La raíz cúbica de un quebrado propio, ó de una decimal es mayor que el quebrado ó la decimal; porque según se ha visto (160 y 177), en la multiplicación de los quebrados ó de las decimales, cualquiera de los factores es mayor que el producto, y aquí la raíz viene á hacer papel de factor del quebrado ó de la decimal dada.

Para extraer la raíz cúbica de un número mixto se ransformará préviamente en quebrado impropio, ó en enteros con decimales, y en seguida se extraerá la raíz del quebrado impropio (217), *ó la de los enteros con decimales* (216).

Para extraer la raíz cúbica de un denominado se convertirá préviamente en decimal, y en esta forma se le extraerá la raíz.

RAZONES Y PROPORCIONES.

218.—Razones.—Para adquirir la idea de la magnitud de una cantidad, hasta ahora lo hemos hecho refiriéndola á la de la unidad; pero hay veces en que el valor de una cantidad se compara con el de otra cantidad de su misma especie, y á la relación que se advierte entre ellas se llama razón de las cantidades comparadas. Por ejemplo, cuando se dice que una persona es 10 años mayor que su hermano, no se atiende al número de años que cada cual tenga y que podrá ser más ó menos grande, sino á la diferencia de edad de las personas, siendo 10 la razón. Cuando se dice que el oro vale 16 y media veces más que la plata, no se refiere el valor de cada metal al de la unidad de su especie, sino que se comparan entre sí los valores de los dos metales, y el resultado $16\frac{1}{2}$ es la *razón.*

Definición.—*Se llama, pues, razón, á la relación que existe entre dos cantidades homogéneas que se comparan,* y también se da este nombre al número que expresa la relación. Cuando los términos de la razón son heterogéneos, se consideran como abstractos.

La comparación puede hacerse determinando la diferencia que hay entre las dos cantidades, ó bien el número de veces que una contiene á la otra. *Las cantidades que se comparan forman los términos de la razón llamándose antecedente al primero u consecuente al segundo.*

219.—Razón aritmética.—Definición.—*Se llama razón aritmética la diferencia que hay entre dos cantidades homogéneas.*

La razón aritmética se indica poniendo un punto entre las dos cantidades que se comparan:

$$22 \,.\, 14$$

se lee: 22 es á 14. Otras veces se indica poniendo el signo menos entre las dos cantidades: 22—14=8. Las dos cantidades 22 y 14 forman los términos de la razón, llamándose á la primera, 22, *antecedente,* y á la segunda, 14, *consecuente* de la razón.

La propiedad fundamental de *la razón aritmética es: que no se altera cuando se agregan ó quitan á sus dos términos cantidades iguales.*

Demostración.—Supuesto que razón aritmética es la diferencia que hay entre dos cantidades, se puede considerar el antecedente como el minuendo, y el consecuente como el substraendo de una resta, y una vez que la resta no se altera cuando se agrega ó se quita una misma cantidad al minuendo y al substraendo (50); otro tanto sucederá con la razón aritmética.

220.—Razón geométrica.—Definición.—*Se llama razón geométrica el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades homogéneas.*

La razón geométrica, que suele llamarse *por cociente,* se indica poniendo dos puntos entre las cantidades comparadas:

$$24 : 8;$$

y se lee: 24 es á 8. Otras veces se indica en forma de quebrado poniendo el antecedente de la razón como numerador, así $\frac{24}{8}$, y en ambos casos se determina la razón dividiendo el antecedente por el consecuente.

Teorema.—*La razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.*

Demostración.—Siendo la razón geométrica el cociente que resulta de dividir uno por otro sus dos términos, y supuesto que el cociente de una división no se altera cuando se multiplican ó dividen el dividendo y el divisor por un mismo número (79); lo mismo sucederá con la razón geométrica. Cuando á ésta se le da la forma de quebrado, se sabe igualmente que el valor de un quebrado no se altera cuando se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número.

221.—Proporciones.—Sucede á menudo en matemáticas, que entre dos cantidades de una especie, existe la misma relación que entre otras dos cantidades, generalmente de diferente especie que la de las primeras, aunque homogéneas entre sí. Esta igualdad de relación de magni-

tudes ó de valores, es lo que constituye una proporción y es un manantial fecundo en aplicaciones prácticas. Así, cuando por ejemplo, se sabe que 30 varas de paño valen 100 pesos, puede determinarse el valor de 60 ó de otro número cualquiera de varas, á causa de que entre 100 pesos y el valor de 60 varas tiene que haber la misma relación que entre 30 y 60 varas.

Por medio de las proporciones, y valiéndose de métodos más ó menos indirectos, se determinan las distancias con ayuda de los ángulos; el peso de los cuerpos por medio de sus volúmenes, etc.

Definición.—*Se llama, pues, proporción la igualdad de dos razones.* La proporción será aritmética ó geométrica, según sea la clase de las razones que la forman.

Una proporción consta de cuatro términos: dos que forman la primera razón, y dos que constituyen la segunda; siendo siempre de rigor la condición de igualdad entre las dos razones.

222.—Proporción aritmética.—Definición.—*Se llama proporción aritmética la igualdad de dos razones artiméticas.*

La proporción aritmética se indica como sigue:

$$11 \,.\, 7 : 9 \,.\, 5;$$

y se lee: 11 es á 7, como 9 es á 5. Suele llamarse equidiferencia, é indicarse 11—7=9—5.

Se llaman *antecedentes* en la proporción á los números que en las razones que la constituyen forman también los antecedentes; 11 es el primer antecedente, y nueve el segundo antecedente. Igual distinción se hace con los *consecuentes.* A 7 y á 9 se les llama los *medios* de la proporción: y á 11 y á 5 los *extremos,* indicando estos últimos nombres, la posición relativa de los cuatro términos de la proporción. Se llama *proporción continua aquella cuyos medios son iguales;* por ejemplo:

$$12 \,.\, 8 : 8 \,.\, 4,$$

en este caso, 8 es un medio aritmético entre los números 12 y 4, y la proporción suele indicarse de esta manera:

$$\div\ 12 \,.\, 8 \,.\, 4;$$

debiendo repetirse el término medio al leerla.

La propiedad fundamental de la proporción aritmética es, que la suma de los extremos es igual á la de los medios.

Demostración.—Sea la proporción: $13 \,.\, 8 : 9 \,.\, 4,$
la cual podemos poner en la forma $13-8=9-4,$
supuesto que proporción es la igualdad de dos razones. Y como si

á cantidades iguales se agregan iguales, los resultados serán iguales, podremos agregar á cada razón la suma de los consecuentes 8+4 subsistiendo la igualdad.

$$13-8+8+4=9-4+8+4;$$

pero en el primer miembro de esta ecuación, tenemos que +8 y —8=0 y en el segundo miembro +4 y —4=0; luego quedará

$$13+4=9+8;$$

como 13 y 4 son los extremos de la proporción, y 9 y 8 los medios, se infiere que la suma de los extremos es igual á la de los medios.

En la proporción aritmética, la propiedad fundamental nos sirve para resolver dos problemas: primero, encontrar el cuarto término de una proporción cuando se conocen los otros tres; y segundo, hallar un medio aritmético entre dos cantidades dadas.

Regla.—*Para encontrar el cuarto término de una proporción aritmética, si el término que se busca es un extremo, se suman los medios, y de la suma se resta el extremo conocido; si lo que se busca es un medio, se sumarán los extremos y se restará el medio conocido.*

Ejemplo.—Si se quiere encontrar el cuarto término de una proporción aritmética, cuyos tres primeros son

$$15 \,.\, 7 : 10 \,.\, x$$

Sumaremos 7 y 10=17, y de esta suma restaremos el extremo conocido 15, y como 17—15=2, este número será el cuarto término de la proporción 15 . 7 : 10 . 2. Lo mismo que se acostumbra en álgebra, aquí hemos representado por x la cantidad desconocida.

Demostración.—Como en la proporción aritmética la suma de los extremos es igual á la de los medios, la suma 7+10, será igual á la del extremo 15 con el número que buscamos, y como si de la suma de dos cantidades se quita una de ellas, la resta nos da la otra, se infiere que restando de la suma de los medios el extremo conocido, tendremos el otro extremo, cuarto término de la proporción.

Regla.—*Para hallar un medio aritmético, entre dos números dados, se suman éstos y se toma la mitad de la suma.*

Ejemplo.—Para hallar un medio aritmético entre los números 9 y 17, se suma 9+17=26 y la mitad, 13 de 26, será el medio aritmético buscado.

$$9 \,.\, 13 : 13 \,.\, 17$$

Demostración—Debiendo ser la suma de los extremos conocidos igual

á la de los medios, cuando éstos hayan de ser iguales, la suma de los extremos será el doble del término medio, luego tomando la mitad de la suma de los extremos, obtendremos el medio aritmético.

Teorema.—*Recíprocamente, siempre que en cuatro cantidades la suma de dos de ellas sea igual á la de las otras dos, las cuatro cantidades formarán una proporción aritmética.*

Demostración.—Sean las cuatro cantidades 17, 11, 28, 22 en las que se tiene que $17+22=11+28$.

Como si á cantidades iguales se quitan iguales, los resultados serán iguales, la ecuación anterior subsistirá restando á sus dos miembros el segundo y cuarto término, esto es,

$$17+22-11-22=11+28-11-22;$$

pero como $+22-22=0$ y $+11-11=0$,
quedará: $17-11=28-22$,

y supuesto que proporción aritmética es la igualdad de dos razones aritméticas, con las cuatro cantidades podemos formar una proporción,

$$17 \,.\, 11 : 28 \,.\, 22,$$

que es lo que se quería demostrar.

Este principio sirve de fundamento á varias transformaciones que pueden hacerse en una proporción aritmética sin alterarla, y son: *alternar* medios ó extremos; *invertir* los medios por los extremos, y *permutar* las razones.

223.—Proporción geométrica.—Definición.—*Se llama proporción geométrica, la igualdad de dos razones geométricas.*

La proporción geométrica se indica así

$$24 : 8 :: 27 : 9,$$

y se lee: 24 es á 8 como 27 es á 9. Se suele llamar proporción por cociente é indicarse: $\frac{24}{8}=\frac{27}{9}$ leyéndose siempre del mismo modo. Las denominaciones de *antecedentes*, *consecuentes*, *medios*, *extremos*, *primera* y *segunda razón*, son las mismas que las explicadas en la proporción aritmética.

Se llama proporción geométrica continua aquella cuyos medios son iguales, y suele indicarse así:

$$\div\ 16 : 8 : 4,$$

y se lee: 16 es á 8 como 8 es á 4.

La propiedad fundamental de la proporción geométrica es que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Demostración.—Desarrollaremos nuestro raciocinio con la proporción:

$$5 : 15 :: 6 : 18$$

Fundándonos en que razón geométrica, es el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades, tendremos que la primera razón es $\frac{5}{15}$ y que la segunda es $\frac{6}{18}$, y como proporción es la igualdad de dos razones, podremos establecer la ecuación

$$\frac{5}{15}=\frac{6}{18}$$

Como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados serán iguales, la ecuación anterior subsistirá multiplicando sus dos miembros por el producto 15×18 de los consecuentes y tendremos:

$$\frac{5}{15}\times15\times18=\frac{6}{18}\times15\times18.$$

Como en el primer miembro tenemos 15 como factor y 15 como divisor, el cociente será la unidad: y en el segundo miembro tenemos 18 que multiplica y 18 que divide, igual á 1; haciendo las correspondientes simplificaciones resulta que:

$$5\times18=6\times15,$$

pero 5 y 18 son los extremos, y 6 y 15 los medios, luego el producto de los extremos será igual al de los medios.

La propiedad fundamental sirve para resolver dos problemas de la proporción geométrica. primero encontrar un término cuando se conocen los otros tres; y segundo, hallar un medio geométrico entre dos números dados.

Regla.—*Para encontrar el extremo de una proporción geométrica, se multiplican los medios, y el producto se divide por el extremo conocido, para hallar un medio se multiplican los extremos, y el producto se divide por el medio conocido.*

Ejemplo.—Se quiere encontrar el cuarto término de la proporción geométrica.

$$3 : 9 :: 7 : x.$$

Multiplicaremos los medios 7 y 9, y el producto 63 lo dividiremos por el extremo 3 conocido; el cociente 21 será el cuarto término de la proporción:

3 : 9 :: 7 : 21.

Este principio es el fundamento de la resolución de los problemas que se llaman *regla de tres* y de sus numerosas aplicaciones.

Demostración.—Como en toda proporción geométrica, según hemos visto, el producto de los extremos es igual al de los medios, el producto 63 de los medios será igual al del extremo 3 multiplicado por el extremo que buscamos; y como si el producto de dos cantidades se divide por una de ellas, el cociente será el otro factor, resulta, que dividiendo el producto de los medios por el extremo conocido 3, el cociente será el otro extremo, 21, cuarto término de la proporción.

Regla.—*Para encontrar un medio geométrico entre dos números dados, se multiplicarán éstos y al producto se le extrae la raíz cuadrada.*

Ejemplo.—Se quiere encontrar un medio geométrico entre 4 y 16. Multiplicaremos $4\times16=64$ y extrayendo la raíz cuadrada á 64; que es 8, este número será el medio geométrico buscado.

∺ 4 : 8 : 16.

Demostración.—Siendo el producto de los extremos igual al de los medios, en la proporción geométrica continua será igual al cuadrado del término medio; luego extrayendo la raíz cuadrada al producto de los números dados, obtendremos el medio geométrico buscado.

Teorema.—*Recíprocamente, siempre que en cuatro cantidades el producto de dos de ellas es igual al de las otras dos, las cuatro cantidades estarán en proporción geométrica.*

Demostración.—Si en las cuatro cantidades 8, 3, 24 y 9, se verifica que el producto de dos de ellas es igual al de las otras dos, podremos poner la ecuación:

$$8\times9=3\times24.$$

Dividiendo los dos miembros por el producto, 3×9, de la segunda por la cuarta cantidad, tendremos:

$$\frac{8\times9}{3\times9}=\frac{3\times24}{3\times9}$$

simplificando estos quebrados, resulta que

$$\frac{8}{3}=\frac{24}{9}$$

siendo iguales los dos cocientes que dan estas cantidades, podremos formar la proporción:

8 : 3 :: 24 : 9,

que es lo que se quería demostrar.

Este teorema nos sirve para efectuar diversas transformaciones en una proporción geométrica sin que se altere.

224.—Transformaciones que pueden efectuarse en la proporción geométrica.—Fundándonos en que, siempre que en cuatro cantidades se verifique que el producto de los extremos es igual al de los medios las cuatro cantidades estarán en proporción; podremos efectuar en una proporción dada, las tres transformaciones siguientes que referiremos á la proporción 3 : 4 :: 6 : 8.

1ª *Alternar, que es mudar de lugar los medios ó los extremos.*

Por ejemplo de	3 : 4 :: 6 : 8
Alternando medios se obtiene	3 : 6 :: 4 : 8
„ extremos	8 : 4 :: 6 : 3

Demostración.—Si se forma el producto de extremos y medios en la primera y en la segunda proporción, se obtiene:

$$3\times8=4\times6$$

después de alternar $3\times8=6\times4$

y como el orden de los factores no altera el producto, resulta que, si las cuatro cantidades estaban antes en proporción, después de haber alternado los medios ó los extremos, también lo estarán.

2ª *Invertir, que es poner los medios en lugar de los extremos, y éstos en lugar de aquellos.*

Por ejemplo: refiriéndonos á la proporción	3 : 4 :: 6 : 8
Invirtiendo se obtiene	4 : 3 :: 8 : 6

Demostración.—Si se forma el producto de los extremos y de los medios de ambas proporciones, se observará que como los factores son los mismos, sus productos serán iguales, y en consecuencia subsistirá la proporción después de haber invertido.

3ª *Permutar, que es poner la primera razón en lugar de la segunda, y recíprocamente.*

De la proporción	3 : 4 :: 6 : 8
Permutando se obtiene	6 : 8 :: 3 : 4

Demostración.—Subsiste la proporción porque los mismos números forman el producto de extremos y medios en ambas proporciones.

Fundándonos en que proporción es *la igualdad de dos razones*, podremos hacer en una proporción dada las tres siguientes transformaciones, las cuales referiremos á la proporción

12 : 9 :: 8 : 6

4ª *Componer, que es comparar la suma del antecedente y consecuente en cada razón, con el consecuente.*

Por ejemplo, $12 : 9 :: 8 : 6$
Componiendo $12+9 : 9 :: 8+6 : 6.$

En efecto, poniendo la proporción primitiva en forma de ecuación, tendremos:

$$\frac{12}{9}=\frac{8}{6}$$

como si á cantidades iguales se agregan iguales, los resultados serán iguales; agregando 1, resulta:

$$\frac{12}{9}+1=\frac{8}{6}+1$$

ejecutando la suma indicada:

$$\frac{12+9}{9}=\frac{8+6}{6}$$

formando con estos dos cocientes iguales una proporción, se tendrá:

$$12+9 : 9 :: 8+6 : 6$$

expresión que nos hace ver que puede hacerse en una proporción geométrica la transformación que hemos llamado *componer*.

5ª *Dividir, que es comparar la diferencia, entre el antecedente y consecuente en cada razón, con el consecuente.*

Por ejemplo: $12 : 9 :: 8 : 6$
Dividiendo $12-9 : 9 :: 8-6 : 6$
En efecto, tenemos $\frac{12}{9}=\frac{8}{6}$

quitando 1 á estas cantidades iguales, se tiene:

$$\frac{12}{9}-1=\frac{8}{6}-1$$

substituyendo por 1 respectivamente sus valores $\frac{9}{9}$ y $\frac{6}{6}$, se tendrá:

$$\frac{12}{9}-\frac{9}{9}=\frac{8}{6}-\frac{6}{6}$$

ó bien $$\frac{12-9}{9}=\frac{8-6}{6}$$

poniendo estos cocientes en forma de proporción:

$$12-9 : 9 :: 8-6 : 6$$

Expresión que demuestra que puede efectuarse la transformación que hemos llamado *dividir*.

6ª *Se pueden multiplicar ó dividir por un mismo número los antecedentes de una proporción, así como sus consecuentes, sin alterar la proporción.*

Sea la proporción $12 : 9 :: 8 : 6.$
Multiplicando los antecedentes por 3 cada razón se hará 3 veces mayor. $36 : 9 :: 24 : 6.$
Dividiendo los antecedentes por 2 cada razón se hará 2 veces menor. $6 : 9 :: 4 : 6.$
Multiplicando los consecuentes por 5 cada razón se hará 5 veces menor. $12 : 45 :: 8 : 30.$
Dividiendo los consecuentes por 3 cada razón se hará 3 veces mayor. $12 : 3 :: 8 : 2.$

Pero como en cualquier caso las dos razones han sufrido igual variación, resulta, que si antes eran iguales, lo serán después de haberse multiplicado ó dividido los antecedentes ó consecuentes por un mismo número.

225.—Teoremas ó propiedades de la proporción geométrica.

I.—*Los antecedentes caben uno en otro el mismo número de veces que los consecuentes.*

Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6$
Alternando medios $4 : 8 :: 3 : 6$

poniendo esta proporción en forma de ecuación, resulta $\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$, esto es, el cociente que se obtiene de dividir los antecedentes de la proporción primitiva es igual al que produce la división de los consecuentes, que es lo que se quería demostrar.

II.—*La suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6.$
Alternando medios $4 : 8 :: 3 : 6.$
Componiendo $4+8 : 8 :: 3+6 : 6.$
Alternando medios $4+8 : 3+6 :: 8 : 6.$

y supuesto que 4 y 8 son los antecedentes, y 3 y 6 son los consecuentes, resulta demostrado el teorema.

III.—*La diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6.$
Alternando medios $4 : 8 :: 3 : 6.$
Dividiendo $4-8 : 8 :: 3-6 : 6.$
Alternando medios $4-8 : 3-6 :: 8 : 6.$

y supuesto que 4 y 8 son los antecedentes, y 3 y 6 son los consecuentes, resulta demostrado el teorema.

IV.—*Una proporción no se altera cuando se multiplican ó dividen sus cuatro términos por un mismo número.*

Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6.$

Multiplicando por 10 todos los términos $40 : 30 :: 80 : 60.$

Esto se funda en que una razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número.

V.—*Si se multiplican ordenadamente dos proporciones, los cuatro productos que resulten estarán igualmente en proporción.*

Sean las proporciones

$$3 : 4 :: 6 : 8$$
$$10 : 9 :: 20 : 18$$

y vamos á demostrar que estarán igualmente en proporción los productos

$$3\times10 : 4\times9 :: 6\times20 : 8\times18$$

poniendo cada proporción en forma de ecuación, se tendrá:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

$$\frac{10}{9}=\frac{20}{18}$$

y como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados también lo serán, se tendrá:

$$\frac{3}{4}\times\frac{10}{9}=\frac{6}{8}\times\frac{20}{18}$$

ejecutando la operación

$$\frac{3\times10}{4\times9}=\frac{6\times20}{8\times18}$$

y con estos valores podemos establecer la proporción

$$3\times10 : 4\times9 :: 6\times20 : 8\times18$$

que es lo que debíamos demostrar.

VI.—*Si cuatro cantidades están en proporción, sus potencias del mismo grado también lo estarán.*

Sea la proporción $3 : 4 :: 6 : 8$

Puesta en forma de ecuación $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

Si cantidades iguales se elevan á una misma potencia, los resultados serán iguales; y como para elevar un quebrado á una potencia, es necesario elevar cada uno de sus términos, resulta, que si elevamos los dos quebrados $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ á una potencia cualquiera, á la cuarta, por ejemplo, tendremos:

$$\frac{3^4}{4^4}=\frac{6^4}{8^4}$$

y con estas cuatro cantidades formaremos una proporción,

$$3^4 : 4^4 :: 6^4 : 8^4$$

resultando así demostrado el teorema.

VII.—*Si cuatro cantidades están en proporción lo estarán igualmente sus raíces de un mismo grado.*

Sea la proporción $27 : 64 :: 216 : 512.$

Puesta en forma de ecuación será $\frac{27}{64}=\frac{216}{512}.$

y como las raíces de cantidades iguales son iguales, y la raíz de un quebrado se obtiene extrayéndola al numerador y al denominador, resulta que extrayendo, por ejemplo, la raíz cúbica de los dos miembros de la última ecuación, se obtiene:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\sqrt[3]{\frac{216}{512}},$$

ó

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{512}}$$

ecuación que puesta en forma de proporción,

$$\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{64} :: \sqrt[3]{216} : \sqrt[3]{512}.$$

demuestra el teorema.

VIII.—*Cuando deban multiplicarse ordenadamente dos ó más proporciones, se podrán suprimir los factores que sean comunes á los dos términos de la misma razón, los que sean comunes á los antecedentes, y los que lo sean á los consecuentes, multiplicándose únicamente los términos restantes.*

Sean por multiplicar las tres proporciones
$$\left\{\begin{array}{l} 2 : (3) :: 4 : 6 \\ (3) : 9 :: (5) : 15 \\ (5) : 4 :: 10 : 8. \end{array}\right.$$

$$2 : 9\times4 :: 4\times10 : 6\times15\times8.$$

En este ejemplo se podrá suprimir 3, que hemos colocado dentro de un paréntesis, por ser factor común al antecedente y al consecuente

de la primera razón: y se podrá suprimir 5 por ser factor común á los antecedentes de la proporción final.

La primera operación equivale á dividir por 3 los dos términos de la primera razón de la proporcion final, lo que no la altera; y la segunda operación equivale á dividir los antecedentes de la proporción resultante por 5, lo que tampoco la altera; pero debe tenerse cuidado de *no suprimir un término común á los medios ó á los extremos.* En el ejemplo de que nos ocupamos, se tiene 4 como factor de los medios que no puede suprimirse.

* (226).—Observaciones sobre las razones y las proporciones.—La razón aritmética es la diferencia entre dos cantidades. La geométrica es la indicación de un cociente por las cantidades que lo engendran. Las proporciones son la igualdad de dos razones. Toda la teoría y aplicaciones de las proporciones, están fundadas en la igualdad de las razones que constituyen la proporción, ó en su propiedad fundamental, que se deduce de esta igualdad, ó de que la suma, y en su caso de que el producto de los medios es igual al de los extremos. La principal aplicación de las proporciones es la de encontrar el cuarto término cuando se conocen los otros tres; pero siendo de uso frecuente las propiedades y transformaciones de las proporciones en matemáticas, conviene á los alumnos estar muy familiarizados con todo lo concerniente á ellas.

REGLA DE TRES.

227.—Problema.—En una semana 10 caballos consumen 3 cargas de cebada: en el mismo tiempo 25 caballos ¿cuántas cargas consumirán?

Como si el número de caballos se duplica, se duplicará igualmente el número de cargas de cebada que consumirán, y como si se triplican los caballos se triplicarán las cargas de cebada, se infiere que la misma relación que haya entre los números de los caballos, habrá entre las cargas consumidas, y por tanto, estas cantidades, por la naturaleza de la cuestión, serán proporcionales. Si representamos por x el número de cargas de cebada que buscamos, podremos establecer la siguiente proporción geométrica:

$$\overset{\text{cab.}}{10} : \overset{\text{cab.}}{25} :: \overset{\text{cgs.}}{3} : \overset{\text{cgs}}{x}$$

y como, conforme á lo explicado en las proporciones *para determinar el valor del cuarto término que se busca, hay que multiplicar los medios,* 3 *y* 25, *y dividir el producto por el extremo,* 10, *conocido tendremos que*

$$x=\frac{3\times 25}{10}=7\tfrac{1}{2} \text{ cargas de cebada,}$$

que será el consumo de los 25 caballos.

Se llama regla de tres, todo problema en que conocidos tres términos de una proporción geométrica, queda por determinar el cuarto.

228.—Problemas que pueden resolverse por regla de tres.—*Se conoce que una cuestión es de regla de tres cuando satisface á las siguientes condiciones:* 1ª, *que el enunciado del problema esté dividido en dos períodos;* 2ª, *que los términos del primer período sean homogéneos respectivamente á los del segundo;* 3ª, *que se conozcan tres cantidades y se busque una;* y 4ª, *que por la naturaleza del problema las cantidades sean proporcionales.*

Supuesto que en toda proporción la relación entre las dos cantidades que forman la 1ª razón, ha de ser la misma que existe entre las otras dos, se comprende la necesidad de la división del enunciado del problema en dos períodos, y la de que los términos del primer período sean respectivamente de la misma especie que los del segundo. Además, como la cuestión lleva por objeto encontrar el cuarto término de una proporción; es indispensable que se conozcan tres cantidades y se busque una.

En cuanto á la 4ª condición, fácilmente se comprende que para que pueda determinarse la cantidad desconocida por medio de la regla dada para hallar el 4º término de una proporción geométrica, es indispensable que las cantidades del problema, por la naturaleza de éste, sean proporcionales.

En el problema propuesto es fácil ver que están satisfechas las tres primeras condiciones, y respecto de la 4ª observaremos que los caballos y las cargas de cebada consumidas son cantidades *relativas,* puesto que del número de los primeros depende el de las cargas, y además que si se multiplican por determinado número los caballos, resultarán las cargas multiplicadas por el *mismo número,* y esta circunstancia, que depende de la naturaleza de la cuestión, es lo que hace que las cantidades que la forman *sean proporcionales.*

Consideremos el siguiente ejemplo: caminando 12 leguas al día, ha tardado una persona 15 días para ir de una ciudad á otra; caminando 10 leguas ¿cuántos dias empleará para recorrer la misma distancia?

En este problema las cantidades *relativas* son las leguas que se caminan diariamente y los días que se emplean; pero la naturaleza de la cuestión es tal, que si se *duplica* el número de leguas que se andan cada