cero el último guarismo de una cantidad, ésta será divisible exactamente por* 10.

Demostración.—Todo número que termina en cero, conforme á las convenciones del sistema de la numeración, es un múltiplo de 10, por ejemplo:

$$3850=385 \times 10$$

y como por una parte 10 se divide exactamente á sí mismo, y por otra siempre que un número divide á otro, divide igualmente á todos sus múltiplos (106), se deduce que cuando el último guarismo de una cantidad sea cero, ésta será divisible por 10.

120.—*Siempre que sea* 0, *ó* 5 *la última cifra de una cantidad, ésta será divisible exactamente por* 5.

Demostración.—Si la cantidad termina en cero, como $380=38 \times 10$, será múltiplo de 10; y como 5 divide exactamente á 10, se infiere que dividirá también á cualquier múltiplo de 10 (106), esto es, á cualquiera número que termine en 0.

Si la cantidad termina en 5, como 385, la podremos descomponer en dos partes.

$$385=380+5$$

de las que la primera 380 será divisible por 5 por ser múltiplo de 10 y la segunda también lo será, por ser 5; y siendo las dos partes de la cantidad divisibles por 5, inferiremos (107) que la cantidad total 385 también lo será.

121.—*Siempre que sea cero ó par la última cifra de una cantidad, ésta será divisible exactamente por* 2.

Demostración.—Si la cantidad termina en 0, como 370, será múltipla de 10; y como 2 divide exactamente á 10, se infiere (106) que dividirá también á cualquier número terminado en 0 por ser múltiplo de 10.

Si la cantidad termina en cifra par, como 738, la podremos descomponer en dos partes:

$$738=730+8$$

de las que la primera será divisible por 2 por ser múltipla de 10, y la segunda 8, por ser par; luego siendo las dos partes de la cantidad divisibles por 2 (107) inferiremos que la cantidad total 738 también lo será.

122.—*Una cantidad será exactamente divisible por* 4, *siempre que sus dos últimas cifras sean ceros ó formen un número divisible por* 4.

Demostración.—Hemos visto (118) que 100 es divisible exactamente por 4, por ser $100=2^2 \times 5^2$, luego cualquier número terminado en dos ceros, como $3500=35 \times 100$, será divisible por 4, por ser múltiplo de 100.

Cuando las dos últimas cifras forman un número divisible por 4, como 3548, podemos descomponerlo en dos partes:

$$3548=3500+48$$

de las que la primera 3500 será divisible por 4, porque expresando centenas será múltipla de 100, luego si la otra parte 48 es divisible por 4, resultará, que siendo las dos partes de la cantidad divisibles por 4 (107) lo será también ésta.

123.—*Cuando las tres últimas cifras de una cantidad sean ceros, ó formen una cantidad divisible exactamente por* 8, *la cantidad será divisible por* 8.

Demostración.—Hemos visto (118) que por ser $1000=2^3 \times 5^3$, este número es divisible exactamente por 8; luego cualquiera cantidad que termine en tres ceros, como $73000=73 \times 1000$, será divisible por 8 por ser múltipla de 1000 (106).

Siempre que las tres últimas cifras formen un número divisible por 8, como 73864, podemos descomponer la cantidad en dos partes:

$$73864=73000+864$$

de las que la primera siempre será divisible por 8; porque expresando millares será múltipla de 1000; luego si la otra parte, formada de las tres últimas cifras es un número, como 864, divisible exactamente por

8, resultará que la cantidad total 73864 también lo será, por serlo las dos partes de que se compone (107).

124.—*Una cantidad será divisible exactamente por 3, cuando lo sea la suma de las cifras significativas que la representen.*

Por ejemplo, la cantidad 582 será divisible por 3 si la suma de las cifras significativas $5+8+2$ dá un número, como 15, divisible por 3.

Demostración.—Hemos visto (118) que *cualquiera potencia de* 10, *dividida por* 3 *da por resta* 1, por lo que se tiene:

$$10=3\times3+1$$
$$100=3\times33+1$$
$$1000=3\times333+1$$
$$10000=3\times3333+1$$
etc.

Toda cantidad conforme al sistema de la numeración, está compuesta de la suma de los productos de cada cifra significativa por la potencia respectiva de 10, más las unidades, por ejemplo:

$$582=5\times100+8\times10+2$$

Si en esta ecuación sustituimos en lugar de 100 su valor $3\times33+1$, y en lugar de 10 su igual $3\times3+1$, tendremos:

$$582=5\times(3\times33+1)+8\times(3\times3+1)+2$$

ejecutando las multiplicaciones resulta:

$$582=(5\times3\times33)+5+(8\times3\times3)+8+2$$

ordenando: $582=(5\times3\times33)+(3\times3\times3)+5+8+2$

siendo divisibles exactamente por 3, las dos partes $(5\times3\times33)$ y $(8\times3\times3)$ por ser múltiplas de 3, resulta que siempre que la otra parte $5+8+2$, formada de la suma de las cifras significativas de la cantidad sea un número, como 15, divisible por 3, la cantidad 582 lo será, por serlo todas las partes de que consta.

125.—*Una cantidad será divisible exactamente por 9 cuando lo sea la suma de las cifras significativas que la representan.*

Por ejemplo, la cantidad 864 será divisible por 9 cuando la suma de sus cifras significativas $8+6+4$ sea un número, como 18, divisible por 9.

Demostración.—Hemos visto (118) que *cualquiera potencia de* 10 *dividida por* 9 *da* 1 *de resta*, por lo que se tiene:

$$10=9\times1+1$$
$$100=9\times11+1$$
$$1000=9\times111+1$$
etc.

Toda cantidad conforme al sistema de numeración, se compone de la suma de los productos de cada cifra significativa por la potencia respectiva de 10, más las unidades, esto es,

$$864=8\times100+6\times10+4$$

Si en esta ecuación sustituimos en lugar de 100 su valor $9\times11+1$, y en lugar de 10 su igual $9\times1+1$, tendremos:

$$864=8\times(9\times11+1)+6\times(9\times1+1)+4$$

Ejecutando las multiplicaciones resulta:

$$864=(8\times9\times11)+8+(6\times9\times1)+6+4$$

ordenando: $864=(8\times9\times11)+(6\times9\times1)+8+6+4$

siendo divisibles exactamente por 9 las partes $(8\times9\times11)$ y $(6\times9\times1)$ por ser múltiplas de 9, resulta que siempre que la otra parte $8+6+4$ formada de la suma de las cifras significativas de la cantidad sea un número como 18, divisible por 9, la cantidad 864 lo será, por serlo todas las partes de que consta.

* (126).—Para explicar el fundamento de la regla que sirve para averiguar si una cantidad es divisible por 7, demostraremos préviamente el siguiente

Teorema.—*La resta que queda al dividir una cantidad por un número, es la misma que la que resulta de dividir por este número la suma de los productos que se obtienen multiplicando respectivamente cada una de las cifras que en la cantidad representa unidades, decenas, centenas, etc., por cada una de las restas que queda en la división de 1, de 10, de 100, etc., por el divisor propuesto.*

Para facilitar nuestro razonamiento, aplicable á cualquiera cantidad y á cualquier divisor, nos serviremos de la cantidad 586 y del divisor 7.

Conforme á las convenciones del sistema de numeración

$$586=6\times1+8\times10+5\times100\ldots\ldots\ldots(1)$$

Si sucesivamente dividimos 1, 10 y 100 por 7, obtendremos:

$1\div7$ da por cociente 0 y por resta.....1
$10\div7$ da por cociente 1 y por resta.....3
$100\div7$ da por cociente 14 y por resta.....2

y vamos á demostrar que

resta de $586 \div 7 =$ resta de $(6\times1+8\times3+5\times2)\div7$.

En efecto, siendo

$$1=7\times0+1$$
$$10=7\times1+3$$
$$100=7\times14+2$$

si substituimos estos valores en la ecuación (1), obtendremos:

$$586=6(7\times0+1)+8(7\times1+3)+5(7\times14+2)$$

ejecutando las multiplicaciones indicadas:

$$586=(6\times7\times0)+6\times1+(8\times7\times1)+8\times3+(5\times7\times14)+5\times2$$

ordenando los sumandos se tiene:

$$586=(6\times7\times0)+(8\times7\times1)+(5\times7\times14)+6\times1+8\times3+5\times2$$

Como si cantidades iguales se dividen por iguales, los resultados serán iguales, tendremos:

$$\frac{586}{7}=\frac{(6\times7\times0)}{7}+\frac{(8\times7\times1)}{7}+\frac{(5\times7\times14)}{7}+\frac{6\times1+8\times3+5\times2}{7}$$

y como los dividendos de las tres primeras partes del segundo miembro de esta ecuación, por ser múltiplos de 7, al dividirlos por este número dan cero por resta, tendremos finalmente que

resta de $586 \div 7 =$ resta de $(6\times1+8\times3+5\times2)\div7$

que es lo que teniamos que demostrar.

Como habrá podido observarse, cuando sabemos que una potencia de 10, dividida por 7, por ejemplo 100, deja por resta 2, para el objeto de que ahora tratamos no es necesario conocer la parte que es múltipla de 7. En efecto, tenemos:

$$100=7\times14+2$$

5 centenas $\quad 500=(5\times7\times14)+5\times2$

dividiendo por 7, resulta:

$$\text{resta de } \frac{500}{7}=\text{ resta de } \frac{(5\times7\times14)}{7}+\frac{5\times2}{7}$$

pero como la parte que hemos escrito dentro de paréntesis es múltipla de 7, no necesitamos conocerla, supuesto que dará cero por resta, é inferimos que

resta de $500 \div 7 =$ resta de $5\times2\div7$

siendo 5 la cifra que representa centenas y 2 la resta que queda en la división de 100 entre 7.

Para determinar las condiciones de divisibilidad de una cantidad por 7 vamos á fundarnos en el teorema que acabamos de demostrar y el cual pueden aplicar los alumnos á cualquiera otro divisor.

Las restas de 10 y de todas sus potencias es fácil determinarlas, recordando (109) que la resta de la división del producto es la misma que la que se obtiene dividiendo por el número dado el producto de las restas que hayan resultado al dividir los factores.

1	dividido por 7 da 0 por cociente y por resta					..1
10	„	7 „ 1	„	„		..3
$100=10\times10$	„	7 dará por resta la misma que				$\frac{3\times3}{7}$...2
$1000=10\times100$	„	7 „	„	„		$\frac{3\times2}{7}$...6
$10000=10\times1000$	„	7 „	„	„		$\frac{3\times6}{7}$...4
$100000=10\times10000$	„	7 „	„	„		$\frac{3\times4}{7}$...5

Desde la sexta potencia de 10 en adelante volverán á encontrarse las mismas restas 1, 3, 2, 6, 4 y 5, y en igual orden, por lo cual se llaman estos números *período* de la división por 7.

Una vez conocidos los números que forman el *período* de la división por 7 en nuestro sistema de numeración, podemos establecer la siguiente:

Regla.—*Para conocer si una cantidad es divisible por 7 se escriben debajo de los guarismos que la representan, de derecha á izquierda, los números del período* 1, 3, 2, 6, 4 *y* 5 *las veces que sea necesario: se multiplica cada cifra de la cantidad por la que está debajo de ella y se suman los productos. Cuando por constar ésta suma de muchos números no es fácil determinar si es divisible por* 7, *se escriben debajo de los guarismos de la suma los correspondientes del período, se multiplican respectivamente y se suman los productos. Si la suma obtenida es divisible por* 7, *lo será la cantidad propuesta.*

Ejemplo.—Se quiere saber si el número 35.883,694 es divisible por 7. Para esto se escriben debajo de los guarismos de esta cantidad los