del período, se multiplican respectivamente y se suman los productos como se ve en seguida:

	PRODUCTOS.		PRODUCTOS.
Cantidad propuesta 35883694	$1\times4=4$	Cantidad 147	$1\times7=7$
Período de 7.....31546231	$3\times9=27$	Período..231	$3\times4=12$
	$2\times6=12$		$2\times1=2$
	$6\times3=18$		—
	$4\times8=32$		21
	$5\times8=40$		
	$1\times5=5$	Siendo 21 divisible por	
	$3\times3=9$	7 lo será la cantidad	
	——		35883694
	147	séptima parte	5126242

Demostración.—La cantidad propuesta

$$35.883,694=4+9.10+6.10^2+3.10^3+8.10^4+8.10^5+5.10^6+3.10^7$$

Si dividimos por 7 los dos miembros de esta ecuación, la resta que quede al dividir la cantidad 35.883,694, conforme al teorema demostrado al principio de este párrafo, será igual á la que resulte de dividir por dicho número la suma de los productos de cada una de sus cifras significativas por el guarismo correspondiente del período 1, 3, 2, 6... de la división de 7; luego si la división de la suma de estos productos no deja resta, la cantidad propuesta será exactamente divisible por 7.

* (127.)—Condiciones para que una cantidad sea divisible por 11.—Para determinar éstas seguiremos un procedimiento semejante al que hemos empleado para averiguar cuándo un número es divisible por 7, y por 9; pero como el divisor 11 es mayor que 10, consideraremos la cantidad formada de la suma de los productos de 1, 100, 100^2 y las potencias sucesivas de 100 multiplicadas por factores formados de dos en dos cifras. Por ejemplo, el número 5758192 lo consideraremos formado de las partes $92\times1+81\times100+75\times100^2+5\times100^3$ En seguida determinaremos las restas que resultan de la división de 1, 100, 100^2 y de las potencias sucesivas de 100 entre 11; multiplicaremos estas restas por los factores correspondientes á cada parte, y la suma de estos productos deberá ser divisible por 11 para que lo sea toda la cantidad.

1 dividido por 11 da por resta 1
100 dividido por 11 da por resta 1,

luego 100^2 dividido por 11, dará por resta 1, supuesto que la resta del

producto de dos cantidades 100×100, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas 1×1 de los factores (109).

Por la misma razón, todas las potencias de 100 divididas por 11 darán 1 por resta.

Tenemos que $5758192=92\times1+81\times100+75\times100^2+5\times100^3$

Si dividimos el número 5758192 por 11, la resta de la división será igual á la que resulta de dividir la suma de las restas de las partes que lo forman por 11; pero la de cada parte $92\times1, 81\times100, 75\times100^2$ y 5×100^3 es igual á la del factor de 1, de 100, y de las potencias de 100, supuesto que la resta de 1, de 100 y de las potencias de 100 son la unidad (109); luego la resta que resulte de dividir el número 5758192 por 11 será igual á la que dé la división de la suma de los factores $92+81+75+5$. La suma de estos factores es 253; considerando esta cantidad compuesta de las partes $53\times1+2\times100$ y raciocinando como antes, inferiremos que 253 dividido por 11, dará la misma resta que la suma de los factores $53+2$, pero como 55 es divisible exactamente por 11, deduciremos que lo será 253, y en consecuencia la cantidad 5758192.

En resumen, se ve que una cantidad será divisible por 11 cuando lo sea la suma de los períodos de dos en dos guarismos de que está formada, contando de derecha á izquierda. Tal es el fundamento de la siguiente

Regla.—*Para conocer si un número es divisible por 11, se le divide en períodos de dos en dos cifras, contando de derecha á izquierda; se suman estos períodos y si la suma es divisible exactamente por 11, lo será el número propuesto. Cuando la suma de los períodos consta de más de dos cifras, se dividirá en períodos de dos en dos guarismos, comenzando por las unidades, y se sumarán éstos; si su suma es divisible por 11, lo será el número propuesto.*

Ejemplo.—Queremos determinar si el número 25802458 es divisible por 11.

25802458
58
24
80
25
187
87
1
88

Como se ve al lado, descompondremos el número en períodos de dos en dos cifras contando de derecha á izquierda, y los sumaremos. No pudiéndose determinar á primera vista si la suma 187 es divisible por 11, lo descompondremos en períodos de dos cifras, y como su suma es 88, número divisible exactamente por 11, inferiremos que el número propuesto 25802458 también será divisible por 11. Se conoce que un número menor que 100 es múltiplo de 11 en que el guarismo de las decenas es igual al de las unidades, como 22, 33, 44, etc.

Indicaremos otro método que se emplea frecuentemente para determinar si una cantidad puede ser exactamente divisible por 11.

Regla.—*Para conocer si un número es divisible por* 11, *se suman separadamente los guarismos de orden par y los de orden impar; se busca la diferencia entre las dos sumas, y si esta diferencia es* 0 *ó un número divisible exactamente por* 11 *lo será la cantidad propuesta.*

Ejemplo.—Sea por averiguar si el número 85650983 es divisible por 11.

85650983	
3	8
9	0
5	6
5	8
22—22=0	

Sumaremos los guarismos de orden impar, 3, 9, 5 y 5, y separadamente los de orden par 8, 0, 6, y 8. Siendo las dos sumas iguales, la diferencia es 0, por lo cual conoceremos que el número propuesto es divisible exactamente por 11. Otras veces la diferencia de las dos sumas es 11 ó un múltiplo de ese número.

Demostración.—Determinando el período de las restas que resultan de dividir 1, 10, 10^2 y las potencias sucesivas de 10 se obtiene que

1 dividido por 11 da por resta 1
10 dividido por 11 da por resta 10
10^2 dividido por 11 da por resta 1
10^3 dividido por 11 da por resta 10

y así sucesivamente; por lo que el período de las restas es 1 y 10.

Un número cualquiera

$$5896=6\times1+9\times10+8\times10^2+5\times10^3$$

dividido por 11, dará la misma resta que la suma de los productos de sus cifras significativas por los números correspondientes del período 1 y 10. En consecuencia, el número propuesto 5896 será divisible por 11 cuando lo sea la suma de los productos

$$6\times1+9\times10+8\times1+5\times10$$

Para determinar fácilmente si será divisible por 11 la suma de esos productos observaremos que cualquiera cantidad multiplicada por 10 es igual al producto de la misma cantidad por 11, menos dicha cantidad. Por ejemplo, $3\times10=3\times11-3$; porque aumentándose al multiplicador una unidad, deberemos restar el multiplicando 3 para que no se altere el producto 3×10. Si en la suma de los términos anteriores ponemos en lugar de 9×10 su igual $(9\times11)-9$, y en lugar de 5×10 su igual $(5\times11)-5$, tendremos:

$$6\times1+9\times10+8\times1+5\times10=6+(9\times11)-9+8+(5\times11)-5$$

Si dividimos por 11 el segundo miembro de esta ecuación, siendo las partes (9×11) y (5×11) divisibles exactamente por 11, el resultado de la división dependerá del que den las otras partes:

$$6-9+8-5=6+8-9-5=[6+8]-[9+5]$$

supuesto que lo mismo es restar de la suma $6+8$ primero 9 y en seguida 5 que restar de una vez la suma $9+5$. En último análisis, se ve que el número 5896 será divisible por 11 cuando la diferencia que hay entre $6+8$, suma de los guarismos de orden impar, y $9+5$, suma de los de orden par, sea cero ó un número divisible por 11.

Esta 2ª regla sirve para averiguar facilmente si un número es divisible por 11; pero por medio de ella *no siempre* se determina *la resta* que dejaría la división de un número por 11. La razón de esto es que para facilitar el procedimiento, hemos agregado y quitado 10, lo cual no altera el valor del resultado, pero sí el del cociente y el de la resta. Por ejemplo, siendo $30=3\times10=3\times11-3$, tenemos que

$$30\div11=2+\tfrac{8}{11}$$
$$30\div11=3-\tfrac{3}{11}$$

resultados de igual valor, pero en los que los cocientes y las restas son distintos.

128.—Teorema.—*Si una cantidad es divisible separadamente por dos números primos entre sí, lo será igualmente por el producto de estos dos números.*

Si por ejemplo, 60 es divisible separadamente por 10 y por 3, números primos entre sí, decimos que 60 será divisible por 30, producto de 10 por 3.

Supuesto que 60 es divisible exactamente por 10, será múltiplo de este número, y tendremos:

$$60=10\times6 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por otra parte, en razón de que 60 es divisible igualmente por 3, tendrá que ser múltiplo de este número, esto es, 3 debe entrar forzosamente como factor en la formación de 60. Ahora bien, como

$$60=10\times6$$

el divisor 3 tiene que servir de factor para producir 10, ó 6; pero como 10 no puede ser múltiplo de 3, por ser 10 y 3 números primos entre sí, se infiere que el otro factor 6 de 60 tendrá que ser múltiplo de 3. En este ejemplo, tendremos:

$$6=3\times2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Substituyendo este valor en la ecuación (1) se obtiene finalmente:

$$60=10\times3\times2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ecuación que nos hace ver que 60 es múltiplo del producto de los números primos 10 y 3, por lo cual será divisible por 30, que es lo que debíamos demostrar.

Debe observarse que este teorema *solo se verifica cuando los divisores son primos entre sí* Así, 12 que es divisible por 2 y por 4 no será divisible por su producto 8, por que no siendo 2 y 4 números primos entre sí, el divisor 4 contiene como factor el otro divisor 2. Descomponiendo 12 en sus factores se ve en efecto que no contiene á 8, pues $12=2\times2\times3=4\times3$.

129.—*Cuando una cantidad sea divisible por* 2 *y por* 3, *será igualmente divisible por* 6.

Porque siendo 2 y 3 números primos entre sí, conforme al teorema demostrado en el párrafo anterior, una cantidad divisible por estos dos números lo será por su producto 6.

130.—*Cuando una cantidad sea divisible por* 3 *y por* 4, *lo será por su producto* 12.

Porque 3 y 4 son números primos entre sí, y 12 es su producto [128.]

131.—En resumen, según se ha visto, *una cantidad es divisible*:

1º *Por* 2 *y por* 5 *cuando sus unidades lo son:* porque siendo siempre las decenas divisibles por 2 y por 5, cuando lo sean las unidades lo serán sus dos partes.

2º *Por* 10 *cuando carece de unidades*, por ser múltiplo de 10.

3º *Por* 4 *cuando el conjunto de unidades y decenas forman una parte divisible por* 4; porque siendo $100=4\times25$, cuando las decenas y unidades forman un número divisible por 4 lo serán sus dos partes.

4º *Por* 8, *cuando la parte compuesta de centenas, decenas y unidades es divisible por* 8; porque siendo $1000=8\times125$, si el grupo de centenas, decenas y unidades es divisible por 8 lo serán sus dos partes.

5º *Por* 3, *cuando la suma de todos los guarismos que forman la cantidad dé un múltiplo de* 3, porque 10 y todas sus potencias divididas por 3 dan 1 de resta.

6º *Por* 9, *cuando la suma de los guarismos que forman la cantidad es un múltiplo de* 9, por la misma razón.

7º *Por* 6, *cuando sea divisible por* 3 *y por* 2; porque 6 es el producto de estos dos números primos entre sí.

8º *Por* 12, *cuando el número sea divisible por* 3 *y por* 4, por igual razón.

PRUEBAS DE LA MULTIPLICACION Y DIVISION DE ENTEROS.

132.—Teorema.—*Cuando se suman las cifras significativas de una cantidad hasta reducirla á unidades simples* (70), *se obtiene una cifra igual á la resta que daría la cantidad dividida por* 9.

Demostración.—Un número cualquiera como 326 puede descomponerse en las partes siguientes, conforme al sistema de numeración:

$$326=3\times100+2\times10+6$$

sustituyendo por 100 y por 10 sus valores:

$$100=9\times11+1$$
$$10=9+1$$

tendremos: $$326=3(9\times11+1)+2(9+1)+6$$

ejecutando la multiplicación:

$$326=(3\times9\times11)+3+(2\times9)+2+6$$

pero como las partes puestas dentro de los paréntesis son múltiplas de 9, resulta que dividiendo por 9 los dos miembros de esta ecuación:

$$\text{resta de } \frac{326}{9}=\text{resta de } \frac{3+2+6}{9}$$

Para determinar la resta que daría la división por 9 de la suma de las cifras significativas de la cantidad

$$3+2+6=11$$

descompondremos 11 en sus partes como sigue:

$$11=1\times10+1=1\times[9+1]+1=1\times9+1+1$$

dividiendo por 9 los dos miembros de esta ecuación, resulta:

$$\text{resta de } \frac{11}{9}=\text{resta de } \frac{1+1}{9}=2$$

luego resta de $\frac{326}{9}$ es 2, y por tanto cuando se reduce una cantidad á unidades simples, se determina la resta que daría dividiéndola por 9.

Demostración de la regla del número 70.—Si sabemos, por ejemplo, que

$$346 \times 876 = 303096$$

tendremos: resta de $\frac{346 \times 876}{9}$ = resta de $\frac{303096}{9}$

Como por una parte si el producto de dos factores y cada uno de ellos se dividen separadamente por un número como 9, la resta que queda en la división del producto, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas de los dos factores por el mismo número [109], y por otra, la resta que queda en la división de un número por 9 es igual á la cifra que resulta de reducir á unidades simples este número [132], se infiere que cuando no se ha cometido error en una multiplicación, el producto reducido á unidades simples debe dar una cifra igual á la que se obtiene de multiplicar las cifras que han resultado de los factores reducidos á unidades.

En nuestro ejemplo: resta de $\frac{4 \times 3}{9}$ debe ser igual á 3, resta de la división del producto.

133.—Demostración de la regla del número 87.—Si dividiendo, por ejemplo, 303104 entre 634 se obtiene 478 como cociente y 52 por resta, como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más la resta, tendremos:

$$303104 = 634 \times 478 + 52$$

y como si con cantidades iguales se ejecutan operaciones iguales, los resultados serán iguales, tendremos:

$$\text{resta de } \frac{303104}{9} = \text{resta de } \frac{634 \times 478}{9} + \text{resta de } \frac{52}{9}$$

pero como por una parte la resta que queda de la división de un número por 9 es la cifra que resulta de reducirlo á unidades simples (132), y por otra la resta que queda en la división del producto, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas de los factores por el mismo número (109), se infiere que cuando no se ha cometido error en una división de enteros, el dividendo reducido á unidades simples debe dar una cifra igual á la que se obtiene de reducir á unidades simples

el producto del divisor por el cociente más la resta reducidos cada uno de estos números á unidades simples.

En nuestro ejemplo debe resultar 2, cifra del dividendo, igual á $4 \times 1 + 7$ reducido á unidades, igual á 2.

Estas reglas son aplicables aun cuando las cantidades sean múltiplas de 9, lo cual se conoce en que reducidas á unidades simples dan la cifra 9.

134.—Estas pruebas pueden dar resultados falsos, cuando se ha cometido algún error en la prueba, ó cuando se ha invertido la colocación de los guarismos. Cuando se quiere averiguar esto, pueden buscarse las restas de la división de los términos y de los resultados de la multiplicación ó división por otro número; comunmente se escoge por divisor el número 11, sumando los guarismos divididos en periodos de dos en dos comenzando por la derecha.

* (135).—Observaciones sobre el cálculo de los números enteros.—En lo que hemos expuesto se habrá observado que el sistema de numeración está fundado en formar unidades superiores constantemente iguales al conjunto de diez de la especie menor. Para denominar los números nos servimos de pocos términos que combinados dan una idea de su valor; y con el objeto de representarlos con pocos guarismos, se les ha dado á éstos, además de su valor propio, otro relativo ó de posición, que crece de derecha á izquierda en la misma relación que las potencias sucesivas de 10; sirviendo el cero para indicar la carencia de cualquier orden de unidades y conservar á los demas guarismos el valor que les coresponde. Un número cualquiera es igual á la suma de los productos de cada cifra significativa multiplicada por la potencia de 10 correspondiente al orden de sus unidades, más las unidades simples.

El fundamento de la ejecución de las operaciones de enteros consiste en dividir éstos en las partes del sistema de numeración de que están compuestos, esto es, en unidades, decenas, centenas, etc., y ejecutar las operaciones con estas partes. Con excepción de la división, las operaciones se comienzan por las unidades de especie menor. El objeto de cada operación es engendrar un número nuevo, de un modo peculiar á la naturaleza de cada operación.

Para la adición y substracción es condición indispensable que las cantidades sean homogéneas, y el resultado de estas operaciones es de la misma especie que los datos de la cuestión. En la multiplicación el producto es de la especie del multiplicando, y al multiplicador se le puede considerar como abstracto. En la división la pregunta determina la especie del cociente.

La suma consta de tantas unidades como todos los sumandos juntos y es siempre mayor que uno y que varios sumandos. La resta consta de las unidades que le faltan al substraendo para ser igual al minuendo, y es siempre menor que este término. El producto de una multiplicación de números enteros, generalmente es mayor que los factores que lo han formado, y tantas veces mayor que un factor, como unidades tiene el otro; pero la multiplicación no siempre da el resultado de aumento que el significado de esta palabra envuelve en el lenguage común: el objeto de esta operación es engendrar un número que tenga con el multiplicando la misma relación que el multiplicador tiene con la unidad; por esto, una cantidad multiplicada por la unidad no aumenta sino que da la misma cantidad, y multiplicada por cero produce cero. El cociente de una división que no ha dado resta, es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el divisor. Cuando la división no resulta exacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más la resta.

La regla dada en la substracción para el caso de que uno ó varios guarismos del substraendo sean mayores que los correspondientes del minuendo, se funda en que la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando se les agrega una misma cantidad. Las abreviaciones indicadas para los casos de la multiplicación y de la división, se fundan en las convenciones del sistema de numeración, haciéndose el valor de una cantidad 10 veces mayor por cada cero que se le agrega á la derecha, y disminuyéndose proporcionalmente cuando se suprimen ceros: en que toda cantidad multiplicada ó dividida por la unidad, da la misma cantidad: en que todo número multiplicado por 0 produce 0, y en que el cociente no se altera cuando se multiplican ó dividen por un mismo número el dividendo y el divisor. El resultado de la adición, substracción y multiplicación de los enteros siempre es número entero; pero el resultado de la división unas veces es entero y otras una fracción ó un número fraccionario.

Las propiedades de los factores y de los divisores de los números enteros, se han deducido de las de los números primos, y de las de las partes en que las cantidades pueden descomponerse. Unas veces se han descompuesto los números en las partes del sistema de numeración que los forman; otras en los factores de que constan, y otras en productos de determinado divisor, más una resta. De tales fundamentos, se han deducido las reglas correspondientes para encontrar los factores y divisores de un número, para determinar el máximo común divisor, y para obtener el menor múltiplo común á varios números. Por último, fundándose en las propiedades del número 10 y de sus potencias divi-

didas por los primeros números primos, hemos fijado las condiciones que debe satisfacer una cantidad para que sea divisible por los números inferiores á 12.

CALCULO DE LAS FRACCIONES COMUNES Y DE LOS NUMEROS FRACCIONARIOS.

SISTEMA DE NUMERACIÓN, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

136.—Definiciones.—Vamos á tratar en este capítulo del modo de calcular con las cantidades, cuyos valores estén comprendidos entre 0 y la unidad, ó entre dos números enteros consecutivos. Cuando decimos que tenemos tres cuartas partes de vara, el valor de la cantidad es mayor que cero y menor que una vara, y cuando decimos que tenemos 8 varas y 5 sextas partes de vara, este es un valor comprendido entre 8 y 9 varas.

Si tuviéramos que dividir, por ejemplo, 25 pliegos de papel entre cuatro personas, como $25 \div 4$ les toca á 6 y sobra 1; daríamos 6 pliegos enteros á cada persona, y debiendo repartir el pliego sobrante entre cuatro, lo partiríamos en cuatro pedazos iguales y daríamos uno de ellos á cada persona. Cada uno de estos pedazos es menor que la unidad y es la cuarta parte de ella. Se representa por $\frac{1}{4}$ de pliego, y se lee un cuarto de pliego.

Si tuviéramos que repartir 29 manzanas entre 8 niños; como $29 \div 8$ les toca á 3 y sobran 5: daríamos 3 manzanas á cada niño y para distribuir entre ellos las 5 sobrantes, por ser 8 los niños, cada manzana la partiríamos en 8 pedazos iguales y dando cinco de estos pedazos á cada niño resulta que recibiría en conjunto 3 manzanas enteras y 5 octavas partes de una manzana. Este resultado se representa por $3+\frac{5}{8}$ de manzana, y se lee: 3 más 5 octavos de manzana.

Estos números como $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{8}$ menores que la unidad se llaman *quebrados*. Los números como $3+\frac{5}{8}$ se llaman *mixtos*, y cuando el número mixto tiene la forma de quebrado se le llama *fraccionario*, como $\frac{6}{4}=\frac{4}{4}+\frac{2}{4}=1+\frac{2}{4}$. En un quebrado como $\frac{5}{8}$, el número 8 que indica en cuántas partes se considera dividida la unidad se llama *denominador*, y el número 5 que expresa de cuántas de estas partes consta el quebrado se llama *numerador*.

Considerando el peso dividido en 4 partes, las pesetas son fracciones