III.—*Dividir una recta* A B (fig. 57) *en dos partes iguales.*

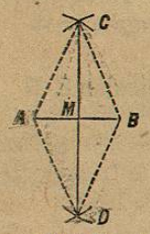

Figura 57.

Tómense como centros sucesivamente los extremos A y B de la recta, y con un radio mayor que la mitad de dicha recta trácense dos arcos, y reuniendo los puntos C y D de interseccion de los arcos por la recta C D, esta determinará el punto M que será el medio de la línea A B.

Demostracion.—Estando dos puntos C y D equidistantes de A y de B, si se reunen estos dos puntos resultarán dos triángulos A C D y B C D iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego si se doblara la figura por C D permaneciendo fijo el punto M, el punto B coincidiria con A, lo que prueba que las partes A M y B M son iguales.

IV.—*Dividir un ángulo C en dos partes iguales.*

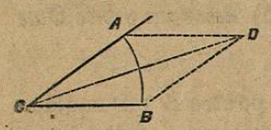

Figura 58.

Desde el vértice C (fig. 58) trácese un arco A B; haciendo centro en A y B descríbanse dos arcos que se cortarán en D, y reuniendo C con D esta recta dividirá en dos partes iguales el ángulo dado. En efecto, los dos triángulos A C D y B C D son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; y por estar opuestos á lados iguales en triángulos iguales, los ángulos A C D y B C D, serán iguales.

Como empleando el mismo procedimiento podrian dividirse en dos partes iguales cada uno de los ángulos A C D y B C D, resulta que así podrá sucesivamente dividirse en 4, 8, 16, etc., partes iguales.

V.—*Determinar el suplemento, y el complemento de un ángulo.*

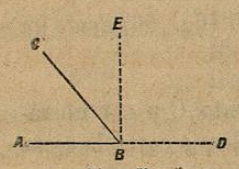

Figura 59.

Sea el ángulo A B C (fig. 59); bastará prolongar uno de sus lados, y conforme al teorema del núm. 389 el ángulo C B D será el suplemento del ángulo dado. Para determinar su complemento haciendo uso de la construccion del problema I de la figura 55 se levantará una perpendicular en el punto B y el ángulo C B E será el complemento buscado.

PARALELAS.

408.—Definicion.—*Se llaman paralelas las rectas que estando en un plano tienen todos sus puntos equidistantes.*

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre ella, para que dos rectas A B y C D sean paralelas (fig. 60) es necesario que las perpendiculares bajadas de dos puntos cualesquiera E y F sobre C D sean iguales.

409.—Teorema.—*Toda recta* J L (fig. 60) *perpendicular á una de dos paralelas, es tambien perpendicular á la otra.*

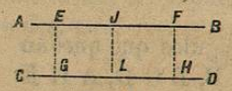

Figura 60.

Supongamos que J L sea perpendicular á C D, y vamos á demostrar que tambien lo será á A B, para lo que necesitaremos inferir que los ángulos L J B y L J A son iguales. Tomemos á distancias iguales de L los puntos H y G, y por ellos levantemos las perpendiculares H F y G E á C D, resultará que E G=F H por medir las distancias de los puntos de las dos paralelas A B y C D. Si dobláramos la figura por J L por ser esta línea perpendicular á C D, la parte L D tomaria la direccion de L C, y como por construccion L H=L G, el punto H coincidirá con G. Como F H y E G son perpendiculares á C D, la recta H F despues de doblada la figura deberia tomar la direccion de G E; y como además H F=G E resulta que el punto F caeria sobre E; y como el punto J ha permanecido fijo, se infiere que el ángulo L J B es igual á L J E que es lo que se debia demostrar.

410.—*Por un punto* A (fig. 61) *no se puede tirar más de una sola paralela á otra recta* B C.

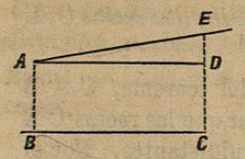

Figura 61.

Siendo A D paralela á B C, tendremos A B=C D. Si suponemos que pudiera tirarse otra paralela desde A, como A E, tendriamos A B=C E, de lo que resultaria C D=E C lo que es imposible, á ménos que A E coincida con A D.

Debemos insistir sobre lo que dijimos en la definicion, y es que las paralelas están en un mismo plano.

411.—*Si cada una de las rectas* A B y C D (fig. 62) *es paralela á una tercera recta* E F; *serán paralelas entre sí.*

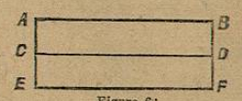

Figura 62.

Por ser A B paralela á E F se tiene

A E=B F

por ser C D paralela á E F

C E=DF

restando esta ecuacion de la anterior, resulta.

A C=B D

luego A B será paralela á C D.

412.—Cuando una recta corta dos paralelas (fig. 63), á la recta A B se le llama *secante* y los ángulos que forma con las paralelas toman las siguientes denominaciones:

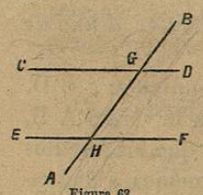

Figura 63.

Se llaman *internos* los cuatro ángulos que quedan dentro de las paralelas, y son: C G H, D G H, E H G y F H G.

Se llaman *externos* los cuatro ángulos que quedan fuera de las paralelas, y son: C G B, B G D, A H E y A H F.

Considerando los ángulos de dos en dos: se llaman *alternos internos*, los internos colocados de diferente lado de la secante como C G H y F H G, ó E H G y D G H: se llaman *alternos externos* los ángulos que están fuera de las paralelas y de diferente lado de la secante, como C G B y A H F, ó B G D y E H A: por último, se llaman *correspondientes* los ángulos colocados del mismo lado de la secante, siendo uno interno y el otro externo, como B G D y B H F, A H F, y A G D, E H A y C G A, E H B y C G B.

413.—Tomaremos como principio fundamental de las propiedades del paralelismo de dos líneas, el siguiente

TEOREMA.—*Siempre que los ángulos* C A B y D B A (fig. 64) *que tienen la posicion de alternos internos, sean iguales, las dos rectas* C E *y* F D *serán paralelas*

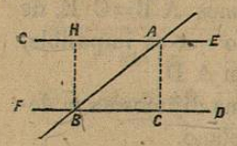

Figura 64.

Conforme á la hipótesis del teorema, C A B =D B A y vamos á demostrar que las rectas C E y F D tienen sus puntos equidistantes. Por el punto A levántese A G perpendicular á C E; y por B levántese B H perpendicular á F D. El ángulo B A G será complemento de C A B, y el ángulo H B A será complemento de D B A; pero siendo

C A B=D B A

se infiere que tambien lo serán sus complementos, luego

B A G=H B A.

Los dos triángulos A B G y A B H serán iguales (384) por tener el lado A B comun adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; y como en triángulos iguales á ángulos iguales están opuestos lados iguales, tendremos:

A G=B H

por opuestos á los ángulos

A B G=B A H

y como A G y B H miden las distancias de dos puntos de las rectas C E y F D, se infiere que serán paralelas por estar equidistantes.

414.—*Siempre que en dos rectas* A B *y* C D (fig. 65) *cortadas por una secante, los ángulos que tienen la posicion de alternos externos sean iguales, estas rectas serán paralelas.*

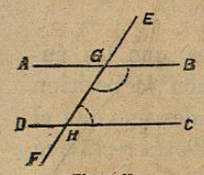

Figura 65.

Conforme á la hipótesis

A G E=F H D

sustituyendo á estos ángulos sus iguales por opuestos al vértice, se tiene

B G H=C H G

pero como estos tienen la posicion de alternos internos, se infiere que las rectas serán paralelas.

415.—*Si los ángulos correspondientes son iguales, las rectas serán paralelas.*

Sean (fig. 65) E G B=E H D

sustituyendo por E G B su opuesto al vértice, se tiene

A G H=E H D

pero siendo estos ángulos alternos internos, las rectas serán paralelas.

416.—*Siempre que los ángulos internos del mismo lado de la secante sean suplementarios, las dos rectas serán paralelas.* (fig. 65).

Sean A G H+C H G=2 rectos

y como

A G H+H G B=2 rectos (389)

igualando los primeros miembros se infiere que

C H G=H G B

pero siendo estos alternos internos, las rectas serán paralelas.

417.—*Siempre que los ángulos externos del mismo lado de la secante sean suplementarios, las rectas serán paralelas.*

Sean (fig. 65) A G E+C H F=2 rectos
sustituyendo sus iguales por opuestos al vértice

B G H+D H G=2 rectos

pero como

B G H+A G H=2 rectos (389)

igualando los primeros miembros se infiere que

D H G=A G H

pero siendo estos ángulos alternos internos, las rectas serán paralelas.

418.—Los teoremas recíprocos del fundamental y de los cuatro siguientes á él son tambien ciertos; pero como la demostracion de estas proposiciones recíprocas es muy sencilla, solo daremos la del teorema fundamental.

TEOREMA.—*Siempre que dos rectas* A B *y* C D (fig. 66) *sean paralelas, los ángulos alternos internos serán iguales.*

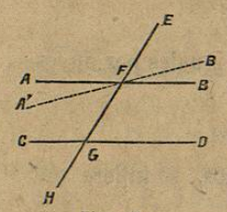

Figura 66.

DEMOSTRACION.—Si suponemos que los ángulos A F G y F G D, que tienen la posicion de alternos internos, no sean iguales sino que el primero sea mayor que el último, otra recta que pase por F como A' B', será la que tenga la propiedad de formar el ángulo

A' F G=F G D

pero teniendo estos ángulos la posicion de alternos internos conforme al teorema (413) directo, las rectas A' B' y C D serian paralelas, y como por el supuesto A B es tambien paralela á C D, resultaria que por un mismo punto F se podrian tirar dos paralelas, á una misma recta, lo que es imposible; (410) y como el mismo absurdo resultária si supusiéramos A F G<F G D se tiene, que no pudiendo ser estos ángulos desiguales, tendrá que verificarse que siempre que las rectas sean paralelas los ángulos alternos internos serán iguales.

419.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y que tienen sus vértices vueltos en el mismo sentido son iguales.*

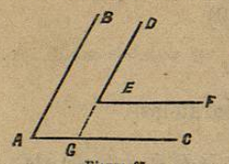

Figura 67.

Si prolongamos el lado D E (fig. 67) hasta G. tendremos:

A=D G C por correspondientes
D G C=D E F por la misma razon

luego

A=D E F.

420.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y que tienen sus vértices vueltos en sentido contrario, son iguales.*

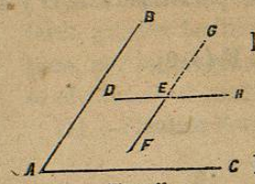

Figura 68.

Sean los ángulos B A C y D E F; (fig. 68) prolongando los lados del último, tendremos que

B A C = G E H (419)
G E H = D E F por opuestos al vértice

luego B A C = D E F.

421.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y cuyos vértices no están vueltos en el mismo sentido ni en sentido contrario, son suplementarios.*

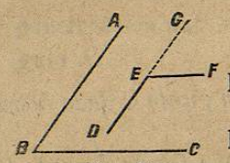

Figura 69.

Si prolongamos el lado D E (fig. 69), tendremos:

D E F + F E G=2 rectos (389)

pero

F E G=A B C (419)

luego

D E F + A B C=2 rectos.

422.—*Dos ángulos cuyos lados son perpendiculares, serán iguales si dichos ángulos son de la misma especie, y serán suplementarios cuando uno sea agudo y el otro obtuso.*

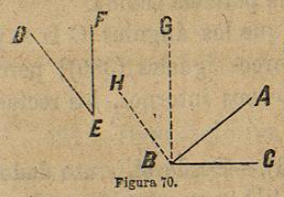

Figura 70.

Sean los ángulos agudos A B C y D E F (fig. 70) en los que D E es perpendicular á A B y F E perpendicular á B C; y vámos á demostrar que son iguales. Por el vértice B tiremos B G paralela á E F y B H paralela á E D, con lo que resultará el ángulo H B G =D E F (419).

Por ser los lados de estos ángulos respectivamente perpendiculares tendremos:

H B A=G B C por rectos

restando G B A de ambos, se tiene

H B G=A B C

pero como

H B G=D E F

resulta que

A B C=D E F.

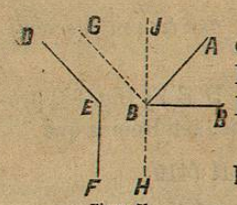

Figura 71.

Si los ángulos son de diferente especie, como en la figura 71, tirando por el vértice B las rectas B G y B H respectivamente paralelas á E D y á E F, tendremos que

G B H=D E F (419)

prolongando B H hasta J

G B H+G B J=2 rectos;

pero como

G B J=A B B'

sustituyendo se tiene:

G B H+ A B B'=2 rectos

luego

D E F + A B B'=2 rectos

que es lo que se debia demostrar.

423.—Problemas de paralelas.—I.—*Por un punto* C *dado fuera de una recta* A B, *tirarle una paralela.*

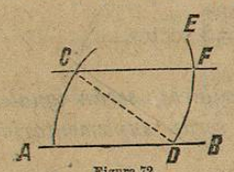

Figura 72.

1ª *Construccion.* (fig. 72).—Desde el punto C como centro y con un radio cualquiera, trácese el arco de círculo D E: hágase en seguida centro en D, y con el mismo radio trácese el arco C A: tómese la cuerda A C y llévese de D á F; tirando la recta C F ésta será la paralela pedida.

En efecto, si se tira la recta C D resulta que los ángulos C D A y D C F son iguales, por tener por medida arcos iguales (380); pero como estos ángulos tienen la posicion de alternos internos, las rectas serán paralelas.

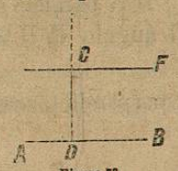

Figura 73.

2ª *Construccion.* (Fig. 73).—Desde el punto dado C bájese la perpendicular C D, y en seguida prolongando D C levántese en C la recta C F perpendicular á C D. La línea C F será la paralela pedida en razon de ser por construccion F C D=C D A y ser estos ángulos alternos internos.

II.—*Por un punto* A (fig. 74) *tomado fuera de una recta* B C *tirar otra que la encuentre bajo un ángulo dado* M.

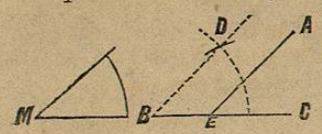

Figura 74.

En un punto cualquiera, B por ejemplo, de la recta B C, constrúyase un ángulo D B C igual á M, y por el punto A tírese la recta A E paralela á B D. Esta recta llenará la condicion del problema, supues-

to que el ángulo A E C=B por correspondientes, y B=M por construccion, luego A E C=M.

Estas construcciones, así como las de los problemas de perpendiculares, pueden facilitarse haciendo uso de la escuadra y del trasportador; pero, por regla general, son mucho más exactas las resoluciones que se efectúan por medio del compás.

III.—*Construir en un punto un ángulo igual á otro.*

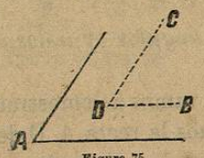

Figura 75.

(Fig. 75). Sean A el ángulo, y D el punto dado. Por el punto D se tirarán las rectas D B y D C paralelas á los lados del ángulo, y estando formados estos ángulos por lados paralelos y teniendo sus vértices en el mismo sentido, serán iguales (419).

Si se prolongara el lado B D más allá de D, esta construccion daria el medio para encontrar el suplemento de un ángulo A.

TRIANGULOS.

424.—Definiciones.—Hemos dicho que se llama *triángulo rectilíneo una figura cerrada por tres líneas rectas.* Se consideran en los triángulos los valores relativos de los lados y de los ángulos.

Triángulo escaleno es el que tiene desiguales sus tres lados.

Triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales; y equilátero es el que tiene sus tres lados iguales.

Se llama *triángulo oblicuángulo al que no está formado por ningun ángulo recto,* se dice que es *obtusángulo cuando uno de los ángulos es obtuso, acutángulo cuando todos los ángulos son agudos; y rectángulo cuando uno de los ángulos es recto.*

En los triángulos rectángulos, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, y á los otros dos lados se les denomina catetos.

425.—*En todo triángulo* A B C (fig. 76), *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.*