Los resultados de las operaciones de los denominados son exactos, lo mismo que los de los quebrados, á diferencia de los de las decimales, que la mayor parte de las veces sólo son aproximados.

ELEVACION A POTENCIAS Y EXTRACCION DE RAICES.

198.—Potencia de los números.—Definición.—*Se llama potencia de un número, el producto que resulta de multiplicarlo una ó varias veces por sí mismo.*—Por ejemplo, si $9=3\times3$, 9 será una potencia de 3; y si $27=3\times3\times3$, 27 será igualmente otra potencia de 3.

El grado de la potencia lo indica el número de factores iguales que forman el producto; así 9 es la segunda potencia, y 27 es la tercera potencia del número 3.

Multiplicando sucesivamente por sí mismos varias veces los números que representan las unidades, formaremos las segundas, terceras, etc., potencias de estos números cuyos resultados constan en la siguiente tabla.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª potencia
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

De estos números es útil saber de memoria los correspondientes á la 2ª y 3ª potencia.

A la 2ª *potencia* se le llama *cuadrado*, y á la 3ª *potencia*, *cubo*.

La elevación á una potencia se indica poniendo un poco arriba y á

la derecha de la cantidad un número más pequeño que sirve para expresar su grado, y se llama *exponente*.

Por ejemplo, 56 elevado á la 4ª potencia se escribe así: 56^4, siendo el número 4 el que indica el grado de ésta. La cantidad suele ponerse debajo de una raya ó dentro de un paréntesis así; $\overline{1087}^3$, ó $(1087)^3$.

Definición.—*Se llama exponente el número que indica cuántas veces una cantidad entra como factor en el producto.*

$$56^4=56\times56\times56\times56$$

Regla.—*Para elevar una cantidad á una potencia, se multiplica por sí misma tantas veces como unidades tiene el exponente de la potencia menos una.* El número de factores es igual al exponente, y el de multiplicaciones es una unidad menos.

Cuando se trata de una potencia superior, se descompone, cuando es posible, el exponente en varios sumandos, iguales entre sí; se eleva sucesivamente la cantidad á las potencias indicadas por cada uno de los sumandos, y en seguida se multiplican entre sí los resultados obtenidos.

Por ejemplo, se quiere elevar el número 20 á la 13ª potencia. Como $13=4+4+4+1$, tendremos que

$$20^{13}=20^4\times20^4\times20^4\times20$$

y para obtener el primer factor 20^4, observaremos que es igual á $20^2\times20^2$, con lo cual se economizan algunas multiplicaciones y el resultado se obtiene con más facilidad.

La razón de esta regla es, que buscándose el valor de un producto en el que la cantidad 20 entre 13 veces como factor, lo mismo es formar ese producto por multiplicaciones sucesivas del mismo factor, que por multiplicaciones de resultados que contengan á 20 varias veces como factor. Por ejemplo:

$$20^5=20\times20\times20\times20\times20=(20\times20\times20)\times(20\times20)=20^3\times20^2$$

luego

$$20^5=20^3\times20^2$$

Para elevar un quebrado á una potencia, se elevan por separado el numerador y el denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador

$$\left(\tfrac{2}{5}\right)^3=\tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5}=\frac{2\times2\times2}{5\times5\times5}=\frac{2^3}{5^3}=\tfrac{8}{125}$$

Conforme á lo que se explicó en el número (160), la potencia de un quebrado propio es menor que este quebrado; por esto, $\frac{8}{125}<\frac{2}{5}$.

Cuando se eleva una decimal ó un entero junto con decimales á una potencia, debe observarse que el número de decimales del resultado será igual al número de las que tiene la cantidad multiplicado por el exponente de la potencia. La razón de esto es, que en cada producto se separan tantas decimales como hay en ambos factores juntos (177).

Así, si se eleva 0'25 á la 2ª potencia, el resultado tendrá $2\times2=4$ cifras decimales. Si se eleva á la 3ª potencia el resultado tendrá 6 decimales, y si se eleva á la 5ª potencia, tendrá 10 decimales.

199.—Raíces y números inconmensurables.—Definición.—*Se llama raíz de una cantidad, el número que, multiplicado una ó varias veces por sí mismo, da por producto la cantidad propuesta.* Así, por ejemplo, 5 es la raíz cuadrada de 25, porque 5×5 produce 25. La raíz 3ª ó cúbica de 27 es 3, porque $3\times3\times3=27$.

En la tabla puesta al principio del párrafo anterior, los números que ocupan la primera columna, representan las raíces 2ª, 3ª y 4ª, etc., de los números puestos respectivamente en las columnas 2ª, 3ª y 4ª, etc.

La inspección de la tabla nos hace conocer, que la potencia de un número entero siempre es número entero; pero debemos advertir, que los números intermedios entre las potencias de dos números consecutivos, no tienen raíz exacta. Por ejemplo, el cuadrado de 5 es 25, el de 6, es 36, pues bien, la raíz de 30 será un número comprendido entre 5 y 6, la cual podrá obtenerse con cuanta aproximación sea necesaria, pero nunca será enteramente exacta, porque 5 más una fracción multiplicado por sí mismo, da por producto un número mixto, y no un número entero como 30. Así como la división de dos números enteros cuando no es exacta, conduce á la formación de los números fraccionarios, del mismo modo la extracción de la raíz de un número que no es potencia de otro entero, conduce á la formación de una nueva especie de números que se llaman *inconmensurables ó irracionales*, porque no se pueden medir exactamente con la unidad, y porque la relación que existe entre el número y su raíz, no puede expresarse por la de dos números enteros. Para que un número entero sea una potencia cabal de otro, es necesario que, descompuesto en sus factores primos, cada uno de estos resulte elevado á la misma potencia.

Para representar la operación de la extracción de la raíz de una cantidad, se usa el signo radical $\sqrt{}$ colocando debajo de la línea horizontal la cantidad, y entre las ramas el grado de la raíz por medio de un número que se llama índice. Así:

$$\sqrt[6]{64}=2$$

Se lee, raíz 6ª de 64 igual á 2, y significa que 64 es el producto en que 2 entra 6 veces como factor, esto es:

$$64=2\times2\times2\times2\times2\times2$$

Para comprobar que un número es raíz de otro, bastará dividir este por la raíz, así como los cocientes que sucesivamente vayan resultando hasta obtener la unidad como último cociente. El número de divisiones determina el grado de la raíz.

La raíz de un quebrado se obtiene extrayendo la del numerador y la del denominador, como operación inversa de la ejecutada al elevarlo á una potencia.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{2}{5}$$

La raíz de un entero junto con decimales, se extrae sacando primero la de los enteros y en seguida la de las decimales; teniendo cuidado de que el número de cifras decimales sea un múltiplo del índice del radical para lo que se agrega á la derecha de las decimales el número de ceros que es necesario.

CUADRADO Y RAIZ CUADRADA.

200.—Elevación de un número al cuadrado.—Definición.—*Se llama cuadrado de un número, el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo.* Por ejemplo, 64 es el cuadrado de 8, supuesto que $8\times8=64$.

La elevación de un número al cuadrado, se indica poniendo el exponente 2 arriba y á la derecha de la cantidad, la cual algunas veces se pone debajo de una raya y otras dentro de un paréntesis, de la manera siguiente:

$$25^2 \text{ ó } \overline{25}^2 \text{ ó } (25)^2=625$$

Para elevar un número al cuadrado, basta multiplicarlo por sí mismo.

Si el número es entero, su cuadrado será también número entero. Si el número es un quebrado, para obtener el cuadrado se elevará por separado el numerador y el denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador; en este caso, el resultado es quebrado, y además, es

menor que el quebrado que se eleva al cuadrado, porque el producto de los quebrados propios es menor que cualquiera de los factores (160).

Si el número que se eleva es mixto, su cuadrado también lo será: y si está compuesto de enteros y decimales, el cuadrado constará en la parte decimal de un número de cifras decimales duplo de las de la cantidad. La razón de esto es, que siendo el cuadrado de un número el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo; y debiendo tener el producto de las decimales tantas cifras decimales como hay en ambos factores juntos, en nuestro caso, éstas serán un número doble de las que tenga la cantidad que se eleva al cuadrado.

Igual observación tiene que hacerse cuando la cantidad que se eleva al cuadrado sólo es decimal; el cuadrado consta de un número de cifras doble de las de la decimal, y su valor numérico es menor que el de la cantidad que se eleva al cuadrado. Como resumen de lo expuesto pondremos los siguientes ejemplos:

$25^2=625$	número	entero mayor que 25.
$(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$	„	quebrado menor que $\frac{3}{4}$.
$(2+\frac{3}{4})^2=7+\frac{9}{16}$	„	mixto mayor que $2+\frac{3}{4}$
$(0'04)^2=0'0016$	„	decimal, con doble número de cifras decimales y menor que 0'04.
$(3'04)^2=9'2416$	„	mixto con doble número de cifras decimales y mayor que 3'04.

201.—Elevación al cuadrado de un número compuesto de decenas y de unidades.—Si queremos elevar al cuadrado el número $36=30+6$, su cuadrado será igual al producto que resulte de multiplicar $30+6$ por $30+6$ de la manera siguiente:

$$\begin{array}{l} 30+6 \\ 30+6 \\ \hline 900=30\times30 \quad \text{Cuadrado de las decenas} \\ 180=30\times\ 6 \\ 180=30\times\ 6 \quad \Big\} \text{ Dos veces decenas por unidades.} \\ 36=\ 6\times\ 6 \quad \text{Cuadrado de las unidades.} \\ \hline 1296=30^2+2\times(30\times6)+6^2 \\ (d+u)^2=d^2+2\times(d\times u)+u^2 \end{array}$$

Al multiplicar 30 por 30, formamos el cuadrado de las decenas; al multiplicar 30 por 6, obtenemos un producto de decenas por unidades; al multiplicar 6 por 30, obtenemos otro producto de decenas por unidades, igual al anterior, y al multiplicar 6 por 6 formamos el cuadrado de las unidades.

En consecuencia, *el cuadrado de todo número compuesto de decenas y de unidades, consta de tres partidas: 1ª cuadrado de las decenas; 2ª doble producto de las decenas por las unidades, y 3ª cuadrado de las unidades.* *

El objeto con que se determinan las partidas de que se compone el cuadrado de un número, es el de tener un procedimiento general para determinar la raíz de un número y para poderla aproximar.

Debe observarse: 1º, que decenas cuadradas producen centenas, supuesto que estando terminado cada uno de los factores en un cero, el producto debe llevar dos ceros (71, 5º caso) esto es, debe expresar centenas; 2º, el doble producto de decenas por unidades, debe expresar decenas, supuesto que uno de los factores, las decenas, termina en un cero; y 3º, la tercera partida, el cuadrado de las unidades, siempre tiene unidades aunque conste de dos ó más guarismos.

La unidad elevada al cuadrado ó á cualquiera potencia, produce la unidad, y como $10^2=100$, resulta que los cuadrados de los números compuestos de un solo guarismo, esto es, menores que 10, están comprendidos entre 1 y 100. Como $100^2=10000$, resulta que los cuadrados de los números comprendidos entre 10 y 100, esto es, compuestos de dos cifras, estarán comprendidos entre 100 y 10000, tendrán 3 ó 4 cifras. Como $1000^2=1000000$, resulta que los cuadrados de los números de 3 cifras,

* La demostración de este principio, así como la de todos aquellos que se refieren más bien á la relación que al valor de las cantidades, se puede dar mejor haciendo uso de los signos algebráicos. Considerando todo número compuesto de decenas y unidades, si representamos por la letra d las decenas y por u las unidades, multiplicando $(d+u)$ por $(d+u)$, tendremos los productos parciales de que se compondrá el cuadrado de cualquier número formado de decenas y unidades. Ejecutando la multiplicación, tendremos:

$$\begin{array}{l} d+u \\ d+u \\ \hline d^2+d\times u+d\times u+u^2=d^2+2d\times u+u^2 \end{array}$$

luego

$$(d+u)^2=d^2+2d\times u+u^2$$

que son las tres partidas de que consta el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades.

Si en vez de descomponer un número en decenas y unidades lo descomponemos en dos partes, y representamos por d la primera parte y por u la segunda, multiplicándolo por sí mismo, generalizaremos el principio demostrado, diciendo que el cuadrado de un número consta: del cuadrado de la primera parte, más el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda. Por ejemplo:

$$(4+5)^2=4^2+2.4\times5+5^2$$
$$(4+1)^2=4^2+2.4\times1+1^2$$
$$(4+\tfrac{3}{8})^2=4^2+2.4\times\tfrac{3}{8}+(\tfrac{3}{8})^2$$

tendrán 5 ó 6 guarismos, y en general, conforme á la observación hecha al final del número 68, el cuadrado de un número cualquiera constará de un número doble de cifras de las que él tiene ó de una menos.

202.—Raíz cuadrada.—Definición.—*Se llama raíz cuadrada de un número á la cantidad que multiplicada por sí misma, produce el número propuesto.*

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 81 es 9, supuesto que $9 \times 9 = 81$.

$\sqrt{7298}$: se lee, raíz cuadrada de 7,298.

203.—Ejemplo para extraer la raíz cuadrada.—El método natural para encontrar una raíz cuadrada, sería ir formando los productos sucesivos de todos los números, unidad por unidad, hasta encontrar el cuadrado del número que más se aproximara al propuesto; pero además de lo penoso de este método, sería ineficaz para las aproximaciones, por lo cual, una vez determinadas las partidas de que consta el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, se prefiere buscar un número, la suma de cuyas partidas se aproxime más al número dado.

Si se trata de conocer la raíz cuadrada de la cantidad 55298, la operación se dispondrá y ejecutará como sigue:

```
                    √5,52,98 | 235      √5,52,98 | 235
                             |-----      -------|-----
2².................—4          | 43        1 5,2  | 43
                   ----      |-----      -------|-----
                   15,2        465        239,8  465
3 × 43............—12 9                    7 3
                    ------
                     2 39,8
5 × 465...........—2 32 5
                    -------
                       7 3

1ª resta.................  23<2×23
2ª resta.................  73<2×235
```

Dividida la cantidad en períodos de dos en dos guarismos, se busca el mayor cuadrado contenido en 5, que es 4, cuya raíz es 2. El cuadrado de este número, restado de 5 da 1 por resta, á cuyo lado bajamos el período 52. Separamos el último guarismo 2; duplicamos la raíz y escribimos este duplo, 4, debajo de ella; dividimos 15 entre 4, y el cociente 3 lo escribimos al lado del 4 y de la raíz 2. El cociente 3 se multiplica por 43, cantidad formada con el duplo de las decenas de la raíz y sus unidades, y el producto 129 se resta de 152. Al lado de la resta 23, bajamos el período 98: separando el guarismo 8 dividimos 239

entre 46, duplo de la raíz; y el cociente 5 lo ponemos al lado de 23 y de 46. En seguida multiplicamos las 5 unidades de la raíz por 465, número formado con el duplo de 23 (decenas de la raíz), más 5 unidades y el producto lo restamos de 2398, quedando la resta 73.

Este resultado nos indica que la raíz cuadrada de 55298 no es un número exacto, estando comprendida entre 235 y 236. La extracción de la raíz cuadrada, pocas veces conduce á un resultado exacto, y el verdadero valor en nuestro ejemplo, debe concebirse así:

$$55298 = 235^2 + 73$$

Esta resta 73 es el exceso de 55298 sobre el cuadrado de 235.

Por cada período que se baja debe obtenerse un guarismo en la raíz ó cero. Además, la resta no debe ser mayor que el duplo de la raíz hallada. En caso contrario, es seguro que el último guarismo de la raíz es menor de lo que debía ser.

204.—Regla.—*Para extraer la raíz cuadrada de un número, se divide éste en períodos de dos guarismos contando de derecha á izquierda; se busca la raíz del mayor cuadrado contenido en el período de la izquierda, que podrá constar de uno ó de dos guarismos; se escribe ésta raíz á la derecha de la cantidad separándola por una línea vertical como en la división; se forma el cuadrado de la raíz hallada, y se resta del primer período de la izquierda; al lado de la resta se baja el período siguiente; se separa el último guarismo de la derecha; se duplica la raíz y por el resultado, que se escribe debajo de ella, se divide el número separado á la izquierda en la cantidad formada con la resta y el segundo período, poniendo el cociente al lado de la raíz y á la derecha del duplo de las decenas de la raíz; las unidades de la raíz se multiplican por la cantidad así formada, y se resta el producto de la cantidad formada con la resta y el período que se bajó á su derecha. Si el guarismo de las unidades es mayor que el verdadero la resta no podrá efectuarse, y si es menor, la resta resultará mayor que el duplo de la raíz. Al lado de la resta obtenida se baja el período siguiente: se separa el último guarismo, y la cantidad de la izquierda se divide por el duplo de la raíz hallada, poniendo al lado de esta el cociente; este cociente se multiplica por cantidad formada con el duplo de las decenas de la raíz y las unidades, y el producto se resta de la cantidad formada con la resta y el período bajado á su lado. Así se continúa la operación, y si la cantidad es un cuadrado completo, la última resta será 0. Cada período que se baja produce un guarismo ó cero en la raíz.*

205.—Demostración de la regla.—Refiriéndonos á un ejemplo, haremos raciocinios generales aplicables á cualquiera otro. Hemos visto que el cuadrado de un número se compone de tres partidas: 1ª, el cuadrado

de las decenas; 2ª, doble producto de decenas por unidades, y 3ª, cuadrado de las unidades. En consecuencia, si de una cantidad restamos sucesivamente estas tres partidas del cuadrado del número que expresa la raíz, habremos quitado el cuadrado de la raíz. Para más facilitar la inteligencia de esta demostración, elevamos al cuadrado por sus partidas el número 73=70+3. La primera partida expresa 49 centenas; la segunda expresa 42 decenas y la tercera 9 unidades. Vamos á extraer ahora la raíz cuadrada del número 5329, dando la razón de todo lo prescrito en la regla general.

$$d^2 = 4900$$
$$2d \times u = 420$$
$$u^2 = 9$$
$$73^2 = 5329$$

$\sqrt{53,29}$	73
—49	143
42,9	
—42,9	
00 0	

Como $10^2=100$, en el hecho de tener el número 5329 más de dos guarismos, su raíz constará de decenas y unidades, y el número 5329 contendrá las tres partidas dichas. Vamos á buscar las decenas de la raiz valiéndonos de la primera partida: *decenas cuadradas*. Pero como decenas cuadradas producen centenas, no las encontraremos en el 29, que representa decenas y unidades, razón por la cual separaremos este período de dos cifras. El mayor cuadrado de un número dígito contenido en 53 es 49, cuya raiz 7 será el valor de las decenas de la raíz, y conocidas éstas, formaremos la primera partida del cuadrado, $70^2=4900$, y la restaremos de 5329, ó simplemente 49 de 53 centenas, quedando la resta de 4 centenas, á cuyo lado se baja el período 29. En el número 429 debemos tener las dos partidas restantes, y para encontrar las unidades nos valemos de la segunda: *doble producto de las decenas por las unidades;* y como el valor de esta partida expresará decenas, no la encontraremos en el 9 que representa unidades, y por esta razón lo separaremos; 42 será, pues, el producto de dos factores, siendo uno, el duplo de las decenas y el otro las unidades; y como si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor (75), resulta que dividiendo 42 entre 14, duplo de las decenas, el cociente 3 nos expresará las unidades de la raiz. Una vez encontradas éstas, formamos las dos partidas restantes, duplo de las decenas multiplicado por las unidades, igual á 420, y cuadrado de las unidades, igual á 9, cuya suma se resta de 429. Las partidas del cuadrado nos han servido para encontrar las partes de la raíz, y una vez conocidas éstas, hemos restado del número propuesto las partidas del cuadrado de la raíz, luego habremos quitado el cuadrado de la raiz. Como en el ejemplo propuesto no queda resta, resulta que $\sqrt{5329}=73$.

Decíamos que *la resta no debe ser mayor que el duplo de la raíz.* La razón de esto es, que si conocemos el cuadrado de un número, por ejemplo, el de 25, y deseamos encontrar el de 26=(25+1), lo obtendremos formando las partidas de sus dos partes, que son:

$$(25+1)^2=25^2+2\times25+1.$$

En consecuencia, si el cuadrado de un número una unidad mayor que otro, es igual al cuadrado de éste, más el doble de este número, más 1, es claro que cuando la resta sea mayor que el duplo de la raíz hallada, las unidades de ésta podrán aumentarse con una unidad, y debe repetirse la operación.

206.—Aproximación de la raíz cuadrada.—*Cuando el resultado de la raíz cuadrada de un número entero no es exacto, se aproxima por decimales, agregando sucesivamente á cada resta dos ceros por cada decimal que se quiere obtener en la raíz, y se continúa la operación hasta alcanzar la aproximación apetecida, teniendo cuidado de separar con una coma la parte entera de la decimal.*

Sea, por ejemplo, extraer la raíz cuadrada á 698.

$\sqrt{6,9\,8}$	26'41
2 9,8	46
2 2'0,0	52'4
1 040,0	52'81
5119	

Ejecutando la operación como se ha dicho, encontraremos la raíz 26 unidades y la resta 22. Para encontrar las décimas de la raíz, agregamos dos ceros al lado de 22, ponemos la coma después de la raíz 26, y procediendo como antes, encontramos 4 décimas en la raíz, y 104 centésimas de resta. A ésta agregamos dos ceros y encontramos 1 centésima en la raiz y 0'5119 por resta.

Demostración.—Cuando se agregan dos ceros á la derecha de cada resta, no se hace sino reducir unidades á centésimas, centésimas á diezmilésimas, etc., y se agregan sucesivamente *dos* ceros, porque para que haya décimas en la raíz, es preciso que haya centésimas en el cuadrado; para que haya centésimas en la raíz es preciso que haya diezmilésimas en el cuadrado, etc. (200), y en general por cada cifra decimal de la raíz debe haber dos en el cuadrado.

Regla.—*Para determinar el valor de la resta, cuando se ha aproximado la raíz cuadrada por decimales, se separarán, contando de derecha á izquierda, doble número de cifras decimales de las que tenga la raíz.*

En el último ejemplo, la resta es 0'5119; habiéndose omitido escribir la coma que separa las unidades de las decimales para no hacer confusa la operación.

207.—Extracción de la raíz cuadrada de las decimales.—Ocurren dos casos: cuando hay enteros juntos con decimales, y cuando sólo hay decimales.

1º *Cuando hay enteros con decimales, antes de comenzar la operación se examina si el número de cifras decimales es ó no par; y cuando no lo es,*

se agrega á la derecha un cero. En seguida se ejecuta la operación conforme á la regla general (204), *teniendo cuidado de poner la coma de separación entre los enteros y las decimales en la raíz, al bajar el primer período de cifras decimales.*

Sea como ejemplo extraer la $\sqrt{235'273}$.

Comenzamos por agregar un cero á la derecha de las decimales para que éstas sean pares, y luego ejecutamos la operación por la regla general, teniendo cuidado de distinguir en la raíz las decimales de los enteros.

Demostración.—El valor del número cuya raíz debemos obtener, no se altera agregándole un cero á la derecha, (168—3°); y es necesario agregar este cero porque conforme á la regla de la multiplicación, cuando se eleva al cuadrado un número que tiene decimales, es indispensable que el producto conste de un número par de decimales; luego cuando esta condición no esté satisfecha tendremos que comenzar por cumplir con ella para poder obtener en la raíz una decimal por cada período del cuadrado.

√2,3 5'27,30	15'33
1 3,5	25
1 02,7	30'3
11 83,0	30'63
2 64 1	

2° Caso.—*Cuando solo hay decimales, se hace que el número de éstas sea par, y con este objeto se agrega un cero á la derecha cuando sea necesario. Se pone en la raíz 0 como raíz de la parte entera, una coma, y en seguida se extrae la raíz de las decimales como si fueran enteros.*

Por ejemplo,

√0'87,50	0'93
6 5,0	0'183
1 0 1	

$$0'875=(0'93)^2+0'0101$$

Demostración.—Como la raíz de cero unidades es cero, por eso ponemos cero en la parte de los enteros de la raíz y como por cada cifra decimal que haya en la raíz debe haber dos cifras en el cuadrado, por eso hacemos que el número de cifras decimales sea par, agregando un cero á la derecha, lo cual no altera el valor de la decimal.

Cuando la parte decimal sea una fracción periódica, en lugar de agregar ceros, tanto para hacer que las cifras decimales sean pares, como para aproximar la raíz, se agregarán las cifras correspondientes del período.

La prueba de la raíz cuadrada se ejecuta elevando al cuadrado la raíz encontrada, y agregando al producto la resta, debe obtenerse el número propuesto. Operación que se facilita reduciendo las cantidades á unidades simples.

208.—Extracción de la raíz cuadrada de los quebrados.—En la ejecu-

ción de esta operación se presentan tres casos: 1°, *cuando los dos términos del quebrado tienen raíz exacta;* 2°, *cuando solo uno de sus términos tiene raíz exacta;* y 3°, *cuando ni el numerador ni el denominador tienen raíz exacta.*

En el *primer caso* se extrae la raíz del numerador y la del denominador separadamente, y el quebrado formado con estas raíces será la raíz del quebrado propuesto, una vez que para elevar un quebrado al cuadrado se elevan separadamente su numerador y su denominador.

Por ejemplo, $\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{4}{7}$

Segundo caso.—*Cuando uno solo de los términos del quebrado tiene raíz exacta,* se le extrae exacta al que la tenga y aproximada al otro término, con lo cual se obtiene un quebrado, uno de cuyos términos es entero y el otro se compone de enteros y decimales. A este quebrado se le da la forma común agregando al término entero tantos ceros como cifras decimales tenga el otro, suprimiendo en seguida la coma y simplificándolo cuanto sea posible.

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{16}{58}}=\frac{4}{7,61}=\frac{400}{761}$

√58	7'61
90,0	14'6
2 40,0	15'21
87 9	

En este ejemplo, como el denominador es aproximado, esto es, menor que el verdadero, el quebrado $\frac{400}{761}$ es mayor que la raíz exacta de $\frac{16}{58}$. Cuando el numerador no tenga raíz exacta, el resultado será menor que el verdadero.

Tercer caso.—*Cuando ninguno de los dos términos del quebrado tiene raíz exacta,* se reduce éste al segundo caso multiplicando ambos términos por el numerador ó por el denominador, y en seguida se ejecuta la regla antes dada.

Si se quiere extraer la raíz cuadrada de $\frac{5}{7}$, cuyos términos no son ni uno ni otro cuadrados perfectos, multiplicaremos por el denominador sus dos términos, lo cual no altera su valor y diremos:

$$\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{35}{49}}=\frac{5'91}{7}=\frac{591}{700}$$

√35	5'91
10'00	10'9
190,0	11'81
71 9	